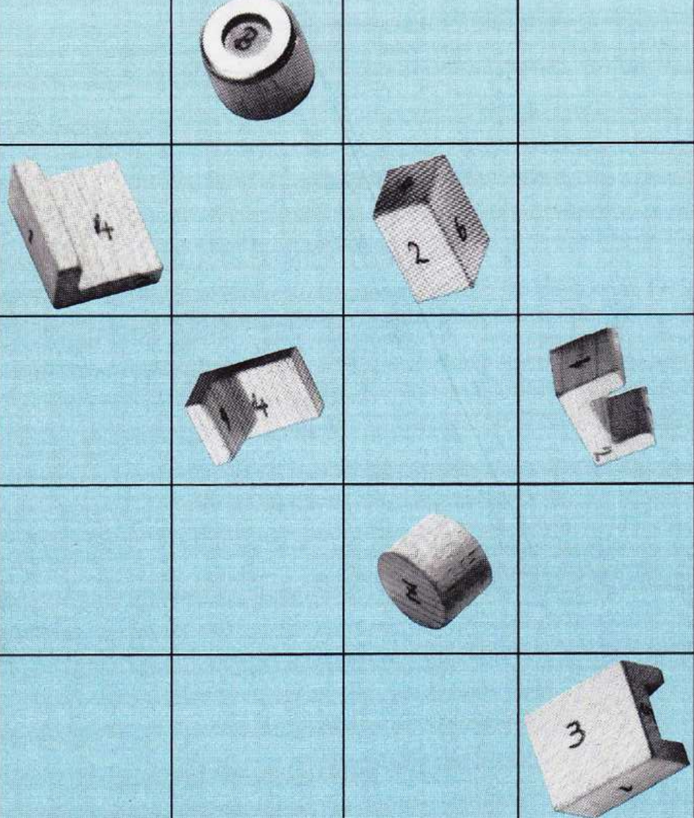
RIEMER WÜRFEL



Ernst Klett
Verlag

RIEMER-WÜRFEL

Spannende und lehrreiche Experimente
mit ungewöhnlichen Objekten –
einzusetzen im Unterricht über
Wahrscheinlichkeit und Statistik
von Klasse 5 bis 13

entwickelt von
Dr. Wolfgang Riemer
Köln

Ernst Klett Verlag

Der Titel: RIEMER-WÜRFEL, Klett-Nr.: 709930 besteht aus:

15 x 7 Würfeln
2 Begleitdisketten (je eine für CPM und MS-DOS-Rechner)
1 Begleitheft

Beilage zu Nr. 709930

INHALT

VORWORT

Können Computer hellsehen - und andere interessante Fragen

1. Frage:
Beschriften Sie einige Würfel gemäß der Anleitung auf Seite 7. Legen Sie beiliegende Diskette in Ihren Computer (IBM-PC mit Betriebssystem MS-DOS oder Apple II mit CP/M Betriebssystem) ein und starten Sie das Programm BAYS/NLS (Anmerkungen dazu in 3.5). Bitten Sie dann Ihren Partner, zwischen einem normalen Würfel, dem kurzen L "Würfel" und dem Spat "Würfel" auszuwählen. Lassen Sie Ihren Partner mit dem gewählten Objekt würfeln und tippen Sie die gewürfelten Zahlen in den Computer ein. Sie werden staunen, wie schnell Ihr Computer herausgefunden hat, welchen "Würfel" Ihr Partner benutzt... Wie macht er das? Kann er hellsehen?
Eine Antwort finden Sie in 3.2.

2. Frage:
Ein "Würfel" liegt um so stabiler, je größer die Grundfläche (F) ist und je niedriger (h) sein Schwerpunkt liegt. Ist die Wahrscheinlichkeit P einer Lage proportional zur Grundfläche ($P \sim F$), zum Kehrwert der Schwerpunkthöhe ($P \sim 1/h$), zum Produkt aus beiden Größen ($P \sim F/h$) oder...?

3. Frage:
Hängt die Wahrscheinlichkeit der "Würfel" von Wurftechnik und Unterlage ab?

Die letzten beiden Fragen werden in 4.2 und 4.3 untersucht.

Wenn Sie in diesem Leitfaden weiterlesen, werden Sie erkennen: die Experimente, die man mit den Würfeln anstellen kann, sind z. T. begrifflich recht anspruchsvoll. Sie gehen über bloßes Auszählen von Häufigkeiten weit hinaus. Richtig eingesetzt werden die Würfel den gesamten Stochastikunterricht von Klasse 5 bis 13 um faszinierende Beispiele, um Hypothesen und Erkenntnisse bereichern.

Ihren Schülern und Ihnen wünsche ich viel Spaß beim Experimentieren

Köln, im November 1987 Wolfgang Riemer

1. Zur Einführung

Guter Stochastikunterricht braucht "reale" Experimente. Nur mit computer-simulierten Versuchen sollte man sich nicht zufrieden geben.
Die klassischen Zufallsobjekte wie Würfel, Münze und Reißzwecke haben daher einen festen Platz im Stochastikunterricht. Allerdings werden sie hauptsächlich benutzt, um relative Häufigkeiten zu bestimmen und deren Stabilisierung in langen Versuchsreihen zu demonstrieren. Damit hat es sich.

Das vorliegende Material ist interessanter als die klassischen Zufallsobjekte. Schon die äußere Form regt zum Spekulieren, zum Aufstellen von Hypothesen an. Lassen Sie jüngere Schüler Mensch-ärgere-Dich-nicht, Malefiz , Monopoly ... mit normalen und Riemer-Würfeln spielen. (Dabei darf man vor jedem Wurf den Würfel wählen, der in der augenblicklichen Situation besonders günstig erscheint.) Es ist erstaunlich, welche Vorstellungen über Wahrscheinlichkeiten ("Chancen") zum Vorschein kommen.
Die Faszination, die die Objekte ausstrahlen, läßt sich jedoch nicht nur spielerisch, sondern auch systematisch in vielfältiger Weise nutzen. Drei Einsatzfelder sollen in diesem Leitfaden ausführlich angesprochen werden.

<u>Einsatzfeld I</u> (ab Klasse 7/8):
Aufbau eines tragfähigen Wahrscheinlichkeitsbegriffs: Wahrscheinlichkeiten als Vorhersagen relativer Häufigkeiten.

Das teilweise symmetrische Material unterstützt die Bildung eines "prognostischen", "hypothetischen" Wahrscheinlichkeitsbegriffs. Dieser Wahrscheinlichkeitsbegriff ist tragfähig bis in die höheren Curriculumstufen (Testen von Hypothesen). Er umfaßt den Laplaceschen Wahrscheinlichkeitsbegriff (Wahrscheinlichkeit = Anzahl der günstigen Fälle / Anzahl der möglichen Fälle) und auch den frequentistischen Wahrscheinlichkeitsbegriff (Wahrscheinlichkeit als Grenzwert der relativen Häufigkeit) als Spezialfälle.
Näheres in Abschnitt 2.

<u>Einsatzfeld II</u> (ab Klasse 9/10):
Einführung in Aspekte der Beurteilenden Statistik - Entscheiden zwischen Alternativhypothesen durch wiederholtes Anwenden der Bayesschen Regel.

Die Würfeltypen unterscheiden sich in ihrem stochastischen Verhalten. So wird es möglich, aus experimentellen Ergebnissen zu erschließen, von welchem Würfeltyp sie stammen. Die

Bayessche Regel liefert die quantitative Grundlage für diese Entscheidung. Fundamentale Ideen der Statistik werden vorbereitet. Bei einer informellen Behandlung der Bayesschen Regel ist nur die Pfadregel als Hilfsmittel erforderlich, man braucht keine Verteilungen komplizierter Testgrößen. Ein Computereinsatz mit den beiliegenden (oder besser selbst geschriebenen) Programmen zur wiederholten Anwendung der Bayesschen Regel ist durch die Sache begründet und führt zu faszinierenden Experimenten, die über bloße Simulation weit hinausgehen. Man kommt aber auch mit einem Taschenrechner aus. Näheres in Abschnitt 3.

Einsatzfeld III (Klasse 12/13):
Testen von Hypothesen.

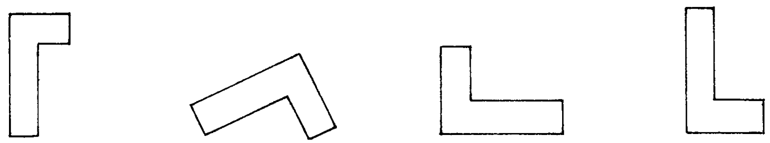
Die Würfel reizen zum Aufstellen überaus interessanter Hypothesen, die mit Mitteln der klassischen Testtheorie (Binomialtest, Chi-Quadrat-Test) untersucht werden können. Näheres in Abschnitt 4.

Einsatzfeld IV (Klasse 12/13):
Additivität der Varianz, Zentraler Grenzwertsatz

Man ermittelt Erwartungswert und Varianz einzelner Würfel. Dann wirft man mehrere (auch verschiedene) Würfel hintereinander und addiert die Augenzahlen. Erwartungswert und Varianz der Augensumme lassen sich vorhersagen, man kann mit dem Zentralen Grenzwertsatz Näherungsaussagen über die Wahrscheinlichkeiten der Augensummen machen und diese überprüfen. Die Thematik gehört zum Standard, so daß wir in diesem Leitfaden hierauf nicht näher einzugehen brauchen.

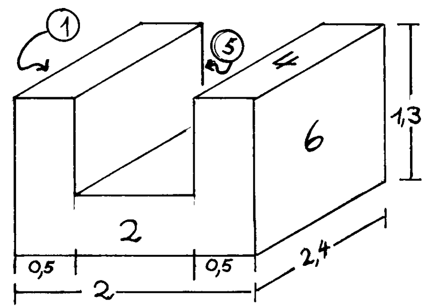
Beschriftung:
Bevor Sie mit den Experimenten anfangen, lassen Sie bitte die benötigten Würfel von Ihren Schülern gemäß der folgenden Anleitung beschriften. Verwenden Sie Aufkleber oder direkt einen spitzen Bleistift, der sich notfalls auf Holz radieren läßt. Achtung: Die Summe gegenüberliegender Seiten beträgt stets 7. Beim L-Würfel sehen die Ergebnisse 1,3,4,6 so aus:

Ergebnis 1 Ergebnis 3 Ergebnis 4 Ergebnis 6

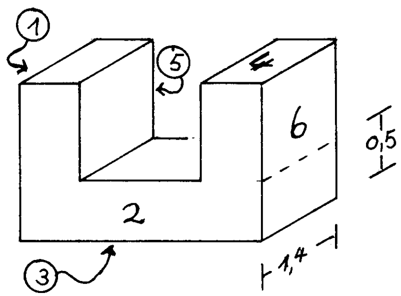


Wegen der Handanfertigung kann es passieren, daß Lage 1 instabil ist. Leichtes Schmirgeln schafft dann Abhilfe.

Beschriftung der Riemer-Würfel: (Maße in Zentimeter)

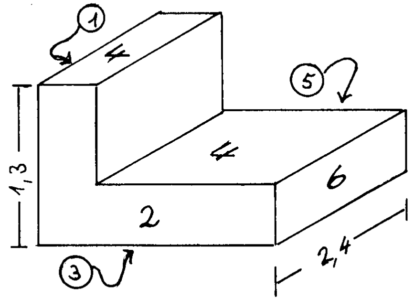


langer U-Würfel in Lage "4"

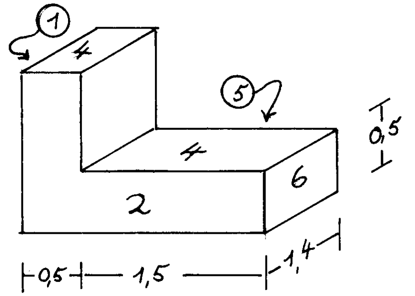


kurzer U-Würfel in Lage "4"

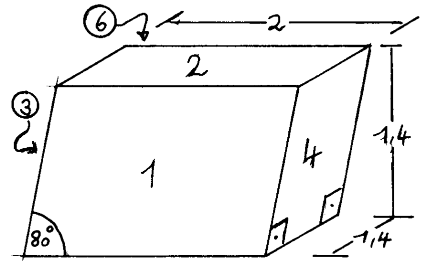
hinten: 5 links außen: 1 unten: 3



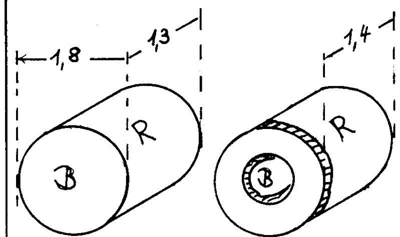
langer L-Würfel in Lage "4"



kurzer L-Würfel in Lage "4"



S-Würfel in Lage "2"
S bedeutet Spat
oder schief



ungezinkt gezinkt
O-Würfel in Lage "R"
Münzen mit Rand
B=Baum, Z=Zahl, R=Rand

Würfelbecher:
Die Experimente sollten zunächst stets mit der gleichen Sorte Würfelbecher (etwa 0.3 l Pappbecher) auf der gleichen Unterlage ("blanker Tisch") durchgeführt werden. Die Becher sollten auf den Tisch gestülpt werden, damit die Würfel nicht über den Tisch rollen. Die Wahrscheinlichkeiten der Würfel hängen nämlich von der Unterlage und der Wurftechnik ab. (Auch das untersuchen wir in Abschnitt 4).

