G 20353 F

PM

Praxis der Mathematik in der Schule

Sekundarstufen I und II

43
Heft Nr. 43/54. Jahrgang
Februar 2012

Tabellenkalkulation

Einsteigen bitte!

AulisVerlag

Herausgeber Heft 43
Markus Vogel,
Michael Gieding

Herausgeber:
Christina Drüke-Noe, Kassel
Prof. Dr. Gilbert Greefrath, Münster
Dr. Michael Meyer, Dortmund
René Schelldorfer, Zürich
Prof. Dr. Markus Vogel, Heidelberg

Inhalt

www.aulis.de

Online-Ergänzungen und Kopiervorlagen
Passwort für Abonnenten
PM_43_12_TAKA

Titelgestaltung: Schmid, Wilhelm
Foto: © philipus – Fotolia

Praxis der Mathematik in der Schule
erscheint im Aulis Verlag

Z208021

© Wolfgang Riemer

Mit Bleistiften würfeln

Beurteilende Statistik zwischen Realität und Simulation

Wolfgang Riemer

Im hektischen Schulalltag kommt das Experimentieren mitunter etwas kurz, obwohl jeder weiß, dass es – insbesondere in der Stochastik – für eine nachhaltige Entwicklung von Grundvorstellungen unerlässlich ist. Wunderbare Experimente sind sensorische Tests (Cola- oder Schokoladen-Tests mit geraspelten Schokoladensorten) oder Hörtests mit CD/MP3 Musik verschiedener Qualitätsstufen. Wer klebrige Finger oder den Gang in den Musikraum scheut, der findet mit dem im Artikel vorgestellten Bleistiftexperiment eine höchst lohnende Alternative, die praktisch keiner organisatorischen Vorbereitung bedarf. Sie zeigt, wie hilfreich Simulationen mit Kalkulationstabellen sind, wenn man fundamentale Vorstellungen beurteilender Statistik entstehen lassen möchte.

Mit Bleistiften „würfeln“

Wir beschriften die Seiten eines Bleistifts mit den „Augenzahlen“ 1 bis 6. Das Logo bekommt die 6, und wenn es dann mit 5, 4, 1, 2, 3 in einer Richtung weiter geht, haben die gegenüberliegenden Seiten die „Augensumme“ 7, wie bei einem richtigen Würfel. Nun kann man mit den Stiften „würfeln“, indem man sie über den Tisch rollen lässt.

Die Individualität der Stifte

Das Hypothesentesten ist bei normalen Spielwürfeln „langweilig“, denn niemand, der es bis in die Qualifikationsphase eines Gymnasiums geschafft hat, bezweifelt ernsthaft, dass die Sechs mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ kommt. Bei Bleistiften, die eine oft erheblich unterschätzte Individualität haben, sieht das anders aus, auch wenn man frisch verpackte Neuware aus

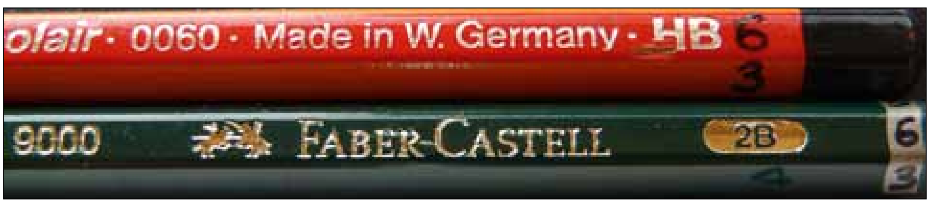


Abb. 1: Beschriftete „Bleistift-Würfel“

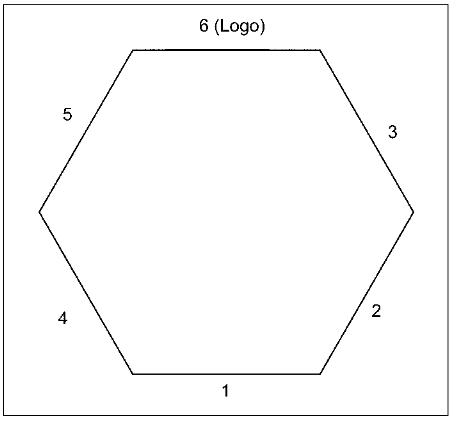


Abb. 2: Seiten-Nummerierung

Originalschachteln verwendet. Zwecks Wiedererkennung in verschiedenen Kursen bekommt jeder Bleistift einen Namen – oder wenigstens eine Nummer. Für spannende Qualitätsvergleiche empfiehlt es sich, für alle Schülerinnen und Schüler zwei Marken bereitzuhalten. Die Stifte heißen dann z. B. Johann – Faber; Johann – Herlitz; Andrea – Faber; Andrea – Herlitz. Bevor es ans Bleistiftwürfeln geht, werden Fragestellungen zusammengetragen; eine Erwartungshaltung wird aufgebaut.

