

Wolfgang RIEMER, Köln

## Beurteilende Statistik ohne gute Probleme ist wie Schwimmen ohne Wasser

Kaum ein Schüler, der im Abitur Aufgaben zur beurteilenden Statistik löst, hat je einen Test mit authentischen selbst erhobenen Daten durchgeführt, um eine ihn „persönlich betreffende“ Fragestellung zu beantworten. Der „normale“ Stochastik-Unterricht läuft nach einem Muster ab, das sich durch Aufgabenstellungen folgender Art gut charakterisieren lässt:

*Es wird behauptet, ein Würfel sei gezinkt, die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Zahlen seien unterschiedlich, also nicht jeweils  $\frac{1}{6}$ .*

Um diese Vermutung zu überprüfen, könnte man den Würfel sehr oft (2000mal) werfen. Damit ließe sich eine Entscheidung über die relativen Häufigkeiten fällen. Solch ein Verfahren ist jedoch sehr aufwendig und die ermittelte relative Häufigkeit trotz großem Stichprobenumfang auch nur ein Näherungswert. Gesucht ist ein rechnerisches Verfahren, das auf kürzerem Weg (also beispielsweise 50mal würfeln) eine Entscheidungshilfe gibt, ob der Würfel ideal ist oder nicht. Ein solches Verfahren nennt man Testen von Hypothesen.

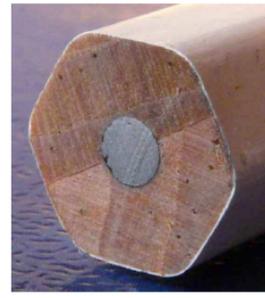
[http://lehrerfortbildung-bw.de/faecher/mathematik/gym/fb2/modul4/4\\_unterricht/](http://lehrerfortbildung-bw.de/faecher/mathematik/gym/fb2/modul4/4_unterricht/) (1.3.2013)

Probleme werden nicht ernst genommen. Sie dienen als Vehikel, um „rechnerische Verfahren“ einzuführen, deren Anwendung sich in zentralen Prüfungen abtesten lässt. Und dabei ist es gerade in der Statistik einfach, Authentizität herzustellen: Nehmen Sie statt des fiktiven gezinkten Würfels einen realen Bleistift, dessen Seiten nummeriert werden und lassen Sie jeden Ihrer Schüler 120-mal würfeln. Man hört Jubeln und Fluchen: Statistik lebt! Wer keinen fairen Stift erwischt hat, ändert die Rollrichtung und untersucht, ob sich etwas ändert. Tatsächlich gibt es viel weniger faire Bleistifte als man glaubt. Man beachte die zentrale Bedeutung der Simulationen, mit denen man auslotet, wie sich Testgrößen bei Gültigkeit der Hypothesen verhalten.

Eines der schönsten authentischen Experimente mit überraschendem Ergebnis ist der „Red Bull-Test“ (vgl. Literatur), in dem in einer Doppelstunde nur mit dem Vorzeichentest die Wirkung von Energiebräusen auf die Reaktionsfähigkeit untersucht wird.

Ein oder zwei solcher Experimente sind wie Leuchttürme im Kursverlauf der beurteilenden Statistik, die Sinn stiften und an die man sich auch lange nach dem Abitur mit Vergnügen erinnert. Probieren Sie es aus!

## Würfeln mit Bleistiften: Durch Simulation Hypothesen über die Wirklichkeit bewerten



Bleistiftwürfel: Die Leimung verschiedener Hölzer könnte die Symmetrie beeinflussen

Wenn sie die Seiten IHRES Bleistiftes mit den Augenzahlen 1, 2, ..., 6 beschriften und diesen Stift über den Tisch rollen lassen, haben sie einen „Bleistiftwürfel“. Ist er fair, d. h.: **Werden alle Seiten IHRES Bleistifts mit der Wahrscheinlichkeit 1/6 „gewürfelt“?** Sie werden vermutlich sagen: „Klar, doch, symmetrischer als ein Sechskant-Bleistift kann man doch gar nicht sein“. Aber gar nicht so selten erlebt man ein „blaues Wunder...“

1 Rollen sie ihren Bleistift 120-mal. Zählen sie, wie oft die einzelnen Seiten auftraten.

Können sie obige Frage für ihren Bleistift schon intuitiv beantworten?