Anhand folgender Häufigkeitstabellen können Sie sich eine grobe Vorstellung vom stochastischen Verhalten der Würfel machen (n ist der zugehörige Stichprobenumfang).

0.3 l Würfelbecher, Holzunterlage:

1	2	3	4	5	6	n	Form
8.7%	6.9%	23.1%	41.0%	7.9%	12.7%	481	U lang
6.7%	18.3%	17.9%	30.6%	20.5%	6.0%	268	U kurz
0.6%	6.0%	30.8%	42.0%	7.0%	13.6%	500	L lang
0.2%	14.0%	21.5%	39.7%	14.2%	10.2%	400	L kurz
21.4%	20.6%	7.3%	7.1%	22.2%	21.2%	490	S

freier Fall, 0.5 m, Wollteppichunterlage:

1	2	3	4	5	6	n	Form
4.7%	2.0%	28.0%	57.3%	1.3%	6.7%	150	U lang
2.0%	17.3%	14.0%	45.3%	20.7%	0.7%	150	U kurz
22.9%	23.1%	1.3%	1.3%	27.1%	24.2%	450	S

0.3 l Würfelbecher, Holzunterlage:

B	R	Z	n	Form
25.0%	57.0%	18.0%	200	O ungezinkt
9.0%	41.0%	50.0%	200	O gezinkt

2. Unterrichtsvorschlag zur Einführung der Würfel

Wahrscheinlichkeiten sind Prognosen relativer Häufigkeiten - Klasse 7/8 und Sekundarstufe II

2.1 Ziel der Lernsequenz

Wir streben an, daß die Schüler intuitiv einen "prognostischen" Wahrscheinlichkeitsbegriff erwerben, der sowohl den Laplaceschen als auch den frequentistischen Wahrscheinlichkeitsbegriff umfaßt:

Die Wahrscheinlichkeit ist die (subjektiv beste) Schätzung der in einer langen Versuchsreihe zu erwartenden relativen Häufigkeit.

Im einzelnen sollen die Schüler erkennen:
- Wahrscheinlichkeiten sind Vorhersagen relativer Häufigkeiten
- Wahrscheinlichkeiten können nur in besonders symmetrischen Fällen genau bestimmt werden. Ebenso oft haben sie nur provisorischen Charakter (den Charakter mehr oder weniger sicherer Annahmen - "Hypothesen").
- aufgrund dieses hypothetischen Charakters müssen Wahrscheinlichkeiten mitunter verworfen oder verbessert werden.

Wir wollen eine Beschränkung auf den Laplaceschen Wahrscheinlichkeitsbegriff vermeiden:

Verwendet man im Stochastikunterricht ausschließlich völlig symmetrische Objekte (wie Würfel, Münze, Glücksrad,...), so entsteht bei Schülern schnell die falsche Vorstellung, Wahrscheinlichkeiten ließen sich stets genau bestimmen (Laplacescher Wahrscheinlichkeitsbegriff). Für den Begriff der Hypothese, die Tatsache, daß Wahrscheinlichkeiten oft nur ungenau bekannt sind und verworfen werden müssen, wenn sie zu schlechte Vorhersagen machen, bleibt in ihrer Vorstellung kein Platz. Die Verständnisschwierigkeiten beim Testen von Hypothesen legen hiervon ein beredtes Zeugnis ab.

Wir wollen eine Beschränkung auf den frequentistischen Wahrscheinlichkeitsbegriff vermeiden:

Auch die Beschränkung auf völlig unsymmetrische Objekte (wie Reißnägel, Knöpfe...) ist nicht empfehlenswert. Da man hier Wahrscheinlichkeiten als Grenzwert der relativen Häufigkeit definieren muß (frequentistischer Wahrscheinlichkeitsbegriff), verschwindet der begriffliche Unterschied zwischen Wahrscheinlichkeiten (als Vorhersagen) und den relativen Häufigkeiten (als Versuchsergebnissen). Die Folge sind Begriffsverwirrungen. Welcher Lehrer hat seine Schüler noch nie von "relativen Wahrscheinlichkeiten" sprechen hören?

Die Riemer-Würfel sind teilweise symmetrisch und ihr Einsatz verhindert das Entstehen der beiden genannten Vorstellungsdefizite. Sie fördern die Genese eines prognostischen Wahrscheinlichkeitsbegriffs auf sehr eingängige Weise.

Schauen wir uns nämlich die Würfel an, so sind wir schon vor jedem Versuch in der Lage, sinnvolle Prognosen über deren stochastisches Verhalten abzugeben. Folgende Verteilungen wurden vor jeglichem Experiment geschätzt:

langer U-Würfel

1	2	3	4	5	6
10%	5%	20%	50%	5%	10%
15%	5%	25%	35%	5%	15%

kurzer U-Würfel

1	2	3	4	5	6
4%	17%	23%	35%	17%	4%
3%	18%	15%	43%	18%	3%

langer L-Würfel

1	2	3	4	5	6
0.5%	6%	40%	40%	6%	7.5%
0.5%	8%	43%	38%	8%	2.5%

kurzer L-Würfel

1	2	3	4	5	6
1%	20%	26%	30%	20%	3%
0.5%	11%	40%	35%	11%	2.5%

ungezinkter O-Würfel

B	R	Z
30%	40%	30%
25%	50%	25%

gezinkter O-Würfel

B	R	Z
10%	30%	60%
5%	45%	50%

S-Würfel

1	2	3	4	5	6
22%	22%	6%	6%	22%	22%
20%	23%	7%	7%	23%	20%

Die Verteilungen drücken Erwartungen (Vorhersagen) aus:

- symmetrische Seiten werden (im Schnitt) gleich oft fallen
- je schwerer und stabiler eine Lage, desto häufiger wird sie auftreten.

Dadurch, daß die Würfel zu solchen Spekulationen anregen, wird von Anfang an sinnfällig:

- Wahrscheinlichkeiten machen Vorhersagen relativer Häufigkeiten
- zufallsbedingte Abweichungen von den Vorhersagen sind natürlich (so wird niemand beim U-Würfel die Symmetrieannahme für Wahrscheinlichkeiten bzgl. 1-6 und 2-5 fallenlassen, obwohl die relativen Häufigkeiten fast immer unsymmetrisch sind)
- daß Wahrscheinlichkeiten oft provisorischen Charakter haben und nach umfangreichen Versuchen mitunter verworfen bzw. durch bessere Vorhersagen ersetzt werden müssen.

Um einem Mißverständnis vorzubeugen:
normaler Würfel, Münze und Reißnagel sind nicht schlecht. Natürlich sollen sie im Stochastikunterricht eingesetzt werden. Das Arbeiten mit den teilweise symmetrischen Würfeln ist jedoch ungleich spannender. Es sollte (über den Motivationseffekt hinaus) aus Gründen einer adäquaten Begriffsbildung gleichberechtigt neben das Arbeiten mit klassischen Zufallsobjekten treten.

Wenn Sie weitere Anregungen zum Einsatz der Riemer-Würfel im Rahmen eines Einführungskurses "Wahrscheinlichkeiten als Vorhersagen relativer Häufigkeiten" wünschen, so können Sie sich an den folgenden Arbeitsblättern oder an der Übersicht orientieren, in der die wichtigsten Ergebnisse in Form von Merksätzen festgehalten wurden.

Arbeitsblatt 1: Wir stellen Vermutungen auf

1) Schaue den langen und den kurzen <u>U-Würfel</u> genau an. Du sollst nun (ohne Probewürfeln) vorhersagen, welche Seite(n) beim Würfeln am häufigsten, am zweithäufigsten, am dritthäufigsten... oben liegen wird (werden). Wenn Du glaubst, daß verschiedene Seiten die gleiche Chance haben, so trage sie in die gleiche Zeile ein.

Meine Vorhersage:

	kurzer Würfel:	langer Würfel:
am häufigsten oben:		
am zweithäufigsten:		
am dritthäufigsten:		
am vierthäufigsten:		

2) Versuche gefühlsmäßig vorherzusagen, in wieviel Prozent die einzelnen Seiten (ungefähr) oben liegen werden, wenn Du den Würfel oft hintereinander wirfst.
Meine Schätzung:

kurzer Würfel

1	2	3	4	5	6
%	%	%	%	%	%

langer Würfel

1	2	3	4	5	6
%	%	%	%	%	%

3) Würfle mit Deinem Würfel 50 mal (wenn Du viel Zeit hast auch 100 mal) und trage die Ergebnisse ein (jeweils 20 in einer Zeile). Ich habe einen ________ Würfel

/ / / / / / / / / / /   / / / / / / / / / / /   20
/ / / / / / / / / / /   / / / / / / / / / / /   40
/ / / / / / / / / / /   / / / / / / / / / / /   60
/ / / / / / / / / / /   / / / / / / / / / / /   80
/ / / / / / / / / / /   / / / / / / / / / / /   100

Auswertung:	1	2	3	4	5	6
Strichliste						
absolute Häufigkeit						
relative Häufigkeit						

War Deine Vorhersage aus Aufgabe 2 brauchbar?

Arbeitsblatt 2: Wir fassen unsere Ergebnisse zusammen und verbessern unsere Vorhersagen für spätere Versuche

4) Trage hier die Ergebnisse Deiner Klassenkameraden ein: (jeder sagt, ob er einen kurzen oder einen langen Würfel hatte und diktiert langsam zum Mitschreiben!)

kurzer Würfel

1	2	3	4	5	6	Name
						Summe
						in %

langer Würfel

1	2	3	4	5	6	Name
						Summe
						in %

5) Sicher waren unsere Vorhersagen (Aufgabe 2) noch nicht optimal. Wir wußten damals ja auch sehr wenig über unsere Würfel. Wir sollten jetzt verbesserte Vorhersagen (Wahrscheinlichkeiten) für andere Klassen aufstellen, die mit den Würfeln später experimentieren wollen.
Verbesserte Vorhersagen (Wahrscheinlichkeiten):

kurzer Würfel

1	2	3	4	5	6
%	%	%	%	%	%

langer Würfel

1	2	3	4	5	6
%	%	%	%	%	%

<u>Merke:</u> Vorhersagen für relative Häufigkeiten, wie wir sie in 2) und in 5) gemacht haben, nennen wir Wahrscheinlichkeiten.

Arbeitsblatt 3:
Wir arbeiten mit unseren Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Wir haben unser "Wissen" über das Verhalten der U-Würfel in Wahrscheinlichkeitsverteilungen niedergelegt. Diese Wahrscheinlichkeitsverteilungen sagen voraus, in wieviel Prozent der Fälle wir eine 1, 2, ..., 6 erwarten, wenn wir eine lange Versuchsreihe anstellen. Schreibe diese Wahrscheinlichkeitsverteilungen nochmals auf:

	1	2	3	4	5	6
kurzer U-Würfel:	%	%	%	%	%	%
langer U-Würfel:	%	%	%	%	%	%
normaler Würfel:	%	%	%	%	%	%

6) Jemand hat beim Würfeln folgende Ergebnisse erhalten. Du sollst jetzt sagen, mit welchem der drei Würfel die betreffende Person wohl gewürfelt hat. Mit dem Zeichen (+, o, -) kannst Du andeuten, wie sicher Du bei Deiner Vermutung bist. Unterstreiche die absoluten Häufigkeiten, die den Ausschlag für Deine Vermutung gaben

1	2	3	4	5	6		meine Vermutung (kurz/lang/normal)	Sicherheit (+ o -)
11	20	21	33	20	7	(112)		
7	29	27	49	35	9	(156)		
11	8	12	7	8	10	(56)		
5	6	18	35	5	9	(78)		
3	5	26	25	3	9	(71)		

7) ("Pfadregel") Du sollst gleich mit einem Würfel Doppelwürfe (jeweils zweimal direkt hintereinander) anstellen und beobachten, wie oft eine Doppelvier (4,4), eine Doppeldrei (3,3) und eine Einszwei (1,2) auftritt.

a) mache eine Vorhersage, in wieviel Prozent aller Fälle Du eine Doppelvier, Doppeldrei, Einzwei erhalten wirst, wenn Du einen der Würfel verwendest:

	Doppelvier	Doppeldrei	Einszwei
kurzer U-Würfel:	%	%	%
langer U-Würfel:	%	%	%
normaler Würfel:	%	%	%

b) Warum ergeben die Zahlen in einer Zeile weniger als 100%?

c) Gelingt es Dir, Deine Vorhersage zu begründen? Tip: In welchem Prozentsatz führt der erste Wurf zum Erfolg, in welchem Prozentsatz davon auch noch der zweite?

Arbeitsblatt 4: Wir Überprüfen die Vorhersagen für Doppelwürfe ("Pfadregel", "Und Regel")

8) Überprüfe Deine Vorhersage durch ein Experiment. Mache dabei 50 Doppelwürfe (also insgesamt 100 einzelne) und trage die Ergebnisse ein. Ich verwende einen _________ Würfel:

(,)(,)(,)(,)(,)(,)(,)(,)(,)(,) 10
(,)(,)(,)(,)(,)(,)(,)(,)(,)(,) 20
(,)(,)(,)(,)(,)(,)(,)(,)(,)(,) 30
(,)(,)(,)(,)(,)(,)(,)(,)(,)(,) 40
(,)(,)(,)(,)(,)(,)(,)(,)(,)(,) 50

Zähle Deine 50 Versuche aus:

	Doppelvierer (4,4)	Doppeldrei (3,3)	Einszwei (1,2)
absolute Häufigk.			
relative Häufigk.			