Naheliegende Fragen

- Kommt bei meinem Stift die sechs mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$?
  Wie viele Sechser wären dann z. B. bei 120 Rollversuchen „normal“?
- Kann ich meinen Bleistift als „Laplace-Bleistift“ bezeichnen, bei dem alle Seiten mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ kommen?
- Gibt es unter den „Bleistiften höchster Qualität“ (Faber-Castell) mehr Laplace-Stifte als unter den preiswerteren („Herlitz“) oder den kurzen (kostenlosen) IKEA – Reklamestiften?

Abb. 3: Bleistifte höchster Qualität … ob sie besser sind als billige?

Erst simulieren und eine Erwartungshaltung aufbauen …

Es ist sehr lohnend und nach den unterrichtlichen Erfahrungen des Autors für die Entwicklung tragfähiger grundlegender Vorstellungen zur beurteilenden Statistik unerlässlich, dass man zunächst Entscheidungskriterien für die genannten Fragen auf intuitiver Grundlage im Kursverband aushandelt und durch Simulationen überprüft und absichert. Das wird im Folgenden erläutert:

H2 {=SUMME((B2:G2-20)^2/20)}

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		1	2	3	4	5	6	t
2	Marina	16	25	17	19	20	23	3,0
3	Jan	15	23	22	25	20	15	4,4
4	Ayshe	21	20	17	27	18	17	3,6
5	Sebi	17	23	25	16	16	23	4,2
6	Yassi	24	17	21	20	24	14	3,9
7	Alex	15	20	16	25	19	25	4,6
8	Tim	23	15	24	22	18	18	3,1
9	Sarah	15	26	26	17	19	17	5,8
10	Sven	19	19	18	21	20	23	0,8
11	Murat	19	20	15	25	17	24	3,8
12	Kaya	16	23	19	17	23	22	2,4
13	Heiko	19	19	17	20	19	26	2,4
14	Martina	21	11	14	30	28	16	14,9
15	Ulla	15	21	26	13	21	24	6,4
16	Dorit	17	32	25	19	16	11	13,8
17	Marko	18	18	22	20	25	17	2,3
18	Jessi	15	22	20	20	22	21	1,7
19	Maike	24	18	16	23	17	22	2,9
20	Dagmar	15	20	21	21	20	23	1,8
21	Thea	22	23	19	20	13	23	3,6

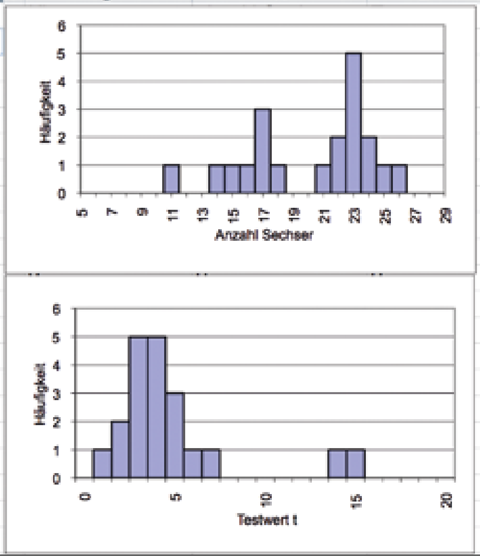


Abb. 4: Händische Simulation eines Laplace-Bleistiftes mithilfe normaler Spielwürfel

