MATHE-Treff

# Mathe-Treff: Mathe-Regional Nr. 2/95
# Warten auf die erste Drei beim Riemer-Quader

**von Dr. Jürgen von den Steinen, Gymnasium Schwertstraße Solingen**

---

Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen werden eingeführt, um den Zufall außer acht lassen zu können. Aus demselben Grund bildet man den Begriff Erwartungswert einer Zufallsgröße als Verallgemeinerung des arithmetischen Mittels.

Sind die Zahlen $x_1$ ,..., $x_n$ die Werte einer Zufallsgröße, die mit den Wahrscheinlichkeiten $p_1$ ,..., $p_n$ auftreten, so definiert man die Zahl $x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \ldots + x_n \cdot p_n$ als Erwartungswert der Zufallsgröße. Dabei stört es in SI nicht, wenn die Zufallsgröße auch abzählbar unendlich viele Werte annimmt. Die Voraussetzung der Konvergenz von $x_1 \cdot p_1 + \ldots + x_n \cdot p_n + \ldots$ wird man nicht gross präzisieren.

Beispiel 1: Die durchschnittlich geworfene Augenzahl beim Laplace-Würfel beträgt $1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + \ldots + 6 \cdot \frac{1}{6} = (1+2+\ldots+6) \cdot \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = 3{,}5$. Der Erwartungswert der Zufallsgröße "Augenzahl beim Laplace-Würfel" hat den Wert 3,5.

Beispiel 2: Die durchschnittliche Augenzahl beim Riemer-Quader ist ebenfalls 3,5, sofern die Quaderflächen so numeriert werden, dass die Augensumme auf gegenüberliegenden Flächen 7 beträgt. Dann gilt $p_1 = p_6$, $p_2 = p_5$, $p_3 = p_4$. Der Beweis der Beh. ist eine schöne Anwendung des Distributiv-Gesetzes: $1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + \ldots + 6 \cdot p_6 =$
$(1+6) \cdot p_1 + (2+5) \cdot p_2 + (3+4) \cdot p_3 = 7 \cdot p_1 + 7 \cdot p_2 + 7 \cdot p_3 = 7 \cdot (p_1+p_2+p_3) =$
$7 \cdot 0{,}5 = 3{,}5$; denn wegen $p_1 + \ldots + p_6 = 1$ hat $p_1 + p_2 + p_3$ nach Vor. den Wert 0,5.

Tritt beim Riemer-Quader die Drei mit der Wahrscheinlichkeit $p_3$ auf, so beträgt die mittlere Wurfzahl (= mittlere Kettenlänge) bis zum Auftreten der ersten Drei im Durchschnitt $\frac{1}{p_3}$ Würfe. Das bedeutet, die Zufallsgröße "Anzahl der Würfe bis zur ersten Drei" hat den Erwartungswert $\frac{1}{p_3}$.

Der entsprechende Unterrichtsverlauf soll nun geschildert werden.
Ich hatte zu Hause einen Lego-Stein 100-mal geworfen. Aus dem ausgeteilten Wurfprotokoll sollen die Schüler über eine Strichliste für die Kettenlänge die durchschnittliche Kettenlänge bestimmen. (Kette ist Abkürzung für eine Zahlenfolge, die nur am Ende eine Drei hat.) Tip an die Schüler: Orientiert

euch daran, wie ihr die Durchschnittsnote einer Klassenarbeit ausrechnet.

Die richtige Schülerlösung sieht wie folgt aus:

41144555443/63/3/2443/42
23/53/24453/4444623/3/654
14443/523/3/243/455463/43/
13/453/53/3/242443/13/5444
43/253/3/454425241243/3/3

| Kettenlänge | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Anzahl der Ketten | 7 | 6 | 4 | 2 | 1 | 3 | 1 | 1 | – | – | 1 | 1 |

durchschnittliche Kettenlänge
$= (7 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + 1 \cdot 7 + 1 \cdot 8 + 1 \cdot 11 + 1 \cdot 12) : 27$
$= \frac{100}{27} \approx 3{,}7$

