7 Bleistiftrollen - Beurteilende Statistik im Federmäppchen

Wie zwischen Experimentieren und Simulieren Grundgedanken beurteilender Statistik reifen

Wolfgang Riemer und Günter Seebach



Abbildung 7.1: Beschriftete Bleistift-Würfel

In der beurteilenden Statistik werden Hypothesen mit Hilfe realer Daten auf ihre Gültigkeit überprüft. Dazu untersucht man zunächst durch Simulation, später mit Wahrscheinlichkeitsrechnung, welche Daten mit hoher Wahrscheinlichkeit zu erwarten wären, wenn die fragliche Hypothese gelten würde. Anschließend vergleicht man die Erwartungen mit den realen Daten, den Versuchsergebnissen. Wenn die Abweichungen zu groß sind, bezweifelt man die Gültigkeit der Hypothese, man weist sie zurück. Andernfalls behält man sie bei.

Dieser Gedankengang ist schon in der Mittelstufe ab Klasse 7/8 hervorragend zu verstehen, wenn man mit einprägsamen, authentischen (für Schüler relevanten) Problemen arbeitet, nicht zu formal vorgeht und sich zunächst auf Simulationen beschränkt. Im Folgenden soll gezeigt werden, wie hervorragend sich neben händischen Simulationen auch Simulationen mit GeoGebra nutzen lassen.

Wunderbare authentische Fragestellungen ergeben sich aus sensorischen Tests (Cola- oder Schokoladen-Tests mit geraspelten Schokoladensorten [1], [2] oder Hörtests [3] mit CD/MP3-Musik verschiedener Qualitätsstufen). Wer im hektischen Schulalltag den Gang in den Musikraum oder klebrige Finger scheut, der findet mit dem hier vorgestellten Bleistiftexperiment eine höchst lohnende Alternative, die praktisch keiner organisatorischen Vorbereitung bedarf.

Arbeitsblatt-Vorlagen und Erläuterungen zu den GeoGebra-Simulationen finden sich in den Abschnitten 7.7.1 bis 7.7.3.

7.1 Mit Bleistiften "würfeln"

Wir beschriften die Seiten eines Bleistifts mit den Augenzahlen 1 bis 6. Das Logo bekommt die 6 – und wenn es dann mit 5, 4, 1, 2, 3 in einer Richtung weiter geht, haben die Gegenseiten die Augensumme 7, wie bei einem richtigen Würfel (siehe Abb. 7.2). Nun kann man mit den Stiften "würfeln", indem man sie über den Tisch rollen lässt.



Abbildung 7.2: Seiten-Nummerierung

Wer die Versuchsbedingen genauer festlegen möchte, nimmt einen Aktenordner als schiefe Ebene, legt das Logo beim Start nach oben und lässt die Stifte abrollen, bis sie liegen bleiben, vgl. dazu Abb. 7.8.

Das Hypothesentesten ist bei normalen Spielwürfeln "langweilig", denn niemand bezweifelt ernsthaft, dass die "6" mit der Wahrscheinlichkeit 1/6 kommt. Bei Bleistiften, die eine oft erheblich unterschätzte Individualität haben, sieht das anders aus. Zwecks Wiedererkennung in verschiedenen Kursen bekommt jeder Bleistift einen Namen – oder wenigstens eine Nummer. Für spannende Qualitätsvergleiche empfiehlt es sich, für jeden Schüler zwei Marken bereitzuhalten. Die Stifte heißen dann z. B. Johann Faber, Johann Herlitz, Andrea Faber, Andrea Herlitz. Bei Ikea bekommt man Klassensätze "kurzer" Bleistifte auch kostenlos. Doch bevor es ans Bleistiftrollen geht, werden Fragestellungen zusammengetragen, eine Erwartungshaltung wird aufgebaut.

Nahe liegende Fragen

- 1. Kommt bei meinem Stift die 6 mit Wahrscheinlichkeit 1/6? Wie viele 6er wären dann bei 120 Rollversuchen "normal"?
- 2. Kann ich meinen Bleistift als "Laplace-Bleistift" bezeichnen, bei dem alle Seiten mit der Wahrscheinlichkeit 1/6 kommen?
- 3. Gibt es unter den "Bleistiften höchster Qualität" (Faber-Castell) mehr Laplace-Bleistifte als unter den preiswerteren ("Herlitz" "Ikea") oder No-name-Produkten?

7.2 Erst simulieren – Erwartungshaltung aufbauen

Es ist für die Entwicklung tragfähiger intuitiver Vorstellungen zur beurteilenden Statistik empfehlenswert, die Entscheidungskriterien für die genannten Fragen zunächst auf intuitiver Grundlage im Klassenverband auszuhandeln und anschließend durch Simulationen abzusichern: Denn

7.2 Erst simulieren - Erwartungshaltung aufbauen

auch die Statistiker haben ihre Entscheidungskriterien (z. B. das Signifikanzniveau) in der "scientific community" nur ausgehandelt.