Was meinst Du zu Deiner Vorhersage aus Aufgabe 7?

9) Wir fassen die Ergebnisse aller Klassenkameraden zusammen. Jeder sagt erst, welchen Würfel er hatte und diktiert langsam zum Mitschreiben, wie oft er eine Doppelvier (Dv), Doppeldrei (Dd) und Einszwei (Ez) hatte. Wir tragen in die entsprechende Spalte ein.

kurz Dv	Dd	Ez	Name	lang Dv	Dd	Ez	Name	normal Dv	Dd	Ez	Name
											abs. Hfk.
											rel. Hfk.

Werden die Gesamtergebnisse durch die Pfadregel gut vorhergesagt?

Weitere Übungen

10) (Zur Kontrolle.) Du kannst Deine 50 Doppelwürfe mit dem U-Würfel aus Aufgabe 9 nachträglich als 100 Einzelwürfe deuten, sie nochmals auszählen (die absoluten und relativen Häufigkeiten für 1,2,...,6 feststellen) und testen, ob sie durch unsere früher aufgestellten Wahrscheinlichkeiten gut vorhergesagt wurden.

11) a) Mache 50 Doppelwürfe mit dem gezinkten/ungezinkten O-Würfel. Protokolliere die Versuchsergebnisse wie folgt: (R,Z) (Z,B) ... (Z=Zahl, B=Baum, R= Rand).
b) Bestimme die relativen Häufigkeiten für die neun möglichen Ausgänge (B,B),(B,R),...(R,B),...,(Z,Z).
c) Deute das Versuchsprotokoll als 100 Einzelversuche und bestimme die relativen Häufigkeiten der drei möglichen Versuchsausgänge.
d) Fasse die Ergebnisse der ganzen Klasse zusammen, bestimme eine Wahrscheinlichkeitsverteilung für die O-Würfel.
e) Leite daraus eine Wahrscheinlichkeitsverteilung für den Doppelwurf her und überprüfe durch Vergleich mit b) die Pfadregel.

12) Jemand hat folgende absolute Häufigkeiten gewürfelt:

1	2	3	4	5	6
7	29	27	49	35	9
1	49	37	63	27	23
105	101	36	35	109	104
12	14	55	93	14	26

Dabei wurde ein S-Würfel, je ein kurzer und ein langer U-Würfel und ein kurzer L-Würfel verwendet.
a) Berechne die zugehörigen relativen Häufigkeitsverteilungen
b) Ordne die vier Würfel den vier Häufigkeitsverteilungen zu.

13) Beim normalen Würfel ist es gleichwahrscheinlich, daß man eine gerade bzw. ungerade Zahl würfelt. Gilt dies auch für den
a) S-Würfel
b) kurzen U-Würfel?
b) kurzen L-Würfel?
Bei welchen Würfeln kann man das sofort (ohne Experimente) beantworten?

14) Berechne die Wahrscheinlichkeit, daß man bei dem Doppelwurf des (kurzen/langen) U-Würfels
a) zwei gerade
b) eine gerade und eine ungerade
c) zwei ungerade
Zahlen erhält. Vergleiche mit dem Versuchsprotokoll von Aufgabe 8.

15) Jemand hat im Laufe eines Spiels 18 Sechser erhalten. Was meinst Du: Wie oft hat er wohl (ungefähr) gewürfelt, wenn er einen
a) normalen Würfel
b) einen kurzen/langen U-Würfel
c) einen kurzen/langen L-Würfel
d) einen S-Würfel
verwendet hat? Überprüfe Deine Vermutung durch ein Klassenexperiment.

16) Du sollst möglich viele
a) Einser
b) Dreier
c) Vierer
würfeln. Welcher der Würfel (kurzer/langer U-Würfel, kurzer/langer L-Würfel, S-Würfel, normaler Würfel) erscheint Dir zu diesem Zweck besonders günstig? Überprüfe diese Vermutung in einem Klassenexperiment.

17) Jemand hatte für einen unserer Würfel notiert:

1	2	3	4	5	6
6%	15%	15%	43%	15%	6%
6.4%	12.8%	15.4%	42.3%	17.9%	5.2%

a) Er hat aber vergessen, in welcher Zeile die Wahrscheinlichkeiten, in welcher Zeile die relativen Häufigkeiten standen. Kannst Du helfen?
b) Er hat auch vergessen, ob er einen L-oder einen U-Würfel verwendet hat. Kannst Du helfen? Hatte er eine kurze oder eine lange Ausführung?

18) Wer zuerst mit dem O-Würfel alle drei Möglichkeiten B (Baum), Z (Zahl), R (Rand) mindestens einmal (zweimal) gewürfelt hat, gewinnt. Würdest Du lieber den gezinkten oder den ungezinkten O-Würfel verwenden? Oder ist es Dir egal? Bestimme in einem Klassenexperiment welcher der Würfel günstiger ist. Wie lange braucht man im Mittel, um alle Ergebnisse mindestens einmal (zweimal) zu erhalten?

19) Du sollst einen "Zweier-Pasch", würfeln, d. h. bei einem Doppelwurf müssen beide Würfel das gleiche Ergebnis liefern. Du darfst Dir aussuchen, ob Du

a) mit zwei normalen Würfeln
b) mit zwei langen U-Würfeln
c) mit zwei ungezinkten O-Würfeln
d) mit zwei gezinkten O-Würfeln

würfeln möchtest. Welchen Würfeltyp würdest Du wählen? Berechne die Wahrscheinlichkeit für einen "Zweier-Pasch", indem Du von den Wahrscheinlichkeitsverteilungen ausgehst, die Du für die 4 Würfeltypen besitzt. Überprüfe in einem Experiment!

20) Du möchtest beim "Mensch-ärgere-Dich-nicht"

a) aus dem "Häuschen" und brauchst eine Sechs
b) Deinen Feind "rausschmeißen", der drei Felder vor Dir steht
c) Deinen Freund "nicht schlagen", der vier Felder vor Dir steht

Du darfst jeweils zwischen dem kurzen U-Würfel, dem S-Würfel und einem normalen Würfel wählen. Welcher erscheint Dir in den einzelnen Situationen besonders günstig?

21) Man sagt einem Lehrer nach, er bestimme die Zeugnisnoten durch Würfeln. Welchen Würfel würdest Du Deinem Lehrer geben, damit die Klassenarbeiten "möglichst gut" ausfallen?

22) Wenn ein Drittel aller Klassenarbeiten "unter dem Strich" liegt (5 oder 6), dann muß sie vom Direktor genehmigt werden. Bei welchem Würfel ist die Gefahr besonders groß (besonders klein), daß die Arbeit genehmigt werden muß?

23) Bestimme Erwartungswert und Streuung für die einzelnen Würfel. Mit welchem der Würfel kommt man beim Mensch-ärgere-Dich-nicht am schnellsten voran? Gibt es für jeden der Würfel eine andere Beschriftung, bei der man im Mittel schneller vorankommen würde?

24) Jemand hat entdeckt, daß man bei einem normalen Würfel im Mittel sechsmal würfeln muß, um eine 6 zu bekommen.

a) Wie lange muß man im Mittel würfeln, um eine 4 zu bekommen? Probiere es aus.
b) Wie lange braucht man im Mittel, um mit dem langen U- (L-) Würfel eine 4 (3, 2) zu würfeln? Führe ein Experiment aus (oder werte Aufgabe 3 und 8 neu aus).
c) Entdeckst Du einen Zusammenhang mit den Wahrscheinlichkeiten p(4), p(3), p(2), des U- (L-) Würfels?

Zusammenfassung (Merkregeln):

1) Die Wahrscheinlichkeit ist eine (subjektiv beste) Schätzung der in einer langen Versuchsreihe zu erwartenden relativen Häufigkeit.

2) Wahrscheinlichkeiten drücken Erwartungen aus (vor Versuch), absolute und relative Häufigkeiten sind Versuchsergebnisse (nach Versuch). Bei unseren Würfeln sind alle Wahrscheinlichkeiten für symmetrische Seiten gleich. Die absoluten und relativen Häufigkeiten aber nur in Ausnahmefällen. Sie schwanken von Versuch zu Versuch.

3) Wenn Wahrscheinlichkeiten sehr schlechte Vorhersagen machen, dann müssen wir sie verwerfen und versuchen, bessere zu finden.

4) Wahrscheinlichkeiten, "bei denen man sich nicht so sicher ist", nennt man oft auch Wahrscheinlichkeitshypothesen.

4) Die Formel: Anteil = Anzahl / Gesamtzahl
oder Anzahl = Anteil * Gesamtzahl

wird in der Wahrscheinlichkeitsrechnung meist so verwendet:

a) vor Versuch:
erwartete Anzahl = Wahrscheinlichkeit * Versuchszahl

b) nach Versuch:
relat. Häufigk. = absolute Häufigkeit / Versuchszahl

5) Additionsregel (Oder-Regel, einstufiger Versuch)
Wenn man einen Treffer dadurch erreicht, daß man entweder ein Ergebnis A (Wahrsch. p) oder ein Ergebnis B (Wahrsch. q) erzielt, dann ist die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer p+q

6) Multiplikationsregel (Und-Regel, zweistufiger Versuch)
Erreicht man in einem zweistufigen Versuch einen Treffer dadurch, daß man auf der ersten Stufe ein Ergebnis A (Wahrsch. p) und zusätzlich auf der zweiten Stufe ein Ergebnis B (Wahrsch. q) erzielt, dann ist die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer p*q.

3. Beurteilende Statistik mit Hilfe der Bayesschen Regel

(Klassen 9, 10 und Sekundarstufe II)

In der Beurteilenden Statistik versucht man, von experimentellen Daten ("Indizien") auf die Gültigkeit von Hypothesen zurückzuschließen.
In diesem Abschnitt betrachten wir folgende Variante statistischer Probleme: Es werden mehrere Alternativen (Hypothesen) zur Auswahl vorgegeben. Die Aufgabe besteht darin herauszufinden, welche der Hypothesen zutrifft, d. h. mit den experimentellen Daten am besten vereinbar ist.
Beispielsweise werden wir mehrere Riemer-Würfel zur Auswahl vorlegen und dann versuchen, aus den gewürfelten Augenzahlen zu erschließen, welcher Würfel benutzt wird. Die Hypothesen werden in diesem Beispiel also durch die Würfel dargestellt.
Die Frage nach statistischen Fehlentscheidungen und ihrer Abhängigkeit vom Umfang der Stichprobe drängt sich auf.

Besonders eindrucksvoll werden die Experimente zur Bayesschen Regel, wenn man sie durch einen Computer begleitet.
So einfach die Programme sind, ihre Wirkung ist verblüffend.
Man kommt aber auch mit einem Taschenrechner aus.

3.1 Ein Experiment

Jemand darf zwischen

(N) einem normalen Laplace-Würfel,
(L) einem kurzen L-Würfel und
(S) dem Spat-Würfel wählen.

Wir beschreiben das Verhalten der Würfel durch folgende Wahrscheinlichkeitsverteilungen:

	1	2	3	4	5	6
N	16.6%	16.6%	16.6%	16.6%	16.6%	16.6%
L	0.5%	14 %	21.5%	40 %	14 %	10 %
S	22 %	22 %	6 %	6 %	22 %	22 %

Wir wollen herausfinden, welchen der drei Würfel die Versuchsperson ausgewählt hat. Anfangs sind wir sehr unsicher. Jeder Würfel kommt in Frage, wir besitzen für alle drei die gleiche (subjektive) Wahrscheinlichkeit:

N	L	S
33.3%	33.3%	33.3%

Die Versuchsperson würfelt und teilt uns das "Indiz" 4 mit. Das spricht am meisten für L und sehr gegen S. Denn 4 tritt bei L sehr häufig (40%) auf, bei S dagegen sehr selten (6%). Wir drücken unser Gefühl durch folgende Verteilung aus:

N	L	S
30%	60%	10%

Dann wird 1 gewürfelt. Das spricht extrem stark gegen den L-Würfel, denn bei diesem tritt 1 nur mit der Wahrscheinlichkeit 0.5% auf. Wir müssen obige Verteilung ganz erheblich revidieren:

N	L	S
75%	5%	20%

Der nächste Versuch liefert das Indiz 3, es spricht sehr gegen S. N gewinnt an Glaubwürdigkeit:

N	L	S
85%	6%	9%

Die nächste 1 macht uns noch sicherer:

N	L	S
89%	1%	10%

nach einer weiteren 3:

N	L	S
95%	1%	4%

<u>riskieren wir die Entscheidung</u>: "<u>Es handelt sich um den normalen Laplace-Würfel</u>".

Die Wahrscheinlichkeit 5% für L und S zusammen ist unsere <u>subjektive Irrtumswahrscheinlichkeit</u>. Obwohl wir uns für N entschieden haben, glauben wir ja, daß L oder S mit 5% vorliegen, daß wir uns also geirrt haben. Nur weitere Versuche könnten unsere Sicherheit erhöhen.

