Experimentieren mit Quadern

Genese eines –auch in der Statistik tragfähigen - Wahrscheinlichkeitsbegriffs

Vorbemerkung

Im Folgenden untersuchen wir, wie man schon in Kindern tief verwurzelte (subjektivistisch geprägte) statistische Intuitionen mobilisiert. Wir werden diese wertvollen Vorstellungen handelnd systematisieren, bis zum Begriff der Hypothese ausbauen und anschließend mit Hypothesen arbeiten. Wir benutzen *Quader, die im Gegensatz zu den klassischen Würfeln und Glücksrädern mehrere sinnvolle Hypothesen zulassen und erst dadurch den hypothetischen Charakter von Wahrscheinlichkeiten verdeutlichen*. Andererseits machen sie - im Gegensatz zu völlig unsymmetrischen Reißnägeln oder gezinkten Würfeln - die Zusammenhänge zwischen Wahrscheinlichkeiten und relativen Häufigkeiten im wahrsten Sinne des Wortes greifbar.
„Gedankliches Chaos", das sich häufig beim Verschwimmen der genannten Begriffe breitmacht, wird so vermieden (Schülerzitat: "relative Wahrscheinlichkeiten".)

Begriffsbildungen im Dienste der Statistik

1 Wahrscheinlichkeiten als Hypothesen

Die Integration statistischer Aspekte in die Wahrscheinlichkeitsrechnung muss "im Herzen" der Stochastik ansetzen, bei den Begriffen Wahrscheinlichkeit, Wahrscheinlichkeitshypothese und ihren Interpretationen. Anders als bei vielen Begriffen in den "klassischen" Lernbereichen Algebra und Geometrie ist die Bedeutung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs nicht im Rahmen innermathematischer Systematik erfahrbar. Die Entwicklung einer adäquaten Vorstellung erfordert vielfältige experimentelle Erfahrungen, die auf unteren Curriculumstufen durchaus spielerischen Charakter dürfen. So stellen Fischbein/Gazit fest:

"New intuitive attitudes can be developed only through the personal involvement of the learner in a practical activity. Intuitions (cognitive beliefs) cannot be modified by verbal explanations only. Therefore a teaching program which intends to develope an improved and efficient intuitive background for probability concepts and strategies, along with the corresponding formal knowledge, must provide the learner with frequent opportunities to experience actively, even emotionally, with stochastic situations. In such situations the learner will confront his plausible expectations with empirically obtained outcomes."

Laplacescher Wahrscheinlichkeitsbegriff

In der Schulpraxis dominieren traditionsgemäß nahezu ausschließlich Laplacesche Experimente, bei denen sich Wahrscheinlichkeiten aufgrund von Symmetrien als Quotienten von "günstigen" und „möglichen" Fällen berechnen lassen. Hier gibt es zu einer richtigen Hypothese keine sinnvollen Alternativen und damit verschwindet der hypothetische Charakter von Wahrscheinlichkeiten. Experimente benutzt man ausschließlich, um die Konvergenz relativer Häufigkeiten gegen diese (a priori bekannten) Wahrscheinlichkeiten zu demonstrieren. Genauso wenig wie der Begriff der Hypothese hat hier das in Alltagserfahrungen gewonnene, vielfach subjektivistisch geprägte Vorwissen einen Platz. Im Gegenteil, es wird durch das zu enge Laplacesche Konzept "erdrückt". Auch in der Fülle psychologischer Untersuchungen zur Genese des Wahrscheinlichkeitsbegriffs spiegelt sich diese Tatsache wider. Während man im Anschluss an Piagets bahnbrechende Untersuchungen lange Zeit ausschließlich die Entwicklung Laplacescher und kombinatorischer Konzepte studierte, hat in neuerer Zeit die Untersuchung alltäglicher, subjektivistisch geprägter Wahrscheinlichkeitsvorstellungen ein sehr viel reichhaltigeres Bild von den kindlichen Fähigkeiten entstehen lassen (Hawkens/Kapida, Schrage), die wir im folgenden ausnutzen werden. Fischbein fasst zusammen:

"An important theoretical conclusion may be drawn. Probabilistic thinking and proportional reasoning (damit ist das Laplacesche Konzept gemeint) are based on two distinct mental schemata. Certainly, probability computations may require ratio comparisons and calculations, but probability as a specific mental attitude, does not necessarily imply a formal understanding of proportion concepts. This finding is in accordance with other results obtained before. Yost et al. (1962), Goldberg (1966) have shown that one can identify, even in preschool children, correct probability estimations while proportional reasoning is still deficient."