Man lässt alle Schülerinnen und Schüler je 120-mal mit einem normalen Spielwürfel würfeln und präsentiert die Häufigkeitsverteilungen auf einer gemeinsamen Folie oder an der Tafel. (Die Versuchszahl 120 sorgt für „glatte" Zahlen und garantiert, dass man das Experiment in einer Schulstunde mit Muße durchführen kann.) Noch effektiver ist es, die Ergebnisse der einzelnen Schülerinnen und Schüler in eine vorbereitete, an die Wand gebeamte Excel-Tabelle langsam diktieren und gleichzeitig ins Heft (!) eintragen zu lassen. (Vgl. *Abb. 4* und die Datei *bleistift-auswertungsvorlage.xls*, die Sie im Downloadmaterial zu diesem Heft finden. Die Bedeutung der Spalte t wird unten erläutert.) Durch das händische Aufschreiben und das damit einhergehende Vergleichen der einzelnen Ergebnisse entsteht nicht nur eine äußerst konzentrierte Arbeitsatmosphäre, sondern auch ein abgesichertes Gefühl dafür, wie sich ein echter Laplace-Bleistift statistisch verhalten müsste – und welche „Abweichungen vom Normalen" nicht vorkommen.

Wenn man $n = 120$-mal würfelt, dann erwartet man, dass jede der sechs Augenzahlen im Mittel (d.h. von Zufallsschwankungen abgesehen) 20-mal auftreten wird. Deswegen bezeichnet man 20 auch als den Erwartungswert. Die Abweichungen der tatsächlich gewürfelten Augenzahlen $n_1,\dots,n_6$ zum Erwartungswert 20 misst man durch die Abstandsquadrat-Summe

$$t = \frac{(n_1-20)^2}{20} + \frac{(n_2-20)^2}{20} + \dots \frac{(n_6-20)^2}{20} \quad (1)$$

Diese stets positive Testgröße t ist umso kleiner bzw. liegt umso näher bei der Null, je näher die Häufigkeiten bei einer Gleichverteilung liegen.

Die Idee, die Abweichungen zwischen Beobachtung und Erwartung durch das Quadrieren der Differenzen in den Zählern der Formel (1) zu „messen", wird von Schülerinnen und Schülern schnell formuliert. Auf den Gedanken, durch den Erwartungswert 20 zu teilen, kommt man erst, wenn man die Ergebnisse von Simulationen mit verschiedenen Versuchsumfängen etwa $n = 60$, 120, 240 miteinander vergleicht. Bei Verdoppelung des Versuchsumfanges verdoppeln sich im Mittel auch die Abstandsquadratsummen. Das kann man kompensieren, indem man durch den Erwartungswert teilt.

Anmerkung: t bezeichnet man als Chi-Quadrat-Testgröße. Sie hat die Dichte $f(t) = 0.133 \cdot t^{1.5} \cdot e^{-t/2}$.
Das bedeutet dass z.B gilt

$$P(t \le 11) = \int_0^{11} 0.133 \cdot t^{1.5} \cdot e^{-t/2}\,dt \approx 0.95.$$

Näheres dazu bei Riemer (1989).

Wie man in Excel den Testwert t elegant auch mit einer „Vektorformel" berechnen kann, entnimmt man der ersten Zeile von *Abb. 4*, die den Inhalt der Zelle H2 zeigt. Die geschweiften Klammern werden nicht per Hand eingegeben, sie entstehen nach Eingeben der Formel durch gleichzeitiges Drücken der Tasten Strg-Shift-Return anstelle des sonst üblichen Drückens der Return-Taste.

Die Simulationen geben – wie in *Abb. 4* für eine kleine Stichprobe angedeutet – einen ersten Eindruck davon, bis zu welcher Obergrenze dieser Testwert t „normalerweise" schwankt. Verlässlichere Ergebnisse liefern Computersimulationen, deren Ergebnisse für $n = 200$ Versuche mit je 120 Laplace-Bleistiften in *Abb. 5* veranschaulicht sind. Es zeigt sich, dass bei Laplace-Würfeln/Bleistiften gilt:

- Der Testwert t liegt mit ca. 95 % Wahrscheinlichkeit unter 11 und
- die Anzahl der Sechser liegt mit ca. 95%iger Sicherheit zwischen 12 und 28.

Die Ergebnisse, die außerhalb dieser Bereiche liegen, gelten als signifikant abweichend. Man hat dann Grund, an den oben genannten Hypothesen zu zweifeln.