Einige Schüler hatten sich verzählt oder verrechnet. Der Wert der Klammer war bei ihnen nicht genau 100. Das kann nicht sein; denn 100 Würfe sind in Ketten aufgespaltet worden. Der Nenner 27 ist die Anzahl der geworfenen Dreien. Also muß gelten:

$$Durchschnittliche\ Kettenlänge = \frac{Anzahl\ aller\ Würfe}{Anzahl\ aller\ Dreien}$$

$$= \frac{1}{relative\ Häufigkeit\ für\ eine\ Drei}$$

Bei sehr vielen Würfen unterscheidet sich die relative Häufigkeit für eine Drei nicht von der Wahrscheinlichkeit $p_3$, die durchschnittliche Kettenlänge nicht vom Erwartungswert der Zufallsgröße "Anzahl der Würfe bis zur ersten Drei". Damit ist die Behauptung bewiesen.

Im Unterricht war zuvor die Formel $Q_k = (1-p_3)^{k-1} \cdot p_3$ für die Wahrscheinlichkeit der Kette der Länge k hergeleitet worden.

Daraus folgt: Die unendlich lange Summe $1 \cdot p_3 + 2 \cdot (1-p_3) \cdot p_3 + 3 \cdot (1-p_3)^2 \cdot p_3 + \ldots$ hat den Wert $\frac{1}{p_3}$.

Für Schüler, die den Gebrauch des Taschenrechners noch trainieren müssen, ist es eine gute Übung, für verschiedene Werte von $p_3$ Nährungssummen dieser unendlich langen Summe auszurechnen und mit $\frac{1}{p_3}$ zu vergleichen.

Die Begründung der Pfadregel fußt auf der Tatsache, daß man bei der

Einzelwahrscheinlichkeit p für einen Treffer bei N Versuchen mit ungefähr N · p Treffer rechnet, wobei genau N · p Treffer unwahrscheinlich sind.

Wir können auf einfache Weise N · p Treffer als Erwartungswert der Binomialverteilung einsehen. Dabei braucht die Formel für die Wahrscheinlichkeit von i Treffern unter N Versuchen nicht bekannt zu sein. Vielmehr orientiert sich die Begründung an der Herleitung für die durchschnittliche Kettenlänge beim Warten auf die ersten Drei.

Ein Experiment bestehe aus N Einzelversuchen. Es seien n (sehr groß) Experimente gemacht. $H_i$ bezeichne die Anzahl der Experimente, bei denen genau i Treffer auftreten.

$0 \cdot H_0 + 1 \cdot H_1 + 2 \cdot H_2 + ... + (N-1) \cdot H_{n-1} + N \cdot H_n$ ist die Anzahl aller Treffer unter N · n Einzelversuchen. Daher ist

$$\frac{0 \cdot H_0 + 1 \cdot H_1 + 2 \cdot H_2 + \ldots + (N-1) \cdot H_{n\text{-}1} + N \cdot H_n}{N \cdot n} \approx p$$

Indem wir mit N multiplizieren und die linke Seite in eine Summe von Brüchen umschreiben, ergibt sich

$$0 \cdot \frac{H_0}{n} + 1 \cdot \frac{H_1}{n} + 2 \cdot \frac{H_2}{n} + \ldots + N \cdot \frac{H_N}{n} \approx N \cdot p$$

$\frac{H_i}{n}$ ist die relative Häufigkeit für i Treffer in einem Experiment. Da n sehr groß, ist

$\frac{H_i}{n} \approx Q_i$ = Wahrscheinlichkeit für i Treffer bei einem Experiment aus N Einzelversuchen. Damit wird die obige Gleichung zu $0 \cdot Q_0 + 1 \cdot Q_1 + 2 \cdot Q_2 + ... + N \cdot Q_N = N \cdot p$. Auf der linken Seite steht laut Definition der Erwartungswert für die Trefferzahl in einer Serie von N Versuchen.

Literatur: Einführung in die Stochastik, Jahrgangsstufe 7 - 8, Handreichung zur Umsetzung des neuen Lehrplans Mathematik für SI; Unterregionalisierte Lehrerfortbildung im Reg.- Bezirk Köln und Düsseldorf

(Anmerkung der Redaktion: Der Artikel wurde in den mathematischen Formeln überarbeitet, so daß hier für das WWW ansehnliche Ergebnisse entstanden sind. Außerdem wurde die Rechtschreibung den neuen Regeln angepasst).