3.2 Versuchsauswertung mit der Bayesschen Regel

Verschiedene Personen haben trotz gleicher Informationen verschiedene subjektive Wahrscheinlichkeiten für N, L und S. Gibt es eine für alle verbindliche und verstandesmäßig begründbare Methode zur Revision unserer subjektiven Wahrscheinlichkeiten? Ja, die Bayessche Regel. Zur Erinnerung sei sie kurz informell hergeleitet:

Hätten wir vor dem ersten Versuch gefragt: "mit welcher Wahrscheinlichkeit erwarten wir das Indiz 4?", so hätten wir (mit Pfad- und Additionsregel) folgende Antwort erhalten:

$$P(4) = P(N)\cdot P(4/N) + P(L)\cdot P(4/L) + P(S)\cdot P(4/S)$$

$$\approx 0.33\cdot 0.16 + 0.33\cdot 0.40 + 0.33\cdot 0.06 = 0.21 .$$

(Dabei bezeichnet z. B. P(N) die Wahrscheinlichkeit für den normalen Würfel, P(4/N) ist die bedingte Wahrscheinlichkeit für 4 bei Verwendung eines normalen Würfels. Die numerischen Werte sind gerundet.) Nun ist aber 4 eingetreten. Und der Anteil an P(4), der von N herrührt, ist gleichzeitig die Wahrscheinlichkeit, daß N vorliegt, also die bedingte Wahrscheinlichkeit P(N/4). Und das ist schon die Bayessche Regel:

$$P(N/4) = \frac{P(N)\cdot P(4/N)}{P(N)\cdot P(4/N)+P(L)\cdot P(4/L)+P(S)\cdot P(4/S)} = \frac{0.05}{0.21} = 27\% .$$

Analog erhält man $P(L/4)=64\%$ und $P(S/4)=10\%$.

Ergebnis:

Durch Beobachtung des Indizes 4 hat sich die subjektive (a priori) Wahrscheinlichkeitsverteilung

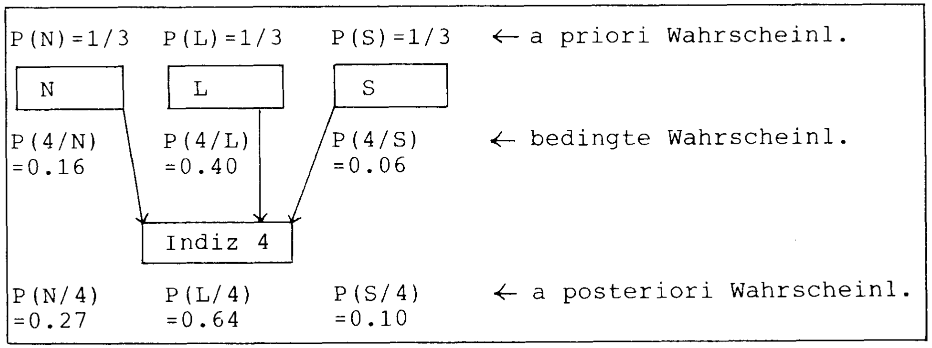
N	L	S
0.33	0.33	0.33

verändert zu

N	L	S
0.27	0.64	0.10

Man nennt sie a posteriori Wahrscheinlichkeitsverteilung.

Wir fassen in einem Diagramm zusammen:



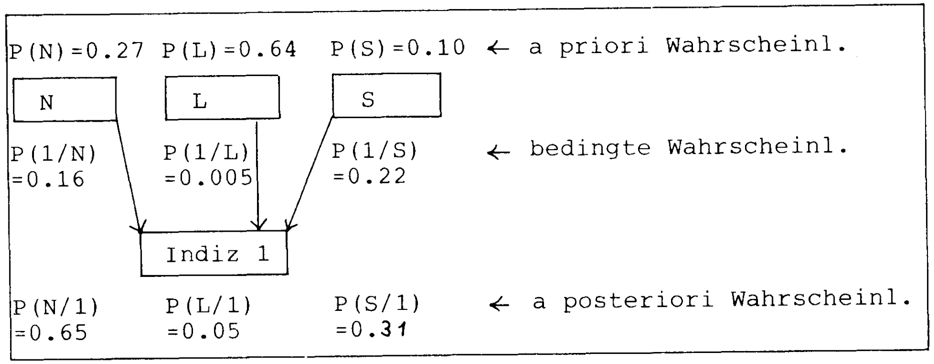
Für den zweiten Wurf übernimmt diese a posteriori Verteilung die Rolle der a priori Verteilung. Die Bayessche Regel liefert:

$$P(N/1) = \frac{P(N)\cdot P(1/N)}{P(N)\cdot P(1/N)+P(L)\cdot P(1/L)+P(S)\cdot P(1/S)}$$

$$= \frac{0.27\cdot 0.16}{0.27\cdot 0.16 + 0.64\cdot 0.005 + 0.10\cdot 0.22} = \frac{0.045}{0.070} = 0.65$$

und analog $P(L/1)=0.05$, $P(S/1)=0.31$.

Wir veranschaulichen wieder durch ein Diagramm:



Wir setzen unser Experiment fort und wenden in jedem Schritt die Bayessche Regel an, die wir etwas allgemeiner so formulieren können:

$$P(Ai/I) = \frac{P(Ai)\cdot P(I/Ai)}{\sum_{k=1}^{3} P(Ak)\cdot P(I/Ak)}$$

Dabei ist I das Indiz, also die gewürfelte Augenzahl. Für die Alternativen schreiben wir: A1=N, A2=L, A3=S.

Wir erhalten folgende Tabelle (Ausdruck gerundet, sie wurde durch das auf Diskette mitgelieferte Programm BAYS/NLS berechnet):

Bayessche Regel:

I	N	L	S
	0.33	0.33	0.33
4	0.27	0.64	0.10
1	0.65	0.05	0.31
3	0.79	0.07	0.14
1	0.81	0.00	0.18
3	0.92	0.00	0.07

zum Vergleich intuitiv geschätzt:

N	L	S
0.33	0.33	0.33
0.30	0.60	0.10
0.75	0.05	0.20
0.85	0.06	0.09
0.89	0.01	0.10
0.95	0.01	0.04

(Es lag übrigens tatsächlich ein N-Würfel vor.)
Der Vergleich der errechneten mit den vorher (!) intuitiv geschätzten Wahrscheinlichkeiten ist immer wieder spannend. Oft ist die Übereinstimmung brauchbar, d. h. die Bayessche Regel beschreibt unsere Intuitionen recht gut.

In obigem Beispiel brauchten wir zur Entscheidung nur wenige Schritte. Das lag daran, daß durch das Aufteten von 1 der L-Würfel rasch ausschied, ebenso schied der S-Würfel durch das Auftreten von 3 und 4 schnell aus.

Es kann passieren, daß die Versuche länger dauern. Wir geben zwei Beispiele:

Versuchsreihe 2

Wahrscheinl. für

I	N	L	S
	0.33	0.33	0.33
2	0.32	0.27	0.42
3	0.39	0.42	0.19
6	0.44	0.29	0.28
1	0.54	0.01	0.45
1	0.48	0.00	0.52
3	0.72	0.00	0.28
5	0.66	0.00	0.34
4	0.84	0.00	0.16
2	0.80	0.00	0.20
3	0.92	0.00	0.08
2	0.89	0.00	0.10
1	0.87	0.00	0.13
5	0.83	0.00	0.17
1	0.79	0.00	0.21
4	0.91	0.00	0.09
2	0.89	0.00	0.11
6	0.86	0.00	0.14
1	0.82	0.00	0.18
6	0.77	0.00	0.23
1	0.72	0.00	0.28
6	0.66	0.00	0.34
4	0.84	0.00	0.16
4	0.94	0.00	0.06
6	0.92	0.00	0.08
4	0.97	0.00	0.03
4	0.99	0.00	0.01
4	1.00	0.00	0.00
1	0.99	0.00	0.01
5	0.99	0.00	0.01
2	0.99	0.00	0.01

Entscheidung:
der S-Würfel wird benutzt

Versuchsreihe 3

Wahrscheinl. für

I	N	L	S
	0.33	0.33	0.33
3	0.38	0.49	0.14
5	0.39	0.42	0.19
4	0.27	0.69	0.05
4	0.14	0.85	0.01
4	0.06	0.94	0.00
5	0.07	0.92	0.00
4	0.03	0.97	0.00
5	0.04	0.96	0.00
3	0.03	0.97	0.00
5	0.04	0.96	0.00
3	0.03	0.97	0.00
3	0.02	0.98	0.00
3	0.02	0.98	0.00

Entscheidung:
der (kurze) L-Würfel wird benutzt

Um ein Gefühl für die Bayessche Regel zu erhalten, sollten Sie selbst einige Experimente mit dem Programm BAYS/NLS anstellen oder selbst entsprechende Programme - auch für andere Würfel - schreiben (lassen). Vgl 3.4 Aufgabe 7.

Wenn Sie nicht gleich erzählen, daß der Rechner die Wahrscheinlichkeiten der N-, L- und S-Würfel kennt, können Sie ihre Zuschauer mitunter ganz schön zum Staunen bringen: Wie kann der Computer wissen, mit welchem dieser exotischen Würfel ich arbeite? Kann er hellsehen?

3.3 Anwendung der Bayesschen Regel

(zusammengesetzte Indizien, Taschenrechner)

Beispiel 1: Wenn man sich für den Prozeß des Erkenntnisgewinns bei wiederholter Anwendung der Bayesschen Regel nicht interessiert, kann man zum gleichen Endergebnis auch in einem Schritt gelangen. Man betrachtet "zusammengesetzte" Indizien. Bei unserem Würfelbeispiel aus 3.1 und 3.2 etwa I=(4,1,3,1,3). Dieses Indiz hat die Wahrscheinlichkeit (Pfadregel):

$$P(1)^2 \cdot P(3)^2 \cdot P(4) .$$

Für den normalen Laplace-Würfel (N), den kurzen L-Würfel (L) und den Spat-Würfel (S) ergeben sich unterschiedliche Werte:

$P(I/N)=0.0001286$
$P(I/L)=0.0000005$
$P(I/S)=0.0000105$

Die Bayessche Regel liefert mit

$$P(I) = (1/3)\cdot P(I/N)+(1/3)\cdot P(I/L)+(1/3)\cdot P(I/S) = 0.0000465$$

$$P(N/I) = (1/3)\cdot P(I/N) \;/\; P(I) = 0.9217542 \approx 0.92$$
$$P(L/I) = (1/3)\cdot P(I/L) \;/\; P(I) = 0.0033132 \approx 0.00$$
$$P(S/I) = (1/3)\cdot P(I/S) \;/\; P(I) = 0.0749325 \approx 0.07$$

das gleiche Endergebnis wie bei schrittweiser Anwendung in 3.2. Wenn die auftretenden Wahrscheinlichkeiten zu klein werden, arbeitet man mit Logarithmen. (Man berechnet zunächst die Verhältnisse der a posteriori Wahrscheinlichkeiten, die Nenner in der Bayesschen Formel fallen dabei weg). Vgl auch Beispiel 2.

Beispiel 2: Besonders einfach wird die Anwendung der Bayesschen Regel (auch bei wiederholter Anwendung), wenn man nur zwischen zwei Alternativen zu entscheiden hat. Es reicht dann, den Quotienten der a posteriori Wahrscheinlichkeiten zu bestimmen. Nehmen wir an, es ist zu entscheiden, ob (Ll) der lange oder (Lk) der kurze L-Würfel vorliegt. Wenn das Indiz I (= 2) fällt, sieht der zugehörige Rechenschritt (mit P(2/Ll)=0.065, P(2/Lk)=0.14 und P(2/Ll)/P(2/Lk)=0.464) wie folgt aus:

$$\frac{P(Ll/I)}{P(Lk/I)} = \frac{P(Ll)}{P(Lk)} \cdot \frac{P(I/Ll)}{P(I/Lk)} = \frac{P(Ll)}{P(Lk)} \cdot 0{,}464$$

Man hat das Verhältnis der a priori Wahrscheinlichkeiten nur mit dem Verhältnis der bedingten Wahrscheinlichkeiten zu multiplizieren, um das Verhältnis der a posteriori Wahrscheinlichkeiten zu erhalten.

Beispiel 3 (Fortsetzung von Beispiel 2):
Wir beschreiben die L-Würfel durch folgende Wahrscheinlichkeitsverteilungen:

1	2	3	4	5	6	I
0.5%	6.5%	31.0%	42.0%	6.5%	13.5%	P(I/Ll)
0.5%	14.0%	21.5%	40.0%	14.0%	10.0%	P(I/Lk)
1	0.464	1.442	1.050	0.464	1.35	P(I/Ll) / P(I/Lk)
0	3	12	28	4	13	a(I) abs. Hfgk.

Die letzte Zeile enthält das Ergebnis einer Stichprobe vom Umfang 60. Stammt sie vom langen (Ll) oder vom kurzen (Lk) L-Würfel? Wir vermuten: vom langen L-Würfel, weil 2 und 6 selten gefallen sind. Was sagt die Bayessche Regel?

Wenn die a priori Wahrscheinlichkeiten für Ll und Lk je 0.5 waren, ergibt sich für die a posteriori Wahrscheinlichkeiten gemäß Beispiel 2 (wir fassen die Häufigkeitsverteilung als Indiz J auf):

$$\frac{P(Ll/J)}{P(Lk/J)} = \frac{0{,}5}{0{,}5} \cdot 0.464^{3} \cdot 1.442^{12} \cdot 1.05^{28} \cdot 0.464^{4} \cdot 1.35^{13} = 71.38$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß der lange L-Würfel verwendet wurde, verhält sich zur Wahrscheinlichkeit, daß der kurze L-Würfel verwendet wurde wie 71:1 oder (98.6% : 1.4%). Unsere Vermutung wird durch die Bayessche Regel sehr bestärkt.