Frequentistischer Wahrscheinlichkeitsbegriff
In der Unterrichtspraxis wird der Laplacesche Wahrscheinlichkeitsbegriff meist um den frequentistischen Aspekt bereichert, der Wahrscheinlichkeiten als Grenzwerte relativer Häufigkeiten in unendlich langen Versuchsserien beschreibt (Beispiel: Reißnagel.) Wegen der Endlichkeit allen Experimentierens und des Wunsches diesen (in der Laplaceschen Welt eindeutig bestimmten) Grenzwert möglichst genau zu ermitteln, sind Zufallsschwankungen (so paradox das klingt) vom Lehrer emotional unerwünscht. Das folgende Zitat beschreibt leider die Realität recht genau:

"Die konkrete Durchführung der Zufallsexperimente zeigte deutlich ... der Lehrer muss merken, wann die Ergebnisse außerhalb jeglicher Erwartung, was durchaus vorkommen kann, liegen. Der Lehrer muss auf den zufälligen Ausgang der Zufallsexperimente angemessen vorbereitet werden." (Schröder 1981 S. 222.)

Es drängt sich die Einsicht auf, dass es aus dem Blickwinkel der Statistik viel wichtiger wäre, ein Gefühl für die Schwankungen der relativen Häufigkeiten in endlichen Versuchsserien zu entwickeln ("schwaches Gesetz der großen Zahlen") als den Blick auf die Konvergenz in "unendlichen" Versuchsserien zu fixieren ("starkes Gesetz der großen Zahlen").

"Prognostischer" Wahrscheinlichkeitsbegriff
Es zeigt sich, dass sowohl die Laplacesche Wahrscheinlichkeitsinterpretation (Wahrscheinlichkeit als Verhältnis der Anzahl günstiger zur Anzahl möglicher Fälle) als auch die frequentistische Deutung (Wahrscheinlichkeit als Grenzwert der relativen Häufigkeit) zu kurz greifen, wenn man nicht den "prognostischen Aspekt" herausarbeitet. Wahrscheinlichkeiten sind Prognosen relativer Häufigkeiten in zukünftigen langen Versuchsserien. Oder noch besser: Wahrscheinlichkeiten sind Prognosen, um die die relativen Häufigkeiten in zukünftigen Versuchsserien schwanken werden im Hinblick auf die Grundgedanken Beurteilender Statistik ist aber ebenso unverzichtbar, dass man die Möglichkeit verschiedener (manchmal gleichberechtigter, mitunter aber auch verschieden glaubwürdiger) Wahrscheinlichkeiten und damit deren hypothetischen Charakter in der Vorstellungswelt der Schüler verankert.

Wir halten fest: Ein für die Statistik tragfähiger Wahrscheinlichkeitsbegriff muss
(1) prognostischen Charakter haben, d. h. es muss deutlich werden, dass Wahrscheinlichkeiten Prognosen darstellen, um die die relativen Häufigkeiten schwanken werden.
(2) Er muss hypothetischen Charakter haben, d. h. Wahrscheinlichkeitsannahmen, die sich in Versuchen nicht bewähren, müssen verworfen und durch bessere ersetzt werden.
(3) Sollten aus lernpsychologischen Gründen subjektive Aspekte nicht ausgeschlossen werden. Aussagen der folgenden Form müssen erlaubt sein: "Nach Lage der Versuchsergebnisse halte ich Hypothese A für glaubwürdiger als Hypothese B."

Solche Aussagen bereiten intuitiv Ideen vor, die dem Testen von Hypothesen zugrunde liegen.