Man lässt dazu jeden Schüler 120-mal mit einem normalen Würfel würfeln und präsentiert die Häufigkeitsverteilungen auf einer gemeinsamen Folie oder an der Tafel. Es entsteht ein abgesichertes Gefühl dafür, wie sich ein Laplace-Bleistift verhalten müsste – und welche "Abweichungen vom Normalen" nicht vorkommen: Für Frage 2 misst man die Abweichungen zwischen den gewürfelten Augenzahlen n_1, \ldots, n_6 zu der erwarteten Augenzahl 20 durch die Abstandsquadrat-Summe

$$t = \frac{(n_1 - 20)^2}{20} + \frac{(n_2 - 20)^2}{20} + \dots + \frac{(n_6 - 20)^2}{20}$$

die um so kleiner ist, je näher die Häufigkeiten bei einer Gleichverteilung liegen. Die Simulationen geben dann Auskunft, bis zu welcher Obergrenze dieser Testwert *t* bei Laplace-Würfeln normalerweise schwankt. (*t* bezeichnet man als Chi-Quadrat-Testwert; die Verteilung von *t* hat die Dichte $f(t) = 0,133 \cdot t^{1,5} \cdot e^{-t/2}$.)

120-mal Würfeln dauert mit Auszählen und Zusammentragen der Ergebnisse im Kursverband ca. 25 Minuten. Das ist eine gute und durch die anschließende Bewertung nachhaltig wirkende Investition. Die Erwartungshaltung vor dem realen Bleistiftrollen steigt dadurch enorm.

Als Ergebnis solcher händischer Simulationen zeigt sich, dass bei Laplace-Würfeln/Bleistiften

- die Anzahl der Sechser mit ca. 95%-iger Sicherheit zwischen 12 und 28 liegt,
- der Testwert t mit ca. 95%-iger Wahrscheinlichkeit unter 11 liegt.



Abbildung 7.3: Computersimulation des Bleistift-Rollens

Durch eine Computersimulation (n = 1000 Versuche mit je 120 Laplace-Bleistiften, Abb. 7.3) wird das abgesichert.

Stochastisch gesehen ist ein Bleistift um so besser, je "gleichverteilter" (oder "laplacescher") die Augenzahlen sind. Um die "stochastische Qualität" verschiedener Marken zu vergleichen,

verwendet man den Vorzeichentest. Man bildet Stiftepaare. Jeder Schüler notiert ein "+", wenn der Testwert *t* bei seinem billigeren Stift kleiner ist, sonst ein "-". Wenn 30 Schüler im Kurs sind, entspricht das 30 Münzwürfen und bei gleicher Qualität erwartet man mit 95%-iger Sicherheit zwischen 10 und 20 positive Vorzeichen. (Simulation von Münzwürfen oder Binomialverteilung nutzen). Erst bei mehr als 20-mal "+" würde man die billigen Stifte, bei weniger als 10-mal "+" die teuren Stifte als "stochastisch hochwertiger" bezeichnen.

7.3 Dann experimentieren

NACH dem Diskutieren und Simulieren gehört die Stunde, in der die Bleistifte tatsächlich gerollt werden, zu den schönsten – und "emotional geladensten" – die man im Mathematikunterricht erleben kann. Ohne Unterlass werden (während des Rollens) neue Hypothesen generiert und sicher geglaubte verworfen. Jubeln und Fluchen, ungeduldiges Warten und überraschende Freude erfüllen den Raum: Beurteilende Statistik lebt. (Vgl. Auswertungsvorlage 7.7.2.)

	He	erlitz						Fa	aber						
	1	2	3	4	5	6	t	1	2	3	4	5	6	t	
Mario	18	17	17	25	22	21	2.6	37	42	15	9	12	5	60.4	+
Frauke	20	30	20	20	12	18	8.4	23	20	18	21	15	23	2.4	-
Julia	21	20	27	12	25	15	8.2	12	23	18	11	30	26	14.7	+
Tobias	18	29	31	6	3	33	43	31	4	4	26	33	22	42.1	-
Henning	16	31	22	23	15	13	11.2	22	21	29	13	12	23	10.4	-
Daniel	18	32	39	11	13	7	40.4	16	18	22	27	17	20	4.1	-
Jaquline	10	22	20	22	20	26	7.2	10	24	26	12	24	24	12.4	+
Wolfgang	6	13	23	27	24	27	18.4	20	17	22	24	20	17	1.9	-
Simone	21	13	26	25	23	12	9.2	33	19	12	21	22	13	14.4	+
Simome	23	38	7	27	20	5	38.8	4	13	28	16	29	30	28.3	-
Nils	44	33	11	18	0	14	63.3	13	17	0	51	29	10	80	+

Einen Eindruck von den Ergebnissen vermittelt Abb. 7.4:

Abbildung 7.4: Versuchsergebnisse für 11 Bleistiftpaare – Signifikante Abweichungen sind unterlegt. + bedeutet: Herlitz-Testwert < Faber-Testwert

Wie man erkennt, sind "echte Laplace-Bleistifte" aller Erwartung zum Trotz selten. Bei 5 von 11 Herlitz-Stiften und bei 7 von 11 Faber-Stiften weist der Chi-Quadrat-Test die Hypothese einer Gleichverteilung ("Laplace-Hypothese") zurück (rot markierte Zellen in Abb. 7.4).