Die Simulationsdatei *bleistift-simulation-ohne-makro-200.xls* bzw. *bleistift-simulation-mit-makro-1000.xls* finden Sie im Downloadpool zu diesem Heft, ihr Aufbau wird im abschließenden Abschnitt erläutert.

… dann experimentieren

NACH dem Diskutieren und Simulieren gehört die Stunde, in der die Bleistifte tatsächlich gerollt werden, zu den schönsten – und „emotional geladensten" – die man im Mathematikunterricht erleben kann. Ohne Unterlass werden (während des Rollens) neue Hypothesen generiert und sicher geglaubte verworfen. Jubeln und Fluchen, ungeduldiges Warten und überraschende Freude erfüllen den Raum: Beurteilende Statistik lebt. Einen Eindruck von den Ergebnissen vermittelt *Abb. 6*: Echte Laplace-Bleistifte sind aller Erwartung zum Trotz selten – Markenprodukte schneiden nicht besser ab als No-Name-Marken. Zur Protokollierung der Rollversuche empfiehlt sich die Auswertungsvorlage (*Kopiervorlage 1*). Wenn man parallel zur Strichliste jede Augenzahl auf den Karos notiert, entfällt die dauernde Kontrolle, ob die 120 schon voll sind.

Vertiefende Aufgaben

Wenn man (vor oder nach dem Bleistiftexperiment) gelernt hat, mit der Binomialverteilung und der Sigmaregel zu arbeiten, wenn man also über elementare Mittel aus der „Werkzeugkiste" der beurteilenden Statistik verfügt, bieten die Bleistifte ein schönes Übungsfeld für vertiefende Übungen zu sinnvollen Hypothesentests und zum Schätzen von Parametern (siehe Kopiervorlage 2).

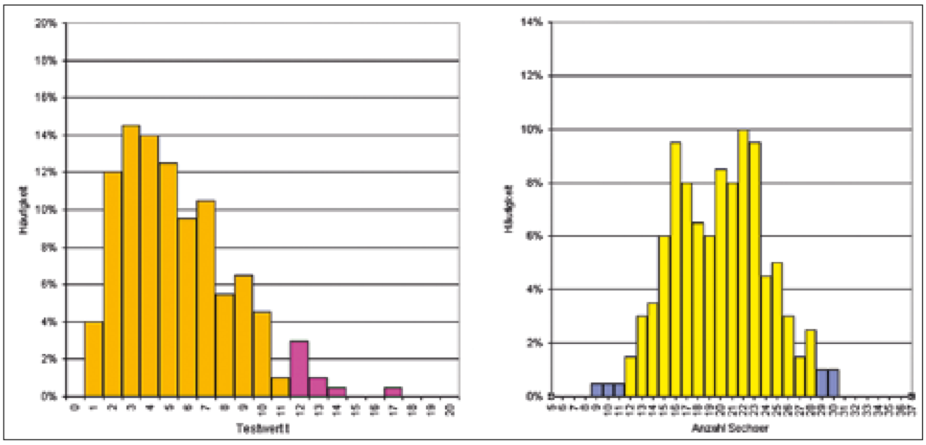


Abb. 5: Verteilung der Testwerte *t* (links) und Häufigkeitsverteilung der Sechser (rechts)

	Herlitz							Faber						
	1	2	3	4	5	6	t	1	2	3	4	5	6	t
Mario	18	17	17	25	22	21	2.60	37	42	15	9	12	5	60.4
Frauke	20	30	20	20	12	18	8.40	23	20	18	21	15	23	2.4
Julia	21	20	27	12	25	15	8.20	12	23	18	11	30	26	14.7
Michael	18	29	31	6	3	33	43.00	31	4	4	26	33	22	42.1
Henning	16	31	22	23	15	13	11.00	22	21	29	13	12	23	10.4
Daniel	18	32	39	11	13	7	40,40	16	18	22	27	17	20	4.1
Jaquline	10	22	20	22	20	26	7.20	10	24	26	12	24	24	12.4
Wolfgang	6	13	23	27	24	27	18.40	20	17	22	24	20	17	1.9
Simone	21	13	26	25	23	12	9.20	33	19	12	21	22	13	14.4
Simome	23	38	7	27	20	5	38.80	4	13	28	16	29	30	28.3
Nils	44	33	11	18	0	14	63.30	13	17	0	51	29	10	80

Abb. 6: Versuchsergebnisse für 11 Bleistiftpaare – signifikante Abweichungen sind unterlegt

Aufbau der Simulationsdatei

Abschließend wird der Aufbau der Excel-Datei, mit der in den *Abb. 7a* und *7b* das 120-malige Rollen von Laplace-Bleistiften simuliert wurde, erläutert. Die Simulationsdatei befindet sich im Downloadpool zu diesem Heft.