2 Bei einem fairen Bleistift erwartet man jede Seite ca. 20-mal. Messen Sie die Abweichungen von der

Gleichverteilung durch Berechnung des Testwertes  $t = \frac{(n_1 - 20)^2}{20} + \frac{(n_2 - 20)^2}{20} + \dots + \frac{(n_6 - 20)^2}{20}$

wie in Fig. 2, wobei  $n_1, n_2, \dots, n_6$  die Häufigkeiten der sechs Seiten bezeichnen.

- Begründen sie: Je kleiner der Testwert, desto fairer der Stift!

- Berechnen sie den Testwert für ihren eigenen Versuch.

- Entscheiden sie gefühlsmäßig durch Diskussion in einer Kleingruppe / im Plenum, ab welchem Testwert man die die Annahme, es handle sich um einen fairen Stift, fallen lassen sollte.

3 Sichern sie Ihr Kriterium ab, indem Sie das Experiment mit einem normalen Spielwürfel (statt eines Bleistiftes) durchführen, alle Ergebnisse zusammentragen und dadurch erforschen, welche Testwerte **bei fairen Würfeln** selten (mit höchstens ca. 5% Wahrscheinlichkeit) auftreten.

i	1	2	3	4	5	6	Summe	Testwert
n(i)	15	23	21	23	20	18	120	Jan
(n(i)-20)²	25	9	1	9	0	4	48	2.4
n(i)	16	34	23	14	8	25	120	Lucia
(n(i)-20)²	16	196	9	36	144	25	426	21.3

Fig. 1: Jan ist zufrieden, Lucia zweifelt...

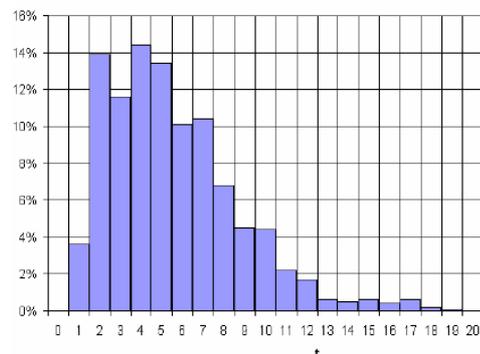


Fig. 2 Verteilung von t bei fairen Würfeln

4 Nutzen sie zusätzlich eine Tabellenkalkulation, um über den Befehl =Zufallsbereich(1;6) die Verteilung der Testwerte t bei fairen Würfeln zu studieren und das Ergebnis aus 3 zu prüfen.

5 Überprüfen sie folgende Vermutung: Wenn man mit einem fairen Würfel statt 120 nur 60mal würfelt und bei der Berechnung des Testwertes in Zähler und Nenner 20 durch 10 ersetzt, ändert sich die Verteilung der Testwerte nicht.

6 Wenn bei ihrem Bleistift einzelne Seiten zu häufig/zu selten auftreten, wiederholen sie den Versuch mit geänderter Rollrichtung. Studieren sie, ob sich dadurch die Wahrscheinlichkeiten ändern.

## Literatur

Riemer, Wolfgang (2012): Mit Bleistiften würfeln. Beurteilende Statistik zwischen Realität und Simulation. PM 43, 30-35.

Riemer, Wolfgang (2012): Statistik mit Red Bull. mathematiklehren 175, 54-59.

Bleistiftwürfel im Klassensatz bestellt man unter [www.riemer-koeln.de](http://www.riemer-koeln.de) . Hier finden sich viele Manuskripte zu weiteren höchst spannenden Stochstik-Experimenten.