Wenn man sich auf die Bleistiftseite mit der 6 konzentriert, weist der zweiseitige Test bei 3 von 11 Herlitz-Stiften und bei 2 von 11 Faber-Stiften die Hypothese H_0 : $p(6) = \frac{1}{6}$ zugunsten von H_1 : $p(6) \neq \frac{1}{6}$ zurück.

Auch der Vorzeichentest belegt, dass Markenstifte nicht besser abschneiden als preiswerte Stifte. (In der letzten Spalte, wurde ein + notiert, wenn der Anpassungstestwert bei dem Herlitz-Stift kleiner ist als bei dem zugehörigen Faber-Partner.)

7.4 Visualisieren in GeoGebra

7.4.1 Testwerte im Punktdiagramm

Die realen Testergebnisse lassen sich noch besser beurteilen, wenn man sie in *einem* Diagramm mit den Ergebnissen vergleicht, die sich ergeben müssten, wenn die fragliche Hypothese stimmen würde. So zeigt Abb. 7.5 die Chi-Quadrat-Testwerte *t* (aus einer anderen Stichprobe) realer Bleistifte im Vergleich mit den Testwerten 1000 simulierter Laplace-Stifte in einem Punktdiagramm, das Aussagen, wie sie sich aus Abb. 7.4 ergeben, noch plakativer visualisiert.



Abbildung 7.5: Chi-Quadrat-Testwerte realer Bleistifte (Mitte) im Vergleich mit 1000 mit simulierten Laplace-Stiften

7.4.2 Stochastischer Schwerpunkt

Das stochastische Verhalten von Stiften lässt sich auch gut durch die Mittelwerte ("Schwerpunkte") der Häufigkeitsverteilungen zweidimensional visualisieren: Dazu denken wir uns die relativen Häufigkeiten der Bleistiftseiten als Gewichte (mit Gesamtmasse 1) in den zugehörigen Seitenmitten $P_1(0; -1), P_2(-\sin 30^\circ; \cos 30^\circ), \dots, P_6(0; 1)$ konzentriert (Abb. 7.6) und berechnen den Schwerpunkt $S(\bar{x}; \bar{y})$ nach der Formel

$$\overline{x} = (h_2 + h_3 - h_4 - h_5) \cdot \cos(30^\circ)$$

$$\overline{y} = h_6 - h_1 + (h_3 + h_5 - h_2 - h_4) \cdot \sin(30^\circ)$$

Für den Herlitz-Stift von Nils ergibt sich z. B.:



Abbildung 7.6: Berechnung des Schwerpunktes

$$\overline{x} = \frac{33 + 11 - 18 - 0}{120} \cdot \cos(30^\circ) \approx 0,012$$

$$\overline{y} = \frac{14 - 44}{120} + \frac{11 + 0 - 33 - 18}{120} \cdot \sin(30^\circ) \approx -0,335$$

Die Seitenmittelpunkte, die besonders häufig auftreten, ziehen den Schwerpunkt zu sich herüber. Bei Nils sind das P_1 , P_2 und P_4 mit negativen y-Koordinaten. Damit liegt auch der Schwerpunkt unterhalb der x-Achse. Wie weit die Schwerpunkte realer Bleistifte oft von denjenigen simulierter Stifte entfernt sind, zeigt das Punktdiagramm aus Abb. 7.7.

7.4.3 Boxplots

Boxplots werden ab Klasse 6 genutzt, um "stetig verteilte Daten" zu veranschaulichen. Weil diese Diagramme auch gestatten Zufallsschwankungen zu messen, eignen sie sich hervorragend, um Gedanken beurteilender Statistik vorzubereiten: Man könnte (im Sinne einer Propädeutik) formulieren: Zwei Mittelwerte (Mediane) unterscheiden sich signifikant, wenn sich die zugehörigen "50%-Schwankungsboxen" nicht oder kaum überschneiden.

7.5 Vertiefende Aufgaben



Abbildung 7.7: Die Schwerpunkte realer Bleistifte (Punkt-Markierung) im Vergleich mit denjenigen 1000 simulierter Laplace-Stifte (Kreuz-Markierung) . Innerhalb des Kreises liegen 95% der simulierten Schwerpunkte.

Auch dazu ein Bleistift-Experiment:

Tobias und Dagmar haben ihren Faber- und ihren Herlitz-Bleistift einen Aktenordner (Abb. 7.8) herunterrollen lassen und dabei die Rollweiten (in cm) gemessen. Die Verteilungen der Rollweiten wurden in Abb. 7.9 als Boxplots visualisiert. Da sich die Boxen (die 50% Schwankungsbereiche) nicht bzw. kaum überlappen, kann man "mit Fug und Recht" behaupten: Faber-Stifte rollen nicht so weit wie Herlitz-Stifte.