B3 *fx* {=HÄUFIGKEIT(B10:B129;$A3:$A8)}

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
2																	
3	1	20	22	12	15	19	27	24	20	20	24	21	15	14	24	23	19
4	2	27	14	19	24	21	18	20	19	16	14	18	13	14	26	20	21
5	3	15	20	29	19	20	17	20	23	17	24	23	16	25	12	18	21
6	4	15	19	23	19	13	27	23	19	21	15	16	26	29	19	18	21
7	5	20	16	23	26	18	14	16	20	19	18	17	24	15	20	18	17
8	6	22	29	14	17	28	17	17	19	27	25	25	26	23	19	23	21
9																	
10	1	2	3	6	5	4	2	3	5	1	2	4	1	2	1	6	6
11	2	2	5	2	6	6	3	5	2	6	3	6	6	1	1	5	5
12	3	1	4	5	6	3	4	6	3	3	1	2	3	1	5	2	1
13	4	2	6	3	5	5	2	3	5	3	5	3	3	5	1	3	2
126	117	1	1	3	2	6	2	6	2	4	6	3	3	6	4	1	6
127	118	1	4	6	5	5	3	1	1	6	4	2	3	5	5	4	2
128	119	2	3	5	4	1	1	6	6	3	4	6	4	4	3	3	2
129	120	5	6	6	4	4	5	3	3	5	3	2	1	1	4	2	5

daten | verteilungen

Abb. 7a: Datenblatt „daten“

B4 *fx* {=MTRANS(daten!B3:GS8)}

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1											[12;28]	[0;11]
2		Augenzahlen									97%	96%
3		1	2	3	4	5	6	t		bis	6er	t
4	1	20	27	15	15	20	22	5.15		0	0.0%	0%
5	2	22	14	20	19	16	29	6.90		1	0.0%	2%
6	3	12	19	29	23	23	14	10.00		2	0.0%	13%
7	4	15	24	19	19	26	17	4.40		3	0.0%	14%
8	5	19	21	20	13	18	29	6.80		4	0.0%	14%
9	6	27	18	17	27	14	17	7.80		5	0.0%	11%
10	7	24	20	20	23	16	17	2.50		6	0.0%	10%
11	8	20	19	23	19	20	19	0.60		7	0.0%	10%
12	9	20	16	17	21	19	27	3.80		8	0.0%	9%
13	10	24	14	24	15	18	25	6.10		9	0.0%	4%
14	11	21	18	23	16	17	25	3.20		10	0.0%	8%
15	12	15	13	16	26	24	26	8.90		11	0.0%	3%

daten | verteilungen

Abb. 7b: Datenblatt „verteilungen“

Das Tabellenblatt „daten“

a) in den 120 Zellen B10 bis B129 des Blattes „daten“ steht der Befehl =ZUFALLSBEREICH(1:6), der gleich verteilte ganze Zufallszahlen zwischen 1 und 6 liefert, also jeweils das Ergebnis eines Laplace-Bleistift-Rollversuches darstellt. Damit der Befehl ZUFALLSBEREICH zur Verfügung steht, muss man unter Add-Ins die Analyse-Funktion einschalten. Wenn man das nicht möchte, verwendet man stattdessen =GANZZAHL(6*ZUFALLSZAHL()) +1

b) Im Bereich B3:B8 steht der Vektorbefehl {=HÄUFIGKEIT(B10:B129; $A3:$A8)}. Er liefert die absolute Häufigkeitsverteilung der Augenzahlen 1, 2, …, 6 der 120 darunter stehenden Augenzahlen. Dazu markiert man den Bereich B3:B8, gibt den obigen Befehl ohne die geschweiften Klammern ein und schließt die Eingabe durch gleichzeitiges Drücken der Tasten Strg-Shift-Return ab. Das erzeugt die geschweiften Klammern.

c) Wenn man dann den Bereich B2:B129 in die 200 rechts daneben sehenden Spalten (bis in Spalte GS) kopiert, stehen in Bereich B3:GS8 spaltenweise die Augensummen-Verteilungen von 200 Laplace-Bleistiften.