Wie die drei Beispiele belegen, ist ein Computer nicht unbedingt erforderlich. Ein Taschenrechner reicht aus, wenn man sich bei wiederholter Anwendung der Bayesschen Regel auf zwei Alternativen oder bei mehr als zwei Alternativen auf eine komprimierte Anwendung beschränkt.

3.4 Aufgaben und Anregungen

1) Jemand darf zwischen einem normalen und einem kleinen Ü-Würfel wählen. Er teilt uns seine Ergebnisse mit:

a) 3 4 4 5 3 2 3 5 4 4
b) 2 2 4 6 3 6 6 5 1 5

Berechne mit der Bayesschen Regel nach jedem Zug die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Ergebnisse vom normalen bzw. vom kurzen U-Würfel stammen. Verwende für den kurzen U-Würfel Deine eigene Wahrscheinlichkeitsverteilung oder die folgende:

1	2	3	4	5	6
7%	19%	16%	32%	19%	7%

Kontrolliere Dein Endergebnis, indem Du die Regel von Bayes nur ein einziges mal anwendest.

2) Jemand darf zwischen einem kurzen und einem langen U-Würfel auswählen. Für den langen U-Würfel benutzen wir folgende Wahrscheinlichkeiten:

1	2	3	4	5	6
12%	6%	22%	41%	6%	12%

Die Wahrscheinlichkeiten für den kurzen U-Würfel entnehme man Aufgabe 1. Es wurden folgende Ergebnisse gewürfelt:

	1	2	3	4	5	6	
i)	11	20	21	33	20	7	(112)
ii)	11	6	25	46	7	16	(112)
iii)	4	3	11	33	6	8	(65)
iv)	1	14	19	20	8	3	(65)

a) Stelle intuitiv eine Vermutung auf, ob die Ergebnisse einer Zeile jeweils von einem kurzen oder einem langen U-Würfel stammen.

b) Berechne das Verhältnis der Wahrscheinlichkeiten, daß den einzelnen Ergebnissen der kurze bzw. der lange U-Würfel zugrunde lag. Die a priori Wahrscheinlichkeit für kurz oder lang sei jeweils 50%.

3) Dein Banknachbar würfelt mit einem gezinkten oder einem ungezinkten O-Würfel. Er teilt Dir seine Ergebnisse mit. Kannst Du nach 5 (10) Schritten schon sicher sagen, von welchem O-Würfel die Ergebnisse stammen? Drücke Deine Vermutung nach jedem Schritt in Prozent aus. Kontrolliert zusammen Deine intuitiven Wahrscheinlichkeiten mit der Bayesschen Regel. Wechselt Euch mit dem Raten ab.

<u>Zusatz:</u> Veranstaltet ein <u>Wettraten:</u> Jede Information, die Du von Deinem Nachbarn anforderst, kostet Dich einen Punkt. Gibst Du aber (nach wenigen Informationen) einen falschen Tip ab, kostet das zusätzlich 5 Punkte. Für einen richtigen Tip erhältst Du dagegen 5 Punke zurück. Wer hat nach 10 Rateversuchen das günstigste "Punktekonto"?

4) Jemand würfelt mit einem kurzen U-Würfel. Er kann seine gewürfelten Ergebnisse auf zwei Arten verschlüsseln:

a) 1 bedeutet <u>B</u>aum, 6 bedeutet <u>Z</u>ahl, 2,3,4,5 bedeutet <u>R</u>and
b) 3 bedeutet <u>B</u>aum, 4 bedeutet <u>Z</u>ahl, 1,2,5,6 bedeutet <u>R</u>and.

Es ergab sich B Z Z B B Z Z Z R Z R B R. Berechne mit der Bayesschen Regel die Wahrscheinlichkeit, daß diesen Ergebnissen die Verschlüsselung a) bzw b) zugrunde lag.
Tip: Benutze die Wahrscheinlichkeiten des U-Würfels aus Aufgabe 1, und berechne damit die bedingten Wahrscheinlichkeiten für B, Z, R, wenn man nach a) bzw. b) verschlüselt.
Mache eigene Experimente - auch mit anderen Verschlüsselungen.

5) (Je mehr Information desto sicherer sind wir):
Dein Partner wählt zwischen einem normalen Laplace-Würfel und dem langen U-Würfel. Er würfelt 50 mal.

a) Er teilt Dir mit, wie oft er eine der Zahlen 2;5 (+) oder eine andere (-) gewürfelt hat.
b) Er gibt Dir die volle Information.

Berechne mit der Bayesschen Regel jeweils das Verhältnis der Wahrscheinlichkeiten für das Vorliegen des U-bzw. des Laplace-Würfels. Kommentiere, was Dein Rechenergebnis mit der Überschrift zu dieser Aufgabe zu tun hat.

6) (die Grenzen der Bayesschen Methode):
In Abschnitt 4.1 berechnen wir für den langen U-Würfel mehrere Wahrscheinlichkeitsverteilungen:

	1	2	3	4	5	6
PA	0.15	0.12	0.23	0.23	0.12	0.15
PB	0.15	0.12	0.19	0.27	0.12	0.15
PC	0.12	0.08	0.24	0.53	0.08	0.12

Bei PA verhalten sich die Wahrscheinlichkeiten wie die Auflageflächen F, bei PB wie die Kehrwerte der Schwerpunkthöhen 1/h, bei PC wie die Quotienten F/h. Anfangs mögen alle Hypothesen die gleiche subjektive Wahrscheinlichkeit (1/3) besitzen. Zwei Versuchsreihen lieferten:

	1	2	3	4	5	6	
a)	11	6	25	46	7	16	(112)
b)	42	33	111	197	38	60	(482)

Welche Hypothese hat nach a) bzw. b) die größte a posteriori Wahrscheinlichkeit?
Tip: Berechne die Logarithmen der Verhältnisse von jeweils zwei a posteriori Wahrscheinlichkeiten.

Anmerkung: Die Bayessche Regel kann immer nur Antwort auf die Frage geben: welche von mehreren vorgegebenen Hypothesen ist die wahrscheinlichste. Sie bietet keine Möglichkeit zu prüfen, ob Hypothesen überhaupt mit den Versuchsergebnissen vereinbar sind. Dazu wendet man Signifikanztests (vgl. Abschnitt 4) an.

7) Schreibe ein (allgemeines) Computerprogramm für die wiederholte Anwendung der Bayesschen Regel. Vorschlag:

Eingabe:
- Anzahl der Alternativhypothesen (k)
- Wahrscheinlichkeitswerte P(1)...P(n) für jede der k Hypothesen
- a priori Verteilung Q(1)...Q(k) für die k Hypothesen
- in jedem Schritt: das Indiz I (zwischen 1...n)

Ausgabe:
- in jedem Schritt die momentane a posteriori Verteilung R(1)...R(k) für die k Hypothesen.

Du kannst dieses Programm für die Aufgaben 1-5, für die folgenden Aufgaben und für eigene Experimente einsetzen.

8) Wähle zwischen einem normalen Würfel, dem kurzen oder dem langen U-Würfel. Experimentiere mit dem gewählten Würfel und gib die jeweils erhaltene Augenzahl als Indiz I in das Computerprogramm von Aufgabe 7 ein. Wie lange brauchst Du im Mittel, bis die Wahrscheinlichkeit für eines der Objekte auf mehr als 80 % angewachsen ist? (Auch das Programm BAYS/NUU auf der beiliegenden Diskette löst dieses Problem.)

9) Es sind drei Kisten mit folgenden Inhalten gegeben:
I: 100% weiße Kugeln
II: 75% weiße, 25% rote Kugeln
III: 25% weiße, 75% rote Kugeln
Jemand wählt eine der Kisten aus und teilt die gezogenen Ergebnisse mit. Verfolge das Experiment mit dem Computerprogramm aus Aufgabe 7 solange, bis Du sicher bist, welche Kiste vorliegt. (Das Programm BAY/KIST auf der beiliegenden Diskette löst speziell dieses Problem). Wie ändert sich das Problem, wenn statt der Kiste III eine weitere Kiste vom Typ II zur Auswahl steht?

10) (Erweiterung einer Aufgabe von A. Engel):
Angenommen, es gibt einen sehr zuverlässigen Test zur Krebsdiagnose. Habe ich Krebs (Alternative I), dann ist der Test Positiv (Indiz +) mit Wahrscheinlichkeit 96%. Habe ich keinen Krebs, so ist der Test negativ (Indiz -) mit Wahrscheinlichkeit 94%. Ich unterziehe mich dem Test. Er ist positiv.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ich tatsächlich Krebs habe, wenn von 145 Personen meines Alters einer Krebs hat? (A priori Wahrscheinlichkeit für Krebs 1/145).

b) Natürlich unterziehe ich mich dem Test ein zweites mal. Diesmal fällt er negativ aus. Wie groß ist jetzt die Wahrscheinlichkeit, daß ich tatsächlich Krebs habe?

c) Wie groß ist dagegen die Wahrscheinlichkeit, wenn auch der Nachtest positiv ausfällt?

11) Man erforsche, wie sich die Bayessche Regel verhält, wenn man verschiedene a priori Verteilungen mit der gleichen Folge von Indizien revidiert. Konvergieren die a posteriori Verteilungen gegen die gleiche Grenzverteilung? Zur Anregung: man studiere und modifiziere das Programm BAY/4MNZ (Vgl 3.5), das mit einem Zufallsgenerator arbeitet.

3.5 Einsatz der Computerprogramme

Man kann auch umfangreiche Experimente zur Bayesschen Regel ohne viel Aufwand mit einem Taschenrechner auswerten. Das wurde in 3.3 dargelegt.

Wirklich faszinierend wird es aber dann, wenn man die Bayessche Regel mit Computerhilfe sukzessive Schritt für Schritt anwendet und dabei genau verfolgt, wie sich die "Erkenntnis" durch einzelne Informationen ("Indizien") verändert.

Ihre Programmierung ist nicht schwer, so daß sie bei Führung durch den Lehrer in einer Unterrichtsstunde besprochen oder von "Computefreaks" als Zusatzaufgabe geleistet werden kann. Alle Programmiersprachen (Pascal, Basic, Logo) sind geeignet.

Die beigelegten Disketten enthalten fünf kleine Programme zur Bayesschen Regel. Sie können für Demonstrationszwecke eingesetzt werden oder als Anregung für eigene Arbeiten mit der Bayesschen Regel dienen.

1. Programm: BAYS/NLS

(Vgl. Abschnitt 3.1 bis 3.3). Sie wählen aus: entweder (N) einen normalen Würfel, (L) einen kurzen L-Würfel oder (S) den Spat-Würfel. Dann würfeln Sie mit dem gewählten Objekt und tippen jeweils die gewürfelte Zahl <1..6> gefolgt von der <Return> Taste ein. Der Rechner sagt Ihnen unter Verwendung der Bayesschen Regel, mit welcher Wahrscheinlichkeit Sie mit den Würfeltyp N, L oder S würfeln.

Anmerkung: Dieses und die folgenden Programme benutzen für die Würfel folgende Wahrscheinlichkeitsverteilungen:

	(N)	(L)	(S)	(Uk)	(Ul)
1	0.166	0.005	0.22	0.07	0.12
2	0.166	0.14	0.22	0.19	0.06
3	0.166	0.215	0.06	0.16	0.22
4	0.166	0.40	0.06	0.32	0.41
5	0.166	0.14	0.22	0.19	0.06
6	0.166	0.10	0.22	0.07	0.12

	(M)	(Ou)	(Og)
B	0.5	0.225	0.07
Z	0.5	0.225	0.52
R	0.0	0.55	0.41

N=normaler Würfel, L=kurzer L-Würfel, S=Spat-Würfel
Uk=kurzer U-Würfel, Ul=langer U-Würfel M=normale Münze
Ou=ungezinkter O-Würfel, Og=gezinkter O-Würfel.
B=Baum (Kopf) Z=Zahl R=Rand

2. Programm: BAYS/NUU

(Vgl. 3.4, Aufgabe 8). Sie wählen aus: entweder (N) einen normalen Würfel, (Uk) einen kurzen U-Würfel oder (Ul) einen langen U-Würfel... Das Programm arbeitet für diese Würfel analog zu BAYS/NLS (s.o.).

3. Programm: BAYS/MOO

(Vgl. 3.4, Aufgabe 3). Sie wählen aus: entweder (M) eine normale Münze, (Ou) einen ungezinkten O-Würfel oder (Og) einen gezinkten O-Würfel. (Ergebnisse: <B> Baum, <Z> Zahl, <R> Rand gefolgt von der <Return> Taste eingeben)...
Das Programm arbeitet für diese Würfel analog zu BAYS/NLS.

4. Programm: BAY/KIST

(Vgl. Abschnitt 3.4, Aufgabe 9). Sie haben drei Kisten mit
(I) 100% weißen Kugeln
(II) 75% weißen, 25% roten Kugeln,
(III) 25% weißen, 75% roten Kugeln.
Wählen Sie eine der Kisten und ziehen Sie mit Zurücklegen. Tippen Sie die gezogene Farbe <W> oder <R> gefolgt von der <Return> Taste ein. Der Rechner sagt Ihnen, mit welcher Wahrscheinlichkeit Sie aus Kiste I, II oder III ziehen.