Abbildung 7.8: Ordner als schiefe Ebene mit den Bügeln als Startposition

7.5 Vertiefende Aufgaben

Wenn man mit der Binomialverteilung und der Sigmaregel (Tabelle 7.1) vertraut ist, wenn man also über die "Werkzeugkiste" der beurteilenden Statistik verfügt, bieten die Bleistifte ein schönes Übungsfeld zu sinnvollem Hypothesentests und zum Parameterschätzen. Man vergleiche die Aufgabenvorschläge in Abschnitt 7.7.3.

7 Bleistiftrollen - Beurteilende Statistik im Federmäppchen



(a) Tobias' Rollweitenverteilung

(b) Dagmars Rollweitenverteilung

Niveau	zweiseitig	einseitig	Chiquadrat 5df
99%	$\mu \pm 2.576\sigma : [9.5; 30.5]$	$\mu + 2.326\sigma = 29.7$	15.09
95%	$\mu \pm 1.960\sigma : [12.0; 28.0]$	$\mu + 1.645\sigma = 26.7$	11.07
90%	$\mu \pm 1.645\sigma$: [13.3;26.7]	$\mu + 1.282\sigma = 25.3$	9.24
80%	$\mu \pm 1.282\sigma: [14.7; 25.3]$	$\mu + 0.842\sigma = 23.5$	7.29

Abbildung 7.9: Rollweitenverteilung als Boxplots

 $\mu = n \cdot p = 120 \cdot \frac{1}{6} = 20 \qquad \sigma = \sqrt{n \cdot p(1-p)} = \sqrt{120 \cdot \frac{1}{6} \frac{5}{6}} = 4.08$ $\chi^2 = \frac{(n_1 - 20)^2}{20} + \dots + \frac{(n_6 - 20)^2}{20}$

Tabelle 7.1: Werkzeugkiste der beurteilenden Statistik

7.6 Resümee

Die Nachhaltigkeit von Mathematikunterricht steigt "exponentiell" mit der Authentizität der Beispiele. Wer selber einmal gezwungen war, eine Hypothese, von deren Gültigkeit er felsenfest überzeugt war, nach einem Realexperiment zu verwerfen, der wird sich auch viele Jahre nach dem Abitur gerne an Mathematik und an die "Philosophie" beurteilender Statistik erinnern.

Die verständnisfördernde, ja erhellende Rolle händischer und elektronischer Simulationen wurde in diesem Beitrag herausgestellt.

Und wer sich durch ein Experimentieren mit den hier vorgestellten Simulationen von dem enormen Potenzial überzeugt hat, dass GeoGebra durch die integrierte Tabellenkalkulation inzwischen auch im Bereich der Statistik besitzt, wird dieses Werkzeug – als ernst zu nehmende Alternative zu Excel – in Zukunft nicht mehr missen wollen.

7.7 Anhang

7.7.1 Aufgaben

Zweiseitiges Testen

- Kommt die "6" bei meinem Stift mit der Wahrscheinlichkeit 1/6? $(H_0: p = \frac{1}{6} \text{ gegen } H_1: p \neq \frac{1}{6})$
- Kommen "6"und gegenüberliegende "1" zusammen mit Wahrscheinlichkeit 1/3? (Was einer Seite möglicherweise fehlt, kommt der Gegenseite zugute.)
 (H₀: p = ¹/₃ gegen H₁: p ≠ ¹/₃)
- Kann ich meinen Bleistift so in zwei Seiten zerlegen, dass Ober- und Unterseite mit gleicher Wahrscheinlichkeit 1/2 kommen (z. B. Oberseite: 1-4-5, Unterseite 2-3-6)?
 (H₀: p = ¹/₂ gegen H₁ : p ≠ ¹/₂)

Einseitiges Testen

• Eine Grundschule sammelt Bleistifte, bei denen die 6 häufig (die 1 selten) kommt. (H_0 : $p = \frac{1}{6}$ gegen $H_1: p > \frac{1}{6}$ oder $H_1: p < \frac{1}{6}$)

Fehlerwahrscheinlichkeiten

- Eine Grundschule nimmt Bleistifte in Zahlung, bei denen die "6" mindestens mit Wahrscheinlichkeit 1/3 kommt. Entscheidungsregel: Bei 120 Versuchen mindestens 40-mal die "6". Formulieren Sie zwei Alternativ-Hypothesen und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Fehler erster und zweiter Art.
- Eine Grundschule nimmt Bleistifte in Zahlung, bei denen die 1 höchstens mit Wahrscheinlichkeit 5 % kommt. Formulieren Sie zwei Alternativhypothesen, eine sinnvolle Entscheidungsregel und plotten Sie die zugehörige Operationscharakteristik des Tests.

Schätzen

• Schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit der "6" durch ein 80 %, 95 %, 99 % Konfidenzintervall.

Anpassungstest $t = \frac{(n_1 - 20)^2}{20} + \frac{(n_2 - 20)^2}{20} + \ldots + \frac{(n_6 - 20)^2}{20}$

- Testen Sie, ob Sie einen Laplace-Bleistift erwischt haben, bei dem ALLE Seiten mit der Wahrscheinlichkeit 1/6 kommen.
- Sie brauchen einen Laplace-Bleistift. Der Anpassungstest hat die Hypothese einer Gleichverteilung nicht zurückgewiesen (so sagen die Angloamerikaner treffend!)
 - a) bei Jan für n = 120 auf dem 5 % Niveau
 - b) bei Bianca für n = 1200 auf dem 5 % Niveau
 - c) bei David für n = 120 auf dem 1 % Niveau
 - d) bei Simone für n = 1200 auf dem 1 %-Niveau

Welchen der 4 Bleistifte kaufen Sie?