Anmerkungen:

- Der Befehl Häufigkeit muss als Spaltenvektor (er kann nicht als Zeilenvektor) eingegeben werden;
- Excel kann nur Blätter mit bis zu 255 Spalten verarbeiten. Wenn man nach obigem Schema mehr Stifte gleichzeitig simulieren möchte, muss man die Daten

auf verschiedene Tabellenblätter verteilen.

Das Tabellenblatt „verteilungen“

a) Man übernimmt die 200 Häufigkeitsverteilungsspalten des Blattes „daten“ als Zeilen in das Blatt „verteilungen“. Dazu markiert man im Blatt „verteilungen“ den Bereich *B4:G203* und trägt dort den Vektorbefehl {=MTRANS(daten!B3:GS8]} ein, den man wieder mit Ctrl-Shift-Return abschließt. Das Transponieren durch den Befehl MTRANS ist erforderlich, weil das Auszählen der Testwerte wieder spaltenweise erfolgt.

b) in Spalte H wird zu jeder dieser 200 Häufigkeitsverteilungen der Testwert *t* berechnet, indem man z. B. den in Zelle H4 stehenden Vektorbefehl {=SUMME ((B4:G4-20)^2/20)} nach unten kopiert. Dann wird die relative Häufigkeitsverteilung dieser Testwerte im Bereich L4:L54 bestimmt. Man zählt dazu die 200 Testwerte mit dem Vektorbefehl {=HÄUFIGKEIT(H4:H203;J4:J54)/200} aus. Der Bereich J4:J54 enthält dabei die rechten Klassengrenzen, die hier ganzzahlig sind und von 0 bis 50 reichen. Größere Testwerte als 50 sind nicht zu erwarten.

Analog wird im Bereich *K4:K54* mit dem Befehl {=HÄUFIGKEIT(G4:G1004;J4:J54)/200} die relative Häufigkeitsverteilung der Sechser in den 200 Simulationen bestimmt. Durch Summieren in Zelle K2 und L2 erkennt man, dass die Anzahl der erhaltenen Sechser in 97 % der 200 Versuche zwischen 12 und 28 lag – und dass der Testwert *t* bei den 200 Simulationen in 96 % aller Fälle nicht größer war als 11. Wenn man diese Verteilungen als Säulendigramme visualisiert, entstehen Grafiken wie in *Abb. 5*.

Für Fortgeschrittene: Makros selber programmieren

Im folgenden Abschnitt erfährt man an einem Beispiel, wie man eine komplette Häufigkeitsverteilung zu beliebig hohem, vorgegebenem Stichprobenumfang und beliebiger Wahrscheinlichkeitsverteilung mithilfe eines benutzerdefinierten Vektorbefehls =Häufigkeitsverteilung(n;p1;p2;… p6) erhalten kann. Das Blatt „daten“ wird dadurch überflüssig. Wie man dieses Makro benutzt, ist in der ersten Zeile von *Abb. 8* zu sehen, wie es programmiert wurde, zeigt für den mit Visual Basic ein wenig vertrauten Leser die kommentierte *Abb. 9*.

B4 fx {=Häufigkeitsverteilung(A3;B$3;C$3;D$3;E$3;F$3;G$3)}

	A	B	C	D	E	F	G
1	Die gelb unterlegten Zellen können verändert werden						
2		1	2	3	4	5	6
3	120	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6
4	1	16	19	24	16	23	22
5	2	21	19	25	23	16	16
6	3	15	20	19	16	31	19
7	4	16	27	14	20	20	23