5. Programm: BAY/4MZN

Fünf Personen: Christoph, Alexander, Herr Binom, Oliver und Wladimir haben vier Hypothesen über die Wahrscheinlichkeiten aufgestellt, mit denen sie beim gleichzeitigen Wurf von 4 Münzen 0 Köpfe, 1Kopf, ... 4 Köpfe erwarten.

	CHR	ALEX	BINOM	OLIV	WLAD
0	0.2	0.05	0.0625	0.15	0.025
1	0.2	0.2	0.25	0.2	0.1
2	0.2	0.5	0.375	0.25	0.75
3	0.2	0.2	0.25	0.25	0.1
4	0.2	0.05	0.0625	0.15	0.025

Sie können nun selber vier Münzen werfen, und nacheinander die Anzahl der gefallenen Köpfe <0..4> eingeben oder durch Drücken der Leer-Taste einen eingebauten Zufallsgenerator zum Erzeugen der Vierfachmünzwürfe benutzen. Sie beobachten, wie sich die Wahrscheinlichkeiten für die fünf Hypothesen durch wiederholte Anwendung der Bayesschen Regel ändern und wie sich allmählich die Hypothese von Herrn Binom (Binomialverteilung) durchsetzt, weil sie die Versuchsergebnisse besser vorhersagt als die anderen Hypothesen.

6. Programm: BOLZ/CHI

(Vgl. 4.3). Es handelt sich um ein Programm, mit dem man durch einen Chi-Quadrat-Anpassungstest (mit einem Parameter b) testen kann, ob die Wahrscheinlichkeitsverteilungen unserer (oder auch beliebiger anderer) Würfel einer Boltzmann-Verteilung genügen. Dazu geben Sie die Schwerpunkthöhen, die zu den 6 Würfellagen gehören und danach die gewürfelten absoluten Häufigkeiten ein. Dann werden Sie nach einem Startwert für den Parameter b (vgl. 4.3) gefragt und nach einer Schrittweite / Schrittzahl für seine Veränderung. Zu jedem Parameter b erhalten Sie eine Boltzmannverteilung und die Chi-Quadrat-Testgröße t, die diese Verteilung mit der eingegebenen Häufigkeitsverteilung vergleicht. Wenn der Wert dieser Testgröße t durch geeignete Parameterwahl hinreichend klein gemacht werden kann, dann sind die Versuchsergebnisse mit der Boltzmann-Hypothese vereinbar. Für nähere Erläuterungen studiere man unbedingt 4.3.
Das Programm hat mit der Bayesschen Regel nichts zu tun.

Die Programme liegen bei

- für den IBM PC (und kompatible Rechner) unter MS/DOS
- für den Apple II (und kompatible Rechner) unter CP/M.

Sie sind in der Sprache (Turbo) Pascal geschrieben. Die Disketten enthalten die Textfiles (etwa BAYS/NLS.PAS) und die sofort lauffähigen COM Files (etwa BAYS/NLS.COM).

Zum Starten der Programme laden Sie Ihr Betriebssystem MS/DOS (IBM) oder CP/M (Apple). Dann legen Sie die entsprechende Diskette ein und tippen den Programmnamen gefolgt von der <Return> Taste.

4. Test von Hypothesen

Während man bei den statistischen Problemen aus Abschnitt 3 stets zwischen verschiedenen Alternativen abwägen mußte (eine Alternative war immer die richtige), haben wir hier zu entscheiden, ob eine bestimmte Hypothese durch experimentelle Ergebnisse widerlegt wird oder nicht. Alternativen sind oft nicht spezifiziert. Solche Problemstellungen bearbeitet man mit Signifikanztests. Die Würfel regen zu interessanten Hypothesen an, die mit solchen Tests überprüft werden können.

Insbesondere werden wir untersuchen, inwiefern die Wurftechnik das Verhalten der Würfel beeinflußt, und ob sich die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Würfel berechnen lassen. Letztere Frage läßt sich durch einen Chi-Quadrat-Anpassungstest mit Parameter für die U- und S-Würfel (sowie beliebige Quader, die aber nicht zu unserem Würfelsatz gehören), positiv beantworten. Der Rechenaufwand erfordert einen Computer. Das Problem kann Inhalt eines Unterrichtsprojekts sein. Die Ergebnisse sind bisher in der Literatur noch nicht veröffentlicht.

Wichtig: man behandle im Unterricht Hypothesen über solche Würfel, die den Schülern aus Versuchen noch nicht bekannt sind!

4.1 Tests mit Binomialverteilung und Normalverteilung

1) U-und L-Würfel, Binomialverteilung

Man möchte zeigen, daß bei den beiden U-und L-Würfeln 4 öfter oben liegen wird als 3 ($P(4)>P(3)$). Versuche dazu, die Gegenhypothese $P(4)=P(3)$ auf dem 5% Signifikanzniveau bei einem Stichprobenumfang 50 (100) zu widerlegen.

Anleitung: Wenn bei einem Wurf 3 oben liegt, notieren wir "-", liegt 4 oben, so notieren wir "+" (bei anderen Ergebnissen würfeln wir weiter, bis 50 (100) +/- Ergebnisse vorliegen). Wenn 3 und 4 die gleiche Wahrscheinlichkeit hätten, dann müßte gelten: $P(+)=0.5$. Man teste diese Hypothese gegen die Alternative $P(+)>0.5$ auf dem 5% Signifikanzniveau.

2) kurzer U-Würfel, Binomialverteilung

Gelingt es Dir in einem Experiment vom Umfang 50 (100 ,500) für den kurzen U-Würfel die (plausible) Hypothese P(3)=P(5) auf dem 5% Signifikanzniveau zu widerlegen? (vergl. Aufgabe 1.)

3) O-Würfel, Binomialverteilung

a) Wir sind überzeugt, daß für den gezinkten O Würfel gilt: P(Z)>P(B). Gelingt es Dir, die Gegenhypothese P(B)=P(Z) auf dem 5% Signifikanzniveau zu widerlegen? (Versuchsumfang 50).
b) Läßt sich die Hypothese P(B)=P(Z) (P(B)=P(R)) für den ungezinkten Würfel widerlegen (Stichprobenumfang 100)? Wegen einer Anleitung vergleiche man Aufgabe 1.

4) langer U-Würfel, Normalverteilung
Abhängigkeit der Ergebnisse von der Wurftechnik

Eine Schulklasse ermittelte für den langen U-Würfel P(4)=40%. Dabei wurde ein 0.3 l Würfelbecher und ein Holztisch als Unterlage verwendet.
a) Führe dieses Experiment selber aus und überprüfe diese Hypothese P(4)=0.4 auf dem 5% Signifikanzniveau. Benutze einen zweiseitigen Test.
b) Verwende ein Teppichstück (Wollpullover/Handtuch) als Unterlage und lasse den Würfel aus einer festen Höhe (0.5 m) fallen. Es wäre möglich, daß sich der Wert P(4) dadurch erhöht, weil sich die stabilsten Lagen auf unebenen Unterlagen noch eher durchsetzen als auf glatten. Teste durch 100 Experimente, ob P(4/Teppich)>P(4/Holz) gilt, indem Du versuchst, die Alternative P(4/Teppich)=P(4/Holz) (=0.4) auf dem 5% Signifikanzniveau zu verwerfen.

5) S-Würfel (kurzer U-oder L-Würfel)
Abhängigkeit der Ergebnisse von der Wurftechnik

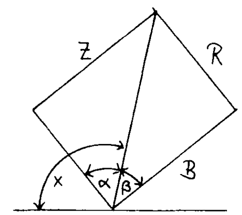
Man vermutet, daß die unstabilen Seiten unserer Würfel seltener auftreten, wenn die Würfel frei auf eine weiche Unterlage fallen und nicht mit einem Becher auf einen harten Tisch gestülpt werden. (Der Rand des Würfelbechers stützt instabile Lagen). Bei dem kurzen U-und L-Würfel sind die unstabilen Seiten 1-6, beim S-Würfel 3-4. Versuche, die Hypothese P(unstabil/Holz)=P(unstabil/Wollunterlage) auf dem 5% Signifikanzniveau zu verwerfen.

6) ungezinkter O-Würfel: Berechnung der Wahrscheinlichkeitsverteilung (I), Test mit Normalverteilung

Der O-Würfel kann auf dem Rand (R, Fläche 7.35 cm^2) oder auf den Kreisflächen (S, zusammen 5.09cm^2) landen. Wir stellen folgende Hypothese auf: Die Wahrscheinlichkeiten von R und S verhalten sich zueinander wie die Flächen, also P(S)=5.09/(5.09+5.35)=41% und P(R)=59%.
Man werfe den O-Würfel 100mal und teste, ob sich die Hypothese P(R)=59% auf dem 5% Signifikanzniveau halten läßt (zweiseitige Fragestellung).

7) ungezinkter O-Würfel: Berechnung der Wahrscheinlichkeitsverteilung (II), Test mit Normalverteilung

Es gibt für den O-Würfel eine weitere sehr plausible Hypothese. Die nebenstehende Skizze zeigt ihn im Aufriß. Beim Fall wird er stets mit der "Kreiskante" den Boden berühren. Der Aufschlagwinkel x ($\beta \leqslant x \leqslant 90^\circ + \beta$) wird für die Endlage entscheidend sein. Gilt $x<90^\circ$, so wird der Würfel in Stellung R kippen, sonst in Stellung S (= Z oder B). Wenn alle Winkel x gleiche Wahrscheinlichkeit besitzen, so müßte gelten: Die Wahrscheinlichkeiten P(R) und P(S) verhalten sich zueinander wie die Winkel $\alpha=35.8^\circ$ und $\beta=54.2^\circ$. Es müßte gelten: P(R)= 40% P(S)=60% (gerundet). Teste diese Hypothese auf dem 5% Signifikanzniveau.



8) ungezinkter O-Würfel, Binomial-/Normalverteilung

Stich auf der Seite Z eine kurze leichte Nadel oder einen dünnen Nagel ein, so daß B nicht mehr oben liegen kann. Wir vermuten, daß sich durch diese Operation die Wahrscheinlichkeit für Z nicht erhöht. (Die gesamte Wahrscheinlichkeit, die B besessen hat, kommt R zugute, denn von B fällt man ja auf R und nicht auf Z). Teste, ob man diese Vermutung aufrechterhalten kann.
Benutze dazu Deine eigenen Wahrscheinlichkeiten über den O-Würfel aus früheren Versuchen, oder führe einen Vorzeichentest durch.

4.2 Berechnung der Würfelwahrscheinlichkeiten. Wurftechnik. Tests mit der Chi-Quadrat-Verteilung

Wir besitzen intuitiv recht brauchbare Hypothesen über die Verteilungen der Würfel - auch dann, wenn wir sie nur ansehen, also noch keine Experimente ausführen dürfen (Vgl. 2.1). Welche Strategien liegen unserer Intuition zugrunde? Verschiedene Antworten sind denkbar:

A) Je größer die Auflagefläche F desto stabiler (wahrscheinlicher) ist die Lage. Die Wahrscheinlichkeiten verhalten sich zueinander wie die Größen ihrer Auflageflächen

B) Je höher der Schwerpunkt h desto instabiler (unwahrscheinlicher) ist die Lage. Die Wahrscheinlichkeiten verhalten sich zueinander wie die Kehrwerte 1/h der zugehörigen Schwerpunkthöhen

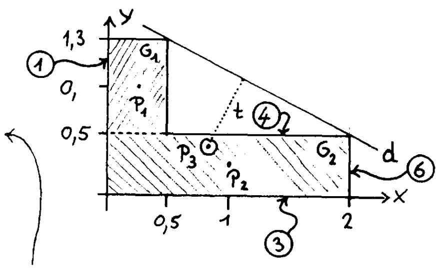
C) Kompromiß zwischen A und B: Die Wahrscheinlichkeiten verhalten sich zueinander wie die Quotienten F/h aus Auflagefläche und Schwerpunkthöhe.

Man könnte mit der Bayesschen Regel feststellen, welche der Strategien die brauchbarsten Hypothesen liefert. Wir wollen jetzt aber mit dem Chi-Quadrat-Anpassungstest (Signifikanztest) prüfen, ob sich überhaupt eine der Hypothesen halten läßt. Wenn der Anpassungstest nicht zur Verfügung steht, greife man einzelne Wahrscheinlichkeiten (etwa die für "4") heraus und teste mit der Normalverteilung.

Für den weniger experimentierfreudigen Leser verraten wir das Ergebnis: C ist eine sehr gute Faustregel, sie liefert i. a. die besten Hypothesen . Allerdings halten sie (abgesehen vom S-Würfel) bei hohen Stichprobenumfängen einem strengen Anpassungstest nicht stand. Für noch bessere Hypothesen sei auf 4.3 verwiesen.