Vorzeichentest

• Sie haben einen teuren und einen billigen Bleistift je 120-mal gerollt. Wenn die Häufigkeiten des hochwertigen Bleistifts näher an der Gleichverteilung liegen (kleinerer Testwert *t*) als diejenigen des minderwertigen Stiftes, notieren Sie ein "–", sonst ein "+". Zählen Sie in Ihrem Kurs die "+" Ergebnisse und prüfen Sie die Hypothese, ob p(+) = 0.5 zurückgewiesen werden muss. Testen Sie einseitig oder zweiseitig?

7.7.2 Auswertungsvorlage

Rollen Sie den Bleistift 120-mal mit ein wenig Schwung über Ihren Holztisch. Notieren Sie die 120 "gewürfelten" Augenzahlen in der Tabelle. Zählen Sie danach aus, wie oft die einzelnen Augenzahlen kamen und notiere Sie die Häufigkeiten an den entsprechenden Bleistiftseiten der Abbildung. (Sie können Strichlisten parallel zum Ausfüllen der Tabelle auch an den zugehörigen Kanten der Grafik führen, es muss als Summe 120 herauskommen).



Mein Versuchsergebnis:

Die Anzahl der Sechser liegt n	äher an 20
bei dem teuren Stift (+)	
bei dem billigen Stift (-)	

Der Testwert <i>t</i> ist kleiner	
bei dem teurem Stift (+)	
bei dem billigen Stift (-)	

7.7.3 Simulieren mit GeoGebra

Im Folgenden wird beschrieben, wie man mit GeoGebra die 1000-fache Wiederholung einer Zufallsversuchsreihe simulieren kann, bei der jeweils 120 mal ein perfekter Laplace-Bleistift gerollt wird, und wie man eine solche Simulation unter verschiedenen Gesichtspunkten auswertet (Abb. 7.3, 7.5 und 7.7). Dabei spielt die integrierte Tabellenkalkulation (TK) eine entscheidende Rolle.

Die Simulation einer Versuchsreihe Die Eingabe von A2 = Folge[Zufallszahl[1, 6], k, 1, 120] in der Eingabezeile von GeoGebra bewirkt, dass in der Zelle A2 des Kalkulationsblattes eine Liste aus 120 Zufallszahlen aus dem Ganzzahlbereich 1 bis 6 erzeugt wird. Der Parameter k kann dabei als Folgenindex angesehen werden, der von dem Startwert 1 ausgehend bis zum Endwert 120 läuft. Diese Liste kann man sich allerdings nicht komplett anschauen, da sie zu lang ist für die Einspielung in der Algebra-Ansicht. Aber man kann das k-te Element mittels des Befehls Element[A2,k], wobei k eine Zahl zwischen 1 und 120 ist, bestimmen. Die Taste F9 bewirkt eine Neuberechnung der ganzen Liste.

🔁 Fre	eie Objekte								
🥥	zeige ₆ = false	•							
🎯 🗄	zeige _t = true								
🗀 Ab	hängige Objel	kte							
O ,	A2 = {5, 4, 6, 9	5, 4, 4, 5, 2, 2	5, 6, 6, 3, 1,	4, 1, 6, 4, 6, 2	, 3, 3, 1, 1, 1,	3, 4, 1, 3, 4, 4	, 3, 5, 6, 6, 3,	4, 4, 1, 6, 1, 5	, 5, 5, 6, 4, 6,
-0	B2 = 22								
0	D2 = 15								
0	E2 = 20								
0	F2 = 22								
	GZ = 25	0 15 10 21	22 25 24 2	3 20 25 20	17 10 16 1/	1 16 23 16	20 24 47 24	26 10 15 2	0 14 20 26
-0	$L_1 = \{20, 21, 1\}$	10, 15, 10, 21,	22,20,21,2	3, 29, 25, 20,	17, 18, 16, 1	1, 10, 23, 10, .	20, 24, 17, 21	, 20, 19, 10, 2	9, 14, 20, 26
0	$L_2 = \{3.7, 4, 5\}$.2, 5.2, 2.5, 2.	3, 6.1, 4.6, 1.1	1, 2.8, 8.1, 1.9	9, 2.3, 11.5, 4.	6, 10.7, 8.3, 1	.3, 3.5, 1.4, 1	.9, 4.2, 4.4, 6.	5, 7.6, 4.6, 15
0	b = 1000								
0	box ₆ = 20								
🥥	$box_t = 4.4$								
@ 1	t = 1000								
4									
	A	В	С	D	E	F	G	Н	I
1		1	2	3	4	0	6	0	
2	{5, 4, 6, 5,	22	16	15	20	22	25	3.7	(3.7, -166
3	{2, 6, 2, 1,	18	27	21	16	17	21	0	(0, -193.84)