Abb. 8: Anwendung des Makros Häufigkeitsverteilung

```
Function Häufigkeitsverteilung(ParamArray liste())
, liefert eine komplette Häufigkeitsverteilung
, erster Parameter: Versuchszahl
, übrige Parameter: Wahrscheinlichkeiten (maximal 50)
Application.Volatile True
, damit findet nach Drücken von F9 eine Neuberechnung statt
Dim p(51), h(1 To 50)
d = 0
For Each x In liste
  p(d) = liste(d)
  d = d + 1
Next x
, die in der Parameterliste übergebene Versuchszahl
, und die Wahrscheinlichkeiten werden auf dem Vektor p gespeichert
n = p(0)
p(0) = 0
For i = 1 To d
  p(i) = p(i) + p(i - 1)
Next i
, auf dem Vektor p wird die kumulierte Verteilung
  gespeichert
p(d) = 1
For j = 1 To n
  z = Rnd()
  erg = 0
  For i = 1 To d - 1
    If (p(i - 1) < z) And z <= p(i) Then
      erg = i
    End If
  Next i
  h(erg) = h(erg) + 1
, es wird auf z eine Zufallszahl zwischen 0 und 1 erzeugt und je nach
  deren Größe
, ein Feld der durch die Wahrscheinlichkeiten gesteuerten Häufigkeits
  verteilung h erhöht.
Next j
Häufigkeitsverteilung = h()
, die Häufigkeitsverteilung wird als Ergebnis der Vektorfunktion
  zurückgegeben und in das Kalkulationsblatt eingetragen.
End Function
```

Abb. 9: Makro zur Vektorfunktion Häufigkeitsverteilung

Hinweis:

Dieser Artikel wurde zeitgleich für den Titel Kaenders & Schmidt (2011) speziell für GeoGebra entwickelt.

Literatur

Riemer, Wolfgang / Petzold, Werner.: Geschmackstests – Spannende und verbindende Experimente. mathematik lehren Sammelband Wege in die Stochastik (2008) und 85 (1997)

Riemer, Wolfgang (1994): Schmeckt Linde-Schokolade besser als Alpia? Sensorische Experimente im Mathematikunterricht. mathematik lehren 62

Riemer, Wolfgang (2009): Soundcheck: CD contra MP3 Ein Hörtest als Einstieg in die Stochastik. mathematik lehren 153

Riemer, Wolfgang (1989): Der Chi-Quadrat-Anpassungstest: MNU 42/6, S. 344–352

Dieser Artikel wurde auf GeoGebra zugeschnitten veröffentlicht in: Kaenders, Rainer / Schmidt, Reinhardt (2011) (Hrsg.): Mehr Mathematik verstehen mit GeoGebra. Vieweg+Teubner-Verlag | Springer Fachmedien, Wiesbaden

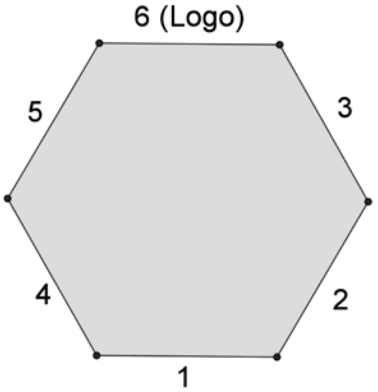
Verfasser:

Dr. Wolfgang Riemer
Studienseminar (ZfsL) Köln
August-Bebel-Str. 80
50259 Pulheim
w.riemer@arcor.de
www.wiemer-koeln.de

Auswertungsvorlage Bleistiftwürfeln

Rollen Sie den Bleistift 120-mal mit ein wenig Schwung über Ihren Holztisch. Notieren Sie die „gewürfelten“ Augenzahlen in den Gitterkaros. Zählen Sie danach aus, wie oft die einzelnen Augenzahlen gewürfelt wurden und notieren Sie die Häufigkeiten an den entsprechenden Bleistiftseiten der Abbildung. (Sie können Strichlisten parallel zum Ausfüllen der Karos auch an den zugehörigen Kanten der Grafik führen, es muss als Summe 120 herauskommen).

Bleistiftnummer/Name

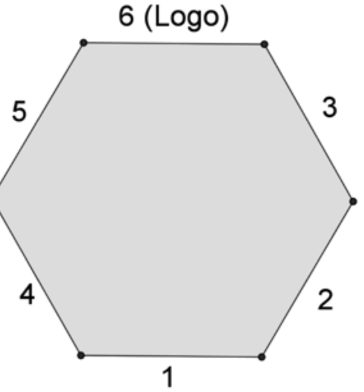


billige Marke

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										
11										
12										

$$t = \frac{1}{20} \cdot \left[(\_\_\_ - 20)^2 + (\_\_\_ - 20)^2 + (\_\_\_ - 20)^2 + (\_\_\_ - 20)^2 + (\_\_\_ - 20)^2 + (\_\_\_ - 20)^2\right] = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