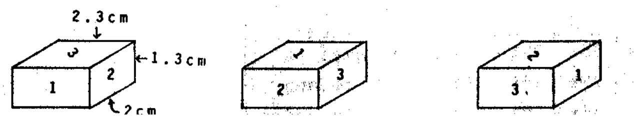
2 Hypothesen aufstellen

2.1 Hypothesen schätzen

Die Attribute "prognostisch", "hypothetisch" und "subjektivistisch" mögen anspruchsvoll klingen, wenn man sie mit dem Wahrscheinlichkeitsbegriff auf der Sekundarstufe 1 verbinden möchte. Sie sind es nicht, wenn man sie an konkretem Material "festmacht" und ihre Bedeutung mit den Kindern aushandelt. Statt gleich zu Beginn formal zu erklären, was Wahrscheinlichkeiten "sind", lernt das Kind, wie man mit Wahrscheinlichkeiten und Wahrscheinlichkeitshypothesen umgeht. Wir müssen "wegkommen von direkter Unterweisung in der herkömmlichen Art und hinkommen zu interaktiven Prozessen." (Weinert/Kluve 1984, S. 102). "Der Lehrer erzählt dem Kind nicht, was es zu tun hat, sondern er beginnt eine Interaktion, in der beide, Kind und Lehrer für die Bewältigung der Aufgabe verantwortlich sind." Diese Sicht der Einübung in neue Begriffe, die erfahrene Lehrer intuitiv stets befolgen, wurde durch Interaktionsanalysen (Bauersfeld/Voigt) auch empirisch belegt. Im Hinblick auf eine am Handeln orientierte Genese des von uns angestrebten Wahrscheinlichkeitsbegriffs haben sich Quader und andere Zufallsobjekte mit partiellen Symmetrien ausgezeichnet bewährt. Einerseits lassen sie im Gegensatz zu Würfeln oder Glücksrädern in gewissen Grenzen mehrere sinnvolle Wahrscheinlichkeitsannahmen zu. Der hypothetische Charakter von Wahrscheinlichkeiten wird sinnfällig. Andererseits wird (im Gegensatz zum Reißnagel) der Unterschied zwischen Wahrscheinlichkeiten und relativen Häufigkeiten greifbar - alle akzeptablen Wahrscheinlichkeitshypothesen sind partiell symmetrisch, die relativen Häufigkeiten nur in seltenen Ausnahmefällen. Der prognostische Aspekt, der das Verhalten auf lange Sicht beschreibt, prägt sich ein.

Primarstufe, Orientierungsstufe

So lassen sich schon in der Primarstufe und am Anfang der Sekundarstufe I bekannte Würfelspiele wie "Fang den Hut" oder "Mensch ärgere Dich nicht" modifizieren, indem man neben dem normalen Laplace-Würfel auch verschieden beschriftete Holzquader bereitstellt:



Vor jedem Wurf darf der Spieler den "Würfel" wählen, der in der momentanen Spielsituation den größten Erfolg verspricht. Ohne Zwang zur Verbalisierung handeln Kinder in dieser stochastischen Situation sinnvoll. Sehr schnell erkennen sie, dass sich die Ergebnisse bei keinem der Quader vorhersagen lassen (Zufallsbegriff). Sie treffen aber ihre Wahl so, dass gewünschte Zahlen auf möglichst großen, unerwünschte auf möglichst kleinen Seiten liegen. Sie besitzen klare Vorstellungen von ihren Chancen. Diese Beobachtung wird gestützt durch neuere Untersuchungen, die belegen, dass auch Primarstufenkinder über (subjektivistisch geprägte) Wahrscheinlichkeitsvorstellungen verfügen - lange bevor sie das Stadium der formalen Operationen erreicht haben. Die im Anschluss an Piaget/Inhelder (1951) lange Zeit vorherrschende "Lehrmeinung", dass ein Wahrscheinlichkeitsbegriff erst mit diesem Stadium erworben werden kann, gründet darin, dass in den Untersuchungen fast ausschließlich mit "Laplaceschem Gedankengut" gearbeitet wurde, das den Verhältnisbegriff und die Verfügbarkeit kombinatorischer Aspekte erfordert.