Das Auszählen einer Versuchsreihe Nun wird die in A2 stehende Liste ausgezählt. Es werden die Häufigkeiten der Zahlen 1 bis 6 in der Liste bestimmt. Dazu schreibt man die Zahlen 1 bis 6 in die Zellen B1 bis G1. In der Eingabezeile notiert man: B2 = ZähleWenn[x == B\$1, A2]. Wichtig sind die zwei Gleichheitszeichen, die den Vergleichsoperator ausmachen. Nach Betätigung der Eingabetaste steht die Zahl der Einser in der Zelle B2. In die Zellen C2 bis G2 schreibt man nun die entsprechend angepassten Befehle: C2 = ZähleWenn[x == C\$1, A2],..., G2 = ZähleWenn[x == G\$1, A2], am besten wieder, indem man die Eingabezeile nutzt.

Das scheint umständlich zu sein: Kundige möchten sicher an dieser Stelle Zellinhalte unter Verwendung relativer und absoluter Bezüge durch Ziehen an Markierungen kopieren. Leider gelingt das an dieser Stelle nicht, da der absolute Bezug auf die zufallsbestimmte Liste nicht die Liste sondern deren Definition, also den Zufallsprozess selbst, einsetzt.

Die 1000-fache Wiederholung Nachdem in der Zeile 2 der TK 120 Zufallszahlen erzeugt und ausgezählt sind, soll dies 1000 mal wiederholt werden. Das klingt komplizierter als es ist: Man markiert die Zellen A2 bis G2 und zieht nun an dem kleinen Quadrat in der rechten unteren Ecke die Markierung bis zur Zeile mit der Nummer 1001.

Die Verteilung der 6er im Balkendiagramm und im Boxplot (vgl. Abb. 7.3) Man markiert in der TK die Zellen G2 bis G1001, die die Häufigkeiten der 6-er enthalten, ruft dann mittels rechter Maustaste ein Kontextmenü auf und wählt: Liste erzeugen. In der Algebra-Ansicht stellt man fest, dass eine Liste mit der Bezeichnung L₁ erzeugt wurde, in der sich die Inhalte der markierten Zellen wiederfinden. Mit dieser Liste erzeugt man zunächst ein Balkendiagramm über den Befehl b=Balkendiagramm[L_1,1] in der Eingabezeile. Dabei bedeutet der zweite Parameter, hier also die 1, dass jeder Balken des Diagramms die Breite 1 haben soll. Wegen der Proportionen ist es sinnvoll, das Verhältnis der Einheitengrößen auf der *x*- und *y*-Achse geeignet zu verändern. Das macht man z. B., indem man an einer freien Stelle im Geometriefenster die rechte Maustaste drückt und über die Option xAchse:yAchse das Verhältnis 1:5 anwählt. Mit dem Mausrädchen kann man außerdem geeignet zoomen und bei gedrückter Shift-Taste und linker Maustaste sind die Inhalte der Geometrie-Ansicht natürlich auch verschiebbar.

Den Boxplot erhält man über den Befehl box_6=Boxplot[210,10,L_1]. Dabei bedeuten der erste Parameter, hier also 210, die vertikale Verschiebung des Boxplots und der zweite Parameter, hier die 10, gibt die vertikale Breite des Boxplots, beide in *y*-Einheiten, an. Schließlich erzeugt man ein Kontrollkästchen, um Boxplot und Balkendiagramm nach Belieben aus- und einblenden zu können. Wir blenden beide aus.

Die Chi-Quadrat-Testwerte t Die Chi-Quadrat-Testwerte (im Folgenden kurz *t*-Werte genannt) sollen in der Spalte H der TK berechnet werden. Das erfordert die Eingabe von H2= (B2 $-20)^2/20 + (C2 - 20)^2/20 + (D2 - 20)^2/20 + (E2 - 20)^2/20 + (F2 - 20)^2/20 + (G2 - 20)^2/20$ in der Eingabezeile. Dann markiert man die Zelle H2 und kopiert sie durch Ziehen am kleinen Quadrat in der rechten unteren Ecke in die Zellen H3 bis H1001. Wieder generiert man wie oben eine neue Liste L₂, diesmal aber aus den *t*-Werten (Markieren von H2 bis H1001, rechte Maustaste: Liste erzeugen). Die Befehle t=Balkendiagramm[L_2,1] und box_t=Boxplot[180,10,L_2] lassen wiederum das zugehörige Balkendiagramm und den Boxplot entstehen.