Zur Berechnung der Grundflächen F und der Schwerpunkthöhen h ziehen wir die in 1. gemachten Maßangaben heran. (Die Maße können wegen der Handanfertigung der Würfel aber schwanken). Als Beispiel diene die Berechnung der Schwerpunkthöhen für den L-Würfel (Einheit cm bzw. cm^2):

Teilflächen: G1=0.4 G2=1
Schwerpunkte der Teilflächen:
P1=(0.25/0.9) P2=(1/0.25)
Gesamtschwerpunkt P3=(x3/y3) mit
x3=(G1·x1 + G2·x2)/(G1+G2)=0.786
y3=(G1·y1 + G2·y2)/(G1+G2)=0.436
Er hat zur Grundlinie d den
Abstand t=0.63



Nun lassen sich die Wahrschenlichkeitshypothesen PA, PB, PC berechnen, die zu den Strategien A, B, C gehören. Wir geben die Ergebnisse (mit den nötigen Zwischenrechnungen) in Tabellenform an:

langer L-Würfel

	1	2	3	4	5	6
F	1.20	2.00	4.08	4.80	2.00	3.12
h	1.21	1.20	0.63	0.44	1.20	0.79
1/h	0.82	0.83	1.59	2.30	0.83	1.27
F/h	0.99	1.67	6.48	11.02	1.67	3.97
PA	0.07	0.12	0.24	0.28	0.12	0.18
PB	0.11	0.11	0.21	0.30	0.11	0.17
PC	0.04	0.06	0.25	0.43	0.06	0.15

kurzer L-Würfel

	1	2	3	4	5	6
F	0.70	2.00	3.38	2.80	2.00	1.82
h	1.21	0.70	0.63	0.44	0.70	0.79
1/h	0.82	1.43	1.59	2.30	1.43	1.27
F/H	0.58	2.86	5.37	6.43	2.86	2.32
PA	0.06	0.16	0.27	0.22	0.16	0.14
PB	0.09	0.16	0.18	0.26	0.16	0.14
PC	0.03	0.14	0.26	0.32	0.14	0.11

langer U-Würfel

	1	2	3	4	5	6
F	3.12	2.60	4.80	4.80	2.60	3.12
h	1.00	1.20	0.76	0.54	1.20	1.00
1/h	1.00	0.83	1.31	1.86	0.83	1.00
F/h	3.12	2.17	6.31	8.91	2.17	3.12
PA	0.15	0.12	0.23	0.23	0.12	0.15
PB	0.15	0.12	0.19	0.27	0.12	0.15
PC	0.12	0.08	0.24	0.35	0.08	0.12

kurzer U-Würfel

	1	2	3	4	5	6
F	1.82	2.60	2.80	2.80	2.60	1.82
h	1.00	0.70	0.76	0.54	0.70	1.00
1/h	1.00	1.43	1.31	1.86	1.43	1.00
F/h	1.82	3.71	3.68	5.19	3.71	1.82
PA	0.13	0.18	0.19	0.19	0.18	0.13
PB	0.12	0.18	0.16	0.23	0.18	0.12
PC	0.09	0.19	0.18	0.26	0.19	0.09

S-Würfel

	1	2	3	4	5	6
F	2.80	2.80	0.99	0.99	2.80	2.80
h	0.70	0.70	1.00	1.00	0.70	0.70
1/h	1.43	1.43	1.00	1.00	1.43	1.43
F/h	4.00	4.00	0.99	0.99	4.00	4.00
PA	0.21	0.21	0.08	0.08	0.21	0.21
PB	0.19	0.19	0.13	0.13	0.19	0.19
PC	0.22	0.22	0.06	0.06	0.22	0.22

Aufgaben:

1) Stimmt unsere Intuition?

Betrachte den Würfel, für den Du experimentelle Daten besitzstund teste mit dem Chi-Quadrat-Anpassungstest, welche der drei Hypothesen PA, PB, PC verworfen werden müssen. Erinnerung: die Anpassungs-Testgröße ist

$$t = \sum_{i=1}^{6} \frac{(n_i - n p_i)^2}{n p_i},$$

wobei n_i die absoluten Häufigkeiten der sechs möglichen Ergebnisse, p_i die zugehörigen (hypothetischen) Wahrscheinlichkeiten sind. n ist die gesamte Versuchszahl. Man hat die Hypothese auf dem 5% (1%) Signifikanzniveau zurückzuweisen, wenn die Testgröße t den Wert 11.1 (15.1) überschreitet. (Die Anzahl der Freiheitsgrade ist 5.)

2) "Schärfe" des Anpassungstests

Würfle mit einem der L-, U-oder S-Würfel. Wir wollen feststellen, nach wie vielen Versuchen man mit dem Chi-Quadrat-Anpassungstest auf dem 5% Signifikanzniveau die (natürlich falsche) Hypothese zurückweisen kann, daß es sich um einen normalen Würfel handelt. (Wir intersessieren uns also dafür, wie "scharf" der Chi-Quadrat-Anpassungstest ist.) Berechne dazu nach 12, 24, 48, 96 ... Versuchen die Chi-Quadrat-Testgröße und schaue, wann der kritische Wert 11.1 (5% Signifikanzniveau) und 15.1 (1% Signifikanzniveau) überschritten wird. Vorschlag: Programmiere einen Rechner so, daß er nach jedem Versuchsausgang den aktuellen Chi-Quadrat-Testwert ausgibt.

3) Beliebiger Würfel, Abhängigkeit von der Wurftechnik, Chi-Quadrat-Unabhängigkeitstest

Es soll untersucht werden, ob die Wurftechnik einen Einfluß auf die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Würfels hat. Wirf dazu den Würfel 100 mal in einem Würfelbecher, den Du auf den Holztisch stülpst. Wirf ihn 100 mal ohne Becher mit etwas Schwung horizontal auf den Tisch, so daß er rollt. Laß ihn dann 100 mal aus konstanter Höhe auf eine Wollunterlage frei fallen (Würfelarbeit teilen!). Notiere dann die Ergebnisse in einer 9-Felder-Tafel:

Becher	Rollen	Wollunterlage		
n_{11}	n_{12}	n_{13}	a_1	Lage A (3 oder 4)
n_{21}	n_{22}	n_{23}	a_2	Lage B (2 oder 5)
n_{31}	n_{32}	n_{33}	a_3	Lage C (1 oder 6)
$b_1 = 100$	$b_2 = 100$	$b_3 = 100$	300	

und führe einen Chi-Quadrat-Unabhängigkeitstest durch. Dabei ist die Testgröße t so definiert:

$$t = \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\left(n_{ij} - \frac{a_i b_j}{n}\right)^2}{\frac{a_i b_j}{n}} \quad (n = 300).$$

Man muß die Hypothese der Unabhängigkeit auf dem 5% Signifikanzniveau ablehnen, wenn die Testgröße den Wert 9,5 überschreitet (4 Freiheitsgrade).

4.3 Der Boltzmannsche Verteilungssatz, die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Würfel

In Abschnitt 4.2 haben wir "aus dem Stehgreif" drei plausible Hypothesen über die Wahrscheinlichkeitsverteilungen unserer Würfel formuliert. Sie sind für grobe Abschätzungen brauchbar, wenngleich sie einem Chi-Quadrat-Anpassungstest meist nicht standhalten.

Tatsächlich gibt es aber einen Satz der statistischen Mechanik, den Boltzmannschen Verteilungssatz, der das Verhalten von statistischen Systemen (etwa von Gasen in einem Schwerkraftfeld) beschreibt. Der Satz besagt, daß die Wahrscheinlichkeit eines Zustandes z (der Ort eines Gaspartikels) in Abhängigkeit von der Energie E(z) des Zustandes gegeben ist durch

$$P(z) = c \cdot e^{-\frac{E(z)}{kT}}$$

Dabei ist k die Boltzmannkonstante, T die absolute Temperatur und c eine Konstante, die dafür sorgt, daß die Summe der Wahrscheinlichkeiten 1 ergibt. Je höher also die Energie E desto unwahrscheinlicher ist der Zustand z. Wir wollen prüfen, ob der Boltzmannsche Verteilungssatz auf unsere Würfel anwendbar ist.

Da die Energie, die zur Lage eines Würfels gehört, direkt proportional zur Höhe des Schwerpunktes ist, folgt aus dem Boltzmannschen Verteilungssatz: Je höher der Schwerpunkt, desto unwahrscheinlicher ist die Lage. Das ist die qualitative Aussage der Hypothese B aus 4.2. Während wir aber dort einen umgekehrt proportionalen Zusammenhang unterstellten: P(i) = c/h(i), liefert der Boltzmannsche Verteilungssatz einen exponentiellen Zusammenhang:

$$P(i) = c \cdot e^{-bh(i)}$$

Dabei sind h(i) ($1 \leqslant i \leqslant 6$) die Schwerpunkthöhen, die zu den Würfellagen gehören. Unser Problem besteht nun darin, daß wir keinen Wert für die Konstante b kennen. (Bei Gasen hängt $b \mathrel{\hat{=}} 1/kT$ von der Temperatur T ab.)

Betrachten wir als Beispiel den langen U-Würfel mit den Schwerpunkthöhen:

i	1	2	3	4	5	6
h(i)	1.0	1.2	0.761	0.539	1.2	1.0

und schauen wir, welche Hypothesen sich für die Werte b=2, b=3 und b=4 ergeben. (Der Normierungsfaktor c ergibt sich aus der Bedingung P(1)+P(2)+...+P(6)=1.)

b	c	1	2	3	4	5	6	t	m
2	1	0.134	0.090	0.216	0.337	0.090	0.134	19.2	-760.81
3	2.2	0.109	0.060	0.224	0.437	0.060	0.109	7.7	-754.47
4	4.6	0.085	0.038	0.220	0.535	0.038	0.085	56.7	-775.46

Wir vergleichen die Hypothesen mit einem Versuchsergebnis, das sich bei einem Experiment vom Umfang 481 ergab (a(i) und r(i) sind die absoluten bzw. relativen Häufigkeiten.)

i	1	2	3	4	5	6
a(i)	42	33	111	197	38	60
r(i)	0.087	0.685	23.02	0.408	0.078	0.124

Der Vergleich geschieht über die Chi-Quadrat-Testgröße

$$t = \sum_{i=1}^{6} \frac{(a(i) - nP(i))^2}{nP(i)} ,$$

deren Werte wir in der obigen Tabelle bereits mit aufgeführt haben. Für b=3 ist die Übereinstimmung besser als für b=2 oder b=4.

Der Chi-Quadrat-Anpassungstest besteht nun darin, den Wert für den Parameter b zu finden, bei dem die Übereinstimmung optimal ist. Man schätzt also b aus der Stichprobe. Dann untersucht man, ob der Testwert t für diesen Parameter oberhalb der kritischen Grenze der Chi-Quadrat-Verteilung (jetzt mit 4 Freiheitsgraden, weil wir einen Parameter aus der Stichprobe bestimmt haben) liegt.

Es gibt zwei Methoden zur Schätzung des Parameters:

1) die Chi-Quadrat Minimum Methode:
Hierbei berechnet man b so, daß der Testwert t minimal wird. Das haben wir oben schon angedeutet, b wird zwischen 2 und 4 liegen.

2) die Maximum likelihood Methode:
Für jeden Wert von b bestimmt man die Wahrscheinlichkeiten P(1)...P(6) und berechnet hieraus (mit der Pfadregel) die Wahrscheinlichkeit Q, mit der das gerade beobachtete Versuchsergebnis a(1)...a(6) eingetreten wäre.

$$Q = p(1)^{a(1)} * p(2)^{a(2)} * \dots * p(6)^{a(6)}$$

Nun wählt man für b den Wert, bei dem diese Wahrscheinlichkeit Q am größten wird (daher der Name maximum likelihood). Die Werte von Q sind i. a. sehr klein, es ist daher bequemer, den Logarithmus von Q zu maximieren:

$$m = \log Q = a(1) * \log p(1) + \ldots + a(6) * \log p(6)$$

Die Werte für m haben wir in der obigen Tabelle schon aufgeführt. Wie man sieht, liefert auch diese Methode einen Wert für b zwischen 2 und 4.

Zur Minimierung von t bzw. Maximierung von m berechnen wir mit einem Computer zu jedem Wert b zwischen 2 und 4 die Verteilung p(1)...p(6) und die zugehörigen Werte für t und m. Wir erhalten folgende Tabelle

i	1	2	3	4	5	6	(481) t	m
h(i)	1.000	1.200	0.761	0.539	1.200	1.000		
a(i)	42	33	111	197	38	60		
r(i)	0.087	0.069	0.231	0.410	0.079	0.125		
b=2.30	0.127	0.080	0.220	0.366	0.080	0.127	9.5	-755.86
b=2.40	0.124	0.077	0.221	0.376	0.077	0.124	7.4	-754.80
b=2.50	0.122	0.074	0.222	0.386	0.074	0.122	6.0	-754.03
b=2.60	0.120	0.071	0.223	0.396	0.071	0.120	5.1	-753.55
b=2.70	0.117	0.068	0.223	0.406	0.068	0.117	4.8	-753.36
b=2.80	0.115	0.065	0.224	0.416	0.065	0.115	5.1	-753.45
b=2.90	0.112	0.063	0.224	0.426	0.063	0.112	6.0	-753.82
b=3.00	0.109	0.060	0.224	0.437	0.060	0.109	7.5	-754.47

aus der wir mit ausreichender Genauigkeit b=2.7 entnehmen (t ist hier minimal, m ist maximal).

Der Testwert beträgt t=4.8, er liegt weit unterhalb der kritischen Grenze 9.5 (5% Signifikanzniveau) der Chi-Quadrat-Verteilung mit 4 Freiheitsgraden.