Bleistiftnummer/Name



teure Marke

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										
11										
12										

$$t = \frac{1}{20} \cdot \left[(\_\_\_ - 20)^2 + (\_\_\_ - 20)^2 + (\_\_\_ - 20)^2 + (\_\_\_ - 20)^2 + (\_\_\_ - 20)^2 + (\_\_\_ - 20)^2\right] = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

Die Anzahl der Sechser liegt näher bei 20

bei dem teuren Stift +

bei dem billigen Stift –

Der Testwert *t* ist kleiner

bei dem teuren Stift +

bei dem billigen Stift –

PM / Thema: TABELLENKALKULATION – EINSTEIGEN BITTE! // Heft 43 / 54. Jahrgang / 2012

Beurteilende Statistik – Aufgaben zum Bleistiftwürfeln

Zweiseitiges Testen

- Kommt die Sechs bei meinem Stift mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$?
  ($H_0 : p = \frac{1}{6}$ gegen $H_1 : p \neq \frac{1}{6}$)
- Kommen Sechs und gegenüberliegende Eins zusammen mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$?
  (Was einer Seite möglicherweise fehlt, kommt der Gegenseite zugute.)
  ($H_0 : p = \frac{1}{3}$ gegen $H_1 : p \neq \frac{1}{3}$)
- Kann ich meinen Bleistift so in zwei Seiten zerlegen, dass Ober- und Unterseite mit gleicher Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ kommen? (z. B. Oberseite: 1–4–5, Unterseite 2–3–6)
  ($H_0 : p = \frac{1}{2}$ gegen $H_1 : p \neq \frac{1}{2}$)

Einseitiges Testen

- Eine Grundschule sammelt Bleistifte, bei denen die Sechs häufig (die Eins selten) kommt.
  ($H_0 : p = \frac{1}{6}$ gegen $H_1 : p > \frac{1}{6}$ oder $H_1 : p < \frac{1}{6}$)

Fehlerwahrscheinlichkeiten

- Eine Grundschule nimmt Bleistifte in Zahlung, bei denen die Sechs mindestens mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ kommt. Entscheidungsregel: Bei 120 Versuchen mindestens 40-mal die Sechs. Formulieren Sie zwei Alternativ-Hypothesen und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Fehler erster und zweiter Art.

- Eine Grundschule nimmt Bleistifte in Zahlung, bei denen die Eins höchstens mit der Wahrscheinlichkeit 5% kommt. Formulieren Sie zwei Alternativhypothesen, eine sinnvolle Entscheidungsregel und plotten Sie die zugehörige Operationscharakteristik des Tests.

Schätzen

- Schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit der Sechs durch ein 80%-, 95%-, 99%-Konfidenzintervall

Anpassungstest $t = \frac{(n_1 - 20)^2}{20} + \frac{(n_2 - 20)^2}{20} + \ldots + \frac{(n_6 - 20)^2}{20}$

- Testen Sie, ob Sie einen Laplace-Bleistift erwischt haben, bei dem ALLE Seiten mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ kommen.

- Sie brauchen einen Laplace-Bleistift. Der Anpassungstest hat die Hypothese einer Gleichverteilung nicht zurückgewiesen (so sagen die Angloamerikaneer treffend!)
  a) bei Jan für n = 120 auf dem 5%-Niveau.
  b) bei Bianca für n = 1200 auf dem 4%-Niveau.
  c) bei David für n = 120 auf dem 1%-Niveau.
  d) bei Simone für n = 1200 auf dem 1%-Niveau.
  Welchen der vier Bleistifte kaufen Sie?

Vorzeichentest

- Sie haben mit einen teurem und mit einem billigen Bleistift je 120-mal gewürfelt. Wenn die Häufigkeiten des hochwertigen Bleistifts näher an der Gleichverteilung liegen (kleinerer Testwert t) als diejenigen des minderwertigen Stiftes, geben Sie ein „+“, sonst ein „–“
  Zählen Sie in Ihrem Kurs die „+“ Ergebnisse und prüfen Sie die Hypothese, ob $p(+) = 0.5$ zurückgewiesen werden muss. Testen Sie einseitig oder zweiseitig?