Im Falle der *t*-Werte wählt man aber auch noch als zusätzliche Veranschaulichung eine Punktwolke: Zu diesem Zweck erzeugt man zu jedem *t*-Wert einen Punkt mit einer zufälligen *y*-Koordinate im Bereich $-200 \le y \le -100$ und dem jeweiligen *t*-Wert als *x*-Koordinate. Jeder dieser Punkte wird normalerweise automatisch in der Geometrie-Ansicht angezeigt, wenn er in einer Zelle der TK steht. Damit aber nicht auch noch der Punktname eingespielt wird, wählt man in der Menüzeile unter Einstellungen \rightarrow Objektname anzeigen die Option: Keine neuen Objekte. Nun erzeugt man die Punkte durch Eingabe von I2 = (H2, 100 random() - 200) gefolgt von einer Kopieraktion nach I3 bis I1001 durch Ziehen am kleinen Quadrat der Zelle I2. Zum Schluss wird nun auch die Anzeige dieses Balkendiagramms, dieses Boxplots und der Punktwolke von einem zweiten Kontrollbutton abhängig gemacht. Im Falle des Balkendiagramms und des Boxplots ist das leicht bei der Erstellung des Kontrollbuttons durch entsprechende Auswahl möglich. Im Falle der Punktwolke geht das so: Angenommen, der Kontrollbutton heißt zeiget (den Namen, der nicht mit der im Geometriefenster eingespielten Bezeichnung verwechselt werden darf, findet man über die rechte Maustaste im Menü Eigenschaften beim Klicken auf den Kontrollbutton), dann markiert man die Zelle I2 und ruft auch hier über das Kontextmenü (rechte Maustaste) die Option Eigenschaften auf. Nun zeigen sich verschiedene Registerkarten, von denen man "Erweitert" auswählt. Unter der Rubrik "Bedingung" um das Objekt anzuzeigen, gibt man nun zeige_t an. Nochmals zieht man I2 anschließend bis nach I1001 hinunter. Nunmehr ist die Einspielung der *t*-Punkte davon abhängig, ob ein Häkchen bei zeige_t eingetragen ist oder nicht.

Die stochastischen Schwerpunkte

	eie Obiekte										
O AL	ohängige Objekte										
-0	A2 = {6, 4, 6, 2, 3	2, 2, 3, 3, 1, 6	2, 4, 5, 4, 3,	1, 2, 5, 5, 5, 2	5, 3, 3, 3, 2,	5, 6, 4, 1, 6, 6	5, 6, 1, 1, 2,	5, 3, 2, 1, 5, 1	, 6, 3, 2, 5, 3,	2, 1, 4, 3, 5, 1,	1, 1, 2, 4, 5, 6,
-0	B2 = 22					and a second					in on the second second
-0	D2 = 15										
-0	E2 = 22										
-0	F2 = 21										
0	G2 = 16										
O	K2 = 0.1										
-0	$L_1 = \{0.1, 0.14, 0\}$	0.05, 0.08, 0.1	4, 0.08, 0.01,	, 0.1, 0.14, 0.0	04, 0.07, 0.1, 0	0.18, 0.02, 0.0	09, 0.08, 0.0	01, 0.06, 0.16	, 0.18, 0.05, 0	.11, 0.06, 0.07,	0.15, 0.08, 0.0
1.0	CV Property and the terms	004 004 04	1 0 01 0 01	0.01 0.01 0	01 001 00	1.0.01.0.01.	0.01.0.01	0.01.0.01.0	.01. 0.01. 0.01	1.0.01.0.01.0.	01.0.01.0.01.
-0	$L_2 = \{0, 0, 0.01, 0.0$	0.01, 0.01, 0.0	1,0.01,0.01	,,,						.,,,	
-0	$L_2 = \{0, 0, 0.01, 0.0$	0.01, 0.01, 0.0	51, 0.01, 0.01	, 0.01, 0.01, 0					8 8		
-0	$L_2 = \{0, 0, 0.01, 0.0$	0.01, 0.01, 0.0	51, 0.01, 0.01	, 0.01, 0.01, 0		.,,				.,,,	
-0	$L_2 = \{0, 0, 0.01, 1, 0, 0.01, 1, 0, 0.01, 1, 0, 0.01, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,$	0.01, 0.01, 0.	1,0.01,0.01	, 0.01, 0.01, 0		,,					- 9 - 9 - 9
-0	$L_2 = \{0, 0, 0.01, 1, R = 0.16 \}$ k: x ² + y ² = 0.03	в	с	D	E	F	G	н		J	K
	$L_2 = \{0, 0, 0.01, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,$	B 1	C 2	D 3	E 4	F 5	G	H x-quer	y-quer	J P(x-quer,y	к D(NP,P)
-0 -0 -0 -0 -0 -0 -0 -0 -0 -0 -0 -0 -0 -	L ₂ = {0, 0, 0.01, 1 R = 0.16 k: x ² + y ² = 0.03	B 1 22	C 2 24	D 3 15	E 4 22	F 5 21	G 6 16	H x-quer -0.03	 y-quer -0.09	J P(x-quer,y (-0.03, -0.09)	K D(NP,P) 0.1
-0 -0 -0 -0 -0 -0 -0 -0 -0 -0 -0 -0 -0 -	L ₂ = {0, 0, 0.01, ' R = 0.16 k: x ² + y ² = 0.03 A {6, 4, 6, 2, {6, 6, 4, 6,	B 1 22 14	C 2 24 17	D 3 15 26	E 4 22 14	F 5 21 31	G 6 16 18	H x-quer -0.03 -0.01	y-quer -0.09 0.14	J P(x-quer,y (-0.03, -0.09) (-0.01, 0.14)	K D(NP,P) 0.1 0.14
1 2 3 4	L ₂ = {0, 0, 0.01, 1 R = 0.16 k: x ² + y ² = 0.03 A {6, 4, 6, 2, {6, 6, 4, 6, {1, 4, 3, 2,	B 1 22 14 16	C 2 24 17 25	D 3 15 26 19	E 4 22 14 25	F 21 31 13	G 6 16 18 22	H x-quer -0.03 -0.01 0.04	l y-quer -0.09 0.14 -0.03	J P(x-quer,y (-0.03, -0.09) (-0.01, 0.14) (0.04, -0.03)	K D(NP,P) 0.1 0.14 0.05
1 2 3 4 5	L ₂ = {0, 0, 0.01, 1 R = 0.16 k: x ² + y ² = 0.03 A {6, 6, 4, 6, 2, {6, 6, 4, 6, {1, 4, 3, 2, {5, 6, 2, 2,	B 1 22 14 16 26	C 2 24 17 25 18	D 3 15 26 19 16 16	E 4 22 14 25 18	F 21 31 13 25	G 6 16 18 22 17	H x-quer -0.03 -0.01 0.04 -0.06	y-quer -0.09 0.14 -0.03 -0.05	J P(x-quer,y (-0.03, -0.09) (-0.01, 0.14) (0.04, -0.03) (-0.06, -0.05)	K D(NP,P) 0.1 0.14 0.05 0.08