Ergebnis: die Hypothese, daß die Wahrscheinlichkeiten des langen U-Würfels (bei Verwendung eines 0.3 l Würfelbechers und einer Holzunterlage) einer Boltzmann-Verteilung genügen, ist mit unseren Versuchsergebnissen vereinbar. (Das ist um so erstaunlicher, als der Anpassungstest für große Stichproben sehr scharf reagiert.) Die zugehörige Verteilung lautet:

i	1	2	3	4	5	6
p(i)	0.117	0.068	0.223	0.406	0.068	0.117

oder analytisch: $p(i) = 1.74\, e^{-2.7\, h(i)}$

Damit noch nicht genug:
Lassen wir den gleichen Würfel wiederholt aus 0.5 m Höhe auf einen Wollteppich fallen, so ergibt sich eine ganz andere Verteilung. Ein Experiment vom Umfang 150 lieferte folgende absolute und relative Häufigkeiten

i	1	2	3	4	5	6
a(i)	7	3	42	86	2	10
r(i)	0.047	0.020	0.280	0.573	0.0133	0.066

Wie schon in früheren Aufgaben angedeutet, nimmt durch die veränderten Versuchsbedingungen die Wahrscheinlichkeit für instabile Lagen beträchtlich ab.

Folgende Tabelle belegt, daß aber auch dieses Ergebnis mit der Hypothese einer Boltzmann-Verteilung vereinbar ist:

i	1	2	3	4	5	6	(150) t	m
h(i)	1.000	1.200	0.761	0.539	1.200	1.000		
a(i)	7	3	42	86	2	10		
r(i)	0.047	0.020	0.280	0.573	0.013	0.067		
b=4.60	0.071	0.028	0.212	0.590	0.028	0.071	6.1	-173.36
b=4.70	0.069	0.027	0.211	0.598	0.027	0.069	5.9	-173.19
b=4.80	0.066	0.025	0.209	0.607	0.025	0.066	5.8	-173.09
b=4.90	0.064	0.024	0.207	0.616	0.024	0.064	5.8	-173.05
b=5.00	0.062	0.023	0.206	0.624	0.023	0.062	5.9	-173.06
b=5.10	0.060	0.022	0.204	0.632	0.022	0.060	6.2	-173.14
b=5.20	0.058	0.021	0.202	0.640	0.021	0.058	6.5	-173.27

Die Schätzung liefert jetzt einen wesentlich höheren Parameter b=4.9 und eine Testgröße t=5.8. Sie liegt wieder weit unter der kritischen Grenze. Die zugehörige Verteilung ist

i	1	2	3	4	5	6
p(i)	0.064	0.024	0.207	0.616	0.024	0.064

oder analytisch $p(i) = 8.63\, e^{-4.9\, h(i)}$

Wenn man die Konstante b=1/(kT) thermodynamisch deutet, kann man sagen: durch freies Fallen auf die Wollunterlage ist die Temperatur T des Systems gesunken (je größer b desto kleiner T). In der Tat sinkt bei kleiner Temperatur die Aufenthaltswahrscheinlichkeit für hochenergetische Zustände, die stabilen Lagen mit niedrigen Lageenergien werden bevorzugt.

Diese Ergebnisse sind kein Produkt einer speziellen Stichprobe. Der Leser erkennt aus folgenden Tabellen, daß sie auch für den kurzen U-Würfel und den S-Würfel gelten. Die Tabellen selbst brauchen wir jetzt nicht weiter zu kommentieren.

kurzer U-Würfel, 0.3 l Würfelbecher, Holzunterlage

i	1	2	3	4	5	6	(268) t	m
h(i)	1.000	0.700	0.761	0.539	0.700	1.000		
a(i)	18	49	48	82	55	16		
r(i)	0.067	0.183	0.179	0.306	0.205	0.060		
b=3.00	0.077	0.190	0.158	0.308	0.190	0.077	2.6	-445.04
b=3.10	0.075	0.190	0.157	0.313	0.190	0.075	2.3	-444.89
b=3.20	0.073	0.190	0.156	0.318	0.190	0.073	2.2	-444.80
b=3.30	0.071	0.190	0.155	0.323	0.190	0.071	2.1	-444.77
b=3.40	0.069	0.190	0.154	0.328	0.190	0.069	2.2	-444.80
b=3.50	0.066	0.190	0.153	0.334	0.190	0.066	2.4	-444.88
b=3.60	0.064	0.190	0.152	0.339	0.190	0.064	2.6	-445.02
b=3.70	0.063	0.190	0.151	0.344	0.190	0.063	3.0	-445.22

kurzer U-Würfel, aus 0.5 m Höhe, Wollteppich

i	1	2	3	4	5	6	(150) t	m
h(i)	1.000	0.700	0.761	0.539	0.700	1.000		
a(i)	3	26	21	68	31	1		
r(i)	0.020	0.173	0.140	0.453	0.207	0.007		
b=5.80	0.031	0.179	0.125	0.455	0.179	0.031	4.5	-209.23
b=6.00	0.029	0.177	0.123	0.465	0.177	0.029	4.2	-208.99
b=6.20	0.027	0.175	0.120	0.475	0.175	0.027	4.1	-208.83
b=6.40	0.025	0.173	0.117	0.485	0.173	0.025	4.2	-208.77
b=6.60	0.024	0.171	0.115	0.496	0.171	0.024	4.4	-208.79
b=6.80	0.022	0.169	0.112	0.506	0.169	0.022	4.8	-208.90
b=7.00	0.020	0.167	0.109	0.516	0.167	0.020	5.3	-209.09
b=7.20	0.019	0.165	0.106	0.526	0.165	0.019	6.0	-209.36

S-Würfel, 0.3 l Würfelbecher, Holzunterlage

i	1	2	3	4	5	6	(490) t	m
h(i)	0.700	0.700	1.000	1.000	0.700	0.700		
a(i)	105	101	36	35	109	104		
r(i)	0.214	0.206	0.073	0.071	0.222	0.212		
b=3.00	0.208	0.208	0.084	0.084	0.208	0.208	2.4	-833.86
b=3.20	0.210	0.210	0.080	0.080	0.210	0.210	1.2	-833.28
b=3.40	0.212	0.212	0.076	0.076	0.212	0.212	0.6	-832.93
b=3.60	0.214	0.214	0.073	0.073	0.214	0.214	0.3	-832.81
b=3.80	0.216	0.216	0.069	0.069	0.216	0.216	0.5	-832.91
b=4.00	0.217	0.217	0.065	0.065	0.217	0.217	1.2	-833.22
b=4.20	0.219	0.219	0.062	0.062	0.219	0.219	2.2	-833.73
b=4.40	0.221	0.221	0.059	0.059	0.221	0.221	3.8	-834.44

[illegible]-Würfel, 0.5 m, Wollteppich

i	1	2	3	4	5	6	(450) t	m
h(i)	0.700	0.700	1.000	1.000	0.700	0.700		
a(i)	103	104	6	6	122	109		
r(i)	0.229	0.231	0.013	0.013	0.271	0.242		
b=9.00	0.242	0.242	0.016	0.016	0.242	0.242	2.6	-671.11
b=9.20	0.242	0.242	0.015	0.015	0.242	0.242	2.3	-670.97
b=9.40	0.243	0.243	0.014	0.014	0.243	0.243	2.2	-670.89
b=9.60	0.243	0.243	0.014	0.014	0.243	0.243	2.1	-670.85
b=9.80	0.244	0.244	0.013	0.013	0.244	0.244	2.1	-670.85
b=10.00	0.244	0.244	0.012	0.012	0.244	0.244	2.2	-670.90
b=10.20	0.244	0.244	0.011	0.011	0.244	0.244	2.4	-670.98
b=10.40	0.245	0.245	0.011	0.011	0.245	0.245	2.6	-671.10

Als Ergebnis halten wir fest:

1) Die Wahrscheinlichkeiten, die zu den Würfeln gehören, kann man nicht genau berechnen. Sie hängen in beträchtlichem Maße von den Versuchsbedingungen ab.

2) Die <u>Form</u> der Wahrscheinlichkeitsverteilungen ist stets die gleiche. Sie genügt der Beziehung:

$$p(i) = c \cdot e^{-b \cdot h(i)} \qquad \text{(Boltzmann-Verteilung).}$$

3) je "freier" die Würfel geworfen werden und je unebener die Unterlage desto unwahrscheinlicher werden instabile Lagen (große Schwerpunkthöhen) angenommen. Desto größer ist der Parameter b.

4) Diese Aussagen gelten nur für Objekte mit "regulären" Formen. Für die L-Würfel (insbesondere den langen) gelten sie nur angenähert, für den O-Würfel gelten sie nicht. Hier wird die Lage R mit höherer Wahrscheinlichkeit angenommen als die Lagen B und Z, obwohl der Schwerpunkt für R höher liegt. (Der Parameter b wird negativ.)

Wir beschließen unsere Ausführungen durch eine Anmerkung zu den L-Würfeln:

Folgende Tabellen protokollieren einen-Chi-Quadrat-Anpassungstest

für den kurzen L-Würfel, 0.3 l Becher, Holzunterlage:

i	1	2	3	4	5	6		
h(i)	1.210	0.700	0.630	0.436	0.700	0.786		
a(i)	1	56	86	159	57	41	(400)	
r(i)	0.002	0.140	0.215	0.397	0.142	0.102	t	m
b=3.40	0.027	0.150	0.191	0.369	0.150	0.112	11.6	-608.11
b=3.60	0.024	0.148	0.190	0.382	0.148	0.108	9.4	-606.54
b=3.80	0.021	0.145	0.189	0.395	0.145	0.105	8.0	-605.38
b=4.00	0.018	0.142	0.188	0.409	0.142	0.101	7.2	-604.63
b=4.20	0.016	0.139	0.187	0.422	0.139	0.097	7.1	-604.26
b=4.40	0.014	0.136	0.185	0.435	0.136	0.093	7.7	-604.28
b=4.60	0.013	0.133	0.184	0.448	0.133	0.090	8.9	-604.66
b=4.80	0.011	0.130	0.182	0.461	0.130	0.086	10.7	-605.40

für den langen L-Würfel, 0.3 l Becher, Holzunterlage:

i	1	2	3	4	5	6		
h(i)	1.210	1.200	0.630	0.436	1.200	0.786		
a(i)	3	30	154	210	35	68	(500)	
r(i)	0.006	0.060	0.308	0.420	0.070	0.136	t	m
b=2.40	0.062	0.063	0.248	0.394	0.063	0.170	37.2	-718.71
b=2.60	0.055	0.057	0.250	0.414	0.057	0.167	33.2	-715.44
b=2.80	0.050	0.051	0.252	0.434	0.051	0.163	32.1	-713.64
b=3.00	0.044	0.046	0.253	0.453	0.046	0.158	34.0	-713.23
b=3.20	0.040	0.041	0.253	0.471	0.041	0.154	38.8	-714.12
b=3.40	0.035	0.036	0.253	0.490	0.036	0.149	46.6	-716.24
b=3.60	0.031	0.032	0.252	0.507	0.032	0.144	57.6	-719.51

Für den kleinen L-Würfel kann die Hypothese einer Boltzmann-Verteilung bei einem Testwert t=7.1 auf dem 5% Signifikanzniveau noch nicht zurückgewiesen werden. Der kritische Wert läge bei 9.5 (4 Freiheitsgrade).

Beim langen L-Würfel dagegen übertrifft der Testwert t=32 sogar den kritischen Wert für das 1% Signifikanzniveau (13.3) erheblich.

Wie ist das zu erklären?
Betrachten wir in der Zeile h(i) die Schwerpunkthöhen, so erkennen wir: h(1), h(2) und h(5) sind beim langen L-Würfel fast identisch. Jede Boltzmann-Verteilung muß also für die Lagen 1, 2, 3 (fast) gleiche Wahrscheinlichkeiten liefern. Tatsächlich sind bei unserem langen L-Würfel aber die Lagen 2 und 5 sehr viel stabiler als die höchst kritische Lage 1, die praktisch nie auftritt.

Dieser Unterschied zwischen Hypothese und Versuchsergebnis wird durch den Chi-Quadrat-Test aufgedeckt. Er ist auf die "exotische" Form des L-Würfels zurückzuführen.

Die relativ guten Ergebnisse für den kleinen L-Würfel sind darauf zurückzuführen, daß die exotische Lage 1 einen viel höheren Schwerpunkt besitzt als die übrigen Lagen. Ihr wird folglich durch die Boltzmann-Verteilungen eine sehr viel kleinere Wahrscheinlichkeit zugewiesen.

Das Programm BOLZ/CHI:

Der Leser, der eigene Experimente mit dem Chi-Quadrat-Anpassungstest und der Boltzmann-Verteilung machen möchte, findet als Werkzeug ein Programm "BOLZ/CHI" auf beiliegender Diskette. Mit ihm wurden obige Tabellen berechnet. Eine Kurzbeschreibung findet sich in 3.5.

LITERATUR

Zu Abschnitt 2 und 3:
Der Leser, der ausführliche Erläuterungen zur Bayesschen Methode und dem subjektiven Wahrscheinlichkeitsbegriff wünscht, findet (auch unterrichtspraktisch ausgearbeitete) Darstellungen in

W. Riemer
Neue Ideen zur Stochastik, Mannheim 1985.

W. Riemer
Eine neue Sicht der Bayesschen Regel. Stochastik in der Schule 3/86.

W. Riemer
Neue Aspekte in der Beurteilenden Statistik mit dem Computer und der Regel von Bayes. Der Mathematikunterricht 3/88.

Zu Abschnitt 4:
Die Chi-Quadrat-Methode (mit und ohne Abhängigkeit von einem Parameter) wird elementar dargestellt in

J. Pfanzagl
Allgemeine Methodenlehre der Statistik Band II, Berlin 1974.