Um das Programm nicht zu überlasten, nutzt man für die Anzeige der stochastischen Schwerpunkte eine Datei, in der keine *t*-Werte ermittelt sind, in der also lediglich wie oben beschrieben 1000 Testreihen mit je 120 Zufallsversuchen simuliert und ausgezählt sind. Nun trägt man in der Eingabezeile ein H2= (C2 + D2 - E2 - F2) / 120 $\cos(30^{\circ})$, d. h. in der Zelle H2 wird die *x*-Koordinate des Datenschwerpunktes der ersten Versuchsreihe berechnet. Entsprechend sorgt I2= (G2 - B2) / 120 + (D2 + F2 - C2 - E2) / 120 $\sin(30^{\circ})$ in der Eingabezeile eingetragen für die Berechnung der entsprechenden *y*-Koordinate in der Zelle I2. Nun sollen die zugehörigen Punkte erzeugt werden. Diese werden, einmal in einer Zelle der TK stehend, auch in der Geometrie-Ansicht eingespielt. Damit aber nicht zusätzlich noch der Punktname eingespielt wird, wählen wir – wie auch oben beschrieben – in der Menüzeile unter Einstellungen \rightarrow Objektname anzeigen die Option: Keine neuen Objekte. Dann stellt man das Verhältnis xAchse:yAchse über das Kontextmenü der Geometrie-Ansicht auf 1:1 und zoomt so, dass die Koordinatenbereiche von -0.6 bis 0.6 den Bildschirm füllen. Die Eingabe J2=(H2,I2) in der Eingabezeile erzeugt nun den ersten Datenschwerpunkt. Man markiert die Zelle J2 und kopiert sie durch Ziehen an ihrem kleinen Quadrat in der rechten unteren Ecke bis in die Zelle J1001.

Die Abstände vom Nullpunkt und der 95 % Kreis Man erzeugt den Nullpunkt durch Eingabe von N=(0,0) in der Eingabezeile und dann den Abstand des Punktes J2 vom Nullpunkt in der Zelle K2 durch Eingabe von K2=Abstand[J2,N]. Auch die Zelle K2 kopiert man durch

Literatur

Ziehen bis in die Zelle K1001. Um nun die 95 % Grenze durch einen geeigneten Kreis um den Nullpunkt kenntlich zu machen, geht man folgendermaßen vor: Man sortiert die Abstände aufsteigend und nimmt das Element mit der Nummer 950 als Kreisradius. Dazu markiert man K2 bis K1001 und erzeugt über die rechte Maustaste aus diesen Zellelementen die Liste L1. Wir schreiben in die Eingabezeile L_2=sortiere[L_1] und erhalten so die sortierte Liste L2 der Nullpunktabstände. Den gesuchten Radius legt man durch Eingabe von R=Element[L_2,950] auf die Variable R, so dass man durch Eingabe von k=Kreis[N,R] den gewünschten 95 % Kreis um den Nullpunkt N ziehen kann. Selbstverständlich erzeugt jede Betätigung der F9-Taste eine komplett neue Simulation.

Literatur

- RIEMER, W. & PETZOLD, W. (1997). Geschmackstests Spannende und verbindende Experimente. In: mathematiklehren, Sammelband Wege in die Stochastik (2008) und Heft 85.
- [2] RIEMER, W. (1994). Schmeckt Lindt-Schokolade besser als Alpia? Sensorische Experimente im Mathematikunterricht. In: mathematiklehren, Heft 62.
- [3] RIEMER, W. (2009). Soundcheck: CD contra MP3. Ein Hörtest als Einstieg in die Stochastik. In: mathematiklehren, Heft 153.