Sekundarstufe I

Kinder, die (ab Klassenstufe 6/7) mit der Prozentrechnung vertraut sind, quantifizieren ihre subjektiven Erwartungen ("Hypothesen") über das Verhalten der Quader gerne durch "prozentuale Angaben". "Stelle dir vor, du würfelst mit dem Quader sehr sehr oft. Was schätzt du: in wieviel Prozent aller Fälle wirst du auf lange Sicht die einzelnen Augenzahlen von 1 bis 6 erhalten?" Hier einige Antworten (Klasse 7):

1	2	3	4	5	6		Glaubwürdigkeit
10%	5%	35%	35%	5%	10%	Rene´	32%
15%	10%	25%	25%	10%	15%	Stefan	18%
10%	12%	35%	20%	15%	8%	Alexandra	0%
15%	15%	25%	25%	15%	15%	Joanna	0%
15%	5%	30%	30%	5%	15%	Jasmin	50%

fünf verschieden glaubwürdige Hypothesen über den Quader

Alexandra handelt sich heftige Kritik ein. Offensichtlich dachte sie (wegen der Unsymmetrie) nur an eine ganz spezielle Würfelserie, nicht aber an eine Schätzung auf lange Sicht. Auch mit Joanna sind die Klassenkameraden nicht einverstanden, da die instabileren Lagen 1 und 6 seltener erwartet werden als die etwas stabileren 2 und 5. übrig bleiben die Verteilungen von Rene´ Stefan und Jasmin. Sie drücken Erwartungen über das Verhalten der Quader aus, die zunächst stark subjektiven Charakter haben. Wir nennen sie Wahrscheinlichkeiten oder Wahrscheinlichkeitshypothesen. Während diese Hypothesen als Schätzungen auf lange Sicht die Symmetrien des Quaders widerspiegeln, erwarten wir für die Versuchsergebnisse nur in Ausnahmefällen exakt symmetrische Ergebnisse. Wir erwarten, dass sie um symmetrische Zahlen schwanken. Bei einer Abstimmung in der Klasse zeigt sich (noch vor jeglichem Experiment), dass die Hypothesen von Jasmin und Rene´ am glaubwürdigsten sind. Diejenigen von Alexandra und Joanna werden "verworfen" (vgl. letzte Spalte). Nach diesen "Spekulationen" werden Versuche mit Spannung erwartet. Wer hat am besten geschätzt? Wessen Hypothese wird einer Überprüfung standhalten? Hier die Versuchsergebnisse (je 100 Versuche):

1	2	3	4	5	6	
13	10	32	27	5	13	Jola
12	3	34	36	8	7	Sabine I
11	4	41	35	5	4	Sabine II
5	5	36	33	8	13	Martina
15	3	28	32	6	16	Silke
10	6	42	31	4	7	Stefanie I
11	5	33	34	8	9	Jasmin
19	6	30	34	5	6	Stefan I
16	2	46	29	4	3	Stefan II
9	7	28	33	5	18	Denise
9	5	32	37	7	10	Stefanie II
8	5	39	36	5	7	Robert
14	7	31	36	4	8	Marc
13	3	34	28	6	16	Jens
13	5	31	25	10	16	Thao
10	9	30	30	7	14	Roman
12	8	30	34	16	10	Joanna
10	7	28	38	7	10	Fehim

Versuchsergebnisse zum Quader

Die Tabelle belegt: die Hypothesen von Rene´ und Jasmin waren beide recht brauchbar. Sie lässt darüber hinaus ein Gefühl für die Größe der Schwankungen (100 Versuche) entstehen. Von sich aus fassen Schüler die Häufigkeiten zunächst gruppenweise zusammen, um eine Entscheidung zwischen Rene´ und Jasmin herbeizuführen: Die relativen Häufigkeitsverteilungen aus je 500 (300) Versuchen sehen wie folgt aus (die Schwankungen werden geringer):

1	2	3	4	5	6	
11.2%	5.0%	34.2%	32.6%	6.4%	10.61	(500)
13.0%	5.2%	35.8%	32.2%	5.2%	8.6%	(500)
11.4%	5.0%	33.4%	32.4%	6.4%	11.4%	(500)
10.7%	8.0%	29.3%	34.0%	6.7%	11.3%	(300)

Nach einer Gegenüberstellung mit den Vorhersagen entschließt man sich, die Hypothesen der beiden Kontrahenten zu verwerfen und einigt sich auf eine Hypothese:

11%	6%	33%	33%	6%	11%

die in der Tat zwischen" Rene' und Jasmin liegt. Aber auch andere (symmetrische) Hypothesen, die hiervon nicht allzu sehr abweichen, wären akzeptabel, beispielsweise:

11.5%	6%	32.5%	32.5%	6%	11.5%

Alle 1800 Versuche zusammen liefern die relative Häufigkeitsverteilung

11.7%	5.6%	33.6%	32.7%	6.1%	10.4%

Wir halten fest: Wahrscheinlichkeiten lassen sich (auch durch noch so viele Versuche) nicht eindeutig bestimmen; es gibt meist mehrere brauchbare Hypothesen, um die die relativen Häufigkeiten von Versuch zu Versuch schwanken.

die mit den eben formulierten Hypothesen intuitiv auch recht gut vereinbar ist. Dennoch ist uns die Information, die in den Teilversuchen mit dem Umfang 500 (300) steckt, ungleich wertvoller als die eine Information über die 1800 Versuche, da sie hilft, das für statistisches Denken unerlässliche Gefühl für Zufallsschwankungen zu entwickeln.

2.2 Hypothesen berechnen

Schüler "lassen an dieser Stelle nicht locker". "Kann man die Wahrscheinlichkeiten der Quader berechnen?" Solche Fragen verraten Neugier und sind uns höchst willkommen, bieten sie doch die Chance, auf dem Niveau der Sekundarstufe I ein wenig zu "forschen" und den hypothetischen Charakter von Wahrscheinlichkeiten greifbar zu machen. "Berechnen" wir also die Wahrscheinlichkeiten der Quader:

Hypothese Ia
Nicole konstatiert völlig richtig: "je größer die Flächen des Quaders desto häufiger fallen die zugehörigen Augenzahlen". Sind die Wahrscheinlichkeiten P proportional zu den Flächen F?

Seiten 1 und 6: 2.99 cm^2
Seiten 2 und 5: 2.60 cm^2
Seiten 3 und 4: 4.60 cm^2

Die gesamte Oberfläche des Quaders ist F=20.38 cm^2 (=100%).

Damit erhalten wir die Hypothese:

		(1800Versuche)
P(1) = P(6) = 2.99/20.38	= 14.7%	(11.7% 10.4%)
P(2) = P(3) = 2.6 /20.38	= 12.8%	(5.6% 6.1%)
P(3) = P(4) = 4.6 /20.38	= 22.5%	(33.6% 32.7%)

Zwar wachsen die Wahrscheinlichkeiten mit der Größe der Grundfläche, doch sagen sie unsere experimentellen Ergebnisse (rechte Spalte) noch sehr viel schlechter voraus als unsere intuitiven Schätzungen. Trotz der schönen Rechnung müssen wir Nicoles Hypothese verwerfen.

Hypothese Ib
Je mehr der Quader "hochkant" steht, desto instabiler ist seine Lage, desto seltener kommen die zugehörigen Augenzahlen. Sollten wir es mit einer umgekehrten Proportionalität zwischen Schwerpunkthöhe h und Wahrscheinlichkeit versuchen?

	h	1/h
Seiten 1 und 6:	1	1
Seiten 2 und 5:	1.15	0.87
Seiten 3 und 4:	0.65	1.538

Mit S = 2 (1+0.87+1.538) = 6.816 ergibt sich

P(1) = P(6) = 1.000/S = 14.7%
P(2) = P(3) = 0.870/S = 12.8%
P(3) = P(4) = 0.538/S = 22.5%

"Schon wieder die gleiche Hypothese wie oben? Na klar, das Produkt aus Grundfläche und Schwerpunkthöhe ergibt immer das halbe Quadervolumen“. Wenn die Wahrscheinlichkeiten zu den Grundflächen proportional sind, dann sind sie zu den Schwerpunkthöhen automatisch umgekehrt proportional. Allerdings lässt sich Hypothese Ib im Gegensatz zu Ia auf gezinkte Quader verallgemeinern.

Hypothese II
Versuchen wir, Nicoles Hypothese I zu verbessern: Wie wir sehen, sind (verglichen mit den experimentellen Ergebnissen) die Unterschiede zwischen den berechneten Wahrscheinlichkeiten P zu klein, wenn wir sie zu den Flächen F proportional machen. Sie werden größer, wenn wir die Stabilität nicht durch die Grundfläche F, sondern durch das Quadrat oder höhere Potenzen von F messen und die Wahrscheinlichkeiten proportional zu diesen Potenzen einrichten. Wir erhalten:

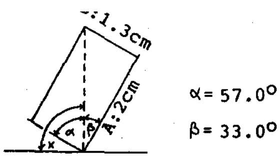
	F	F^2	F^3	F^4	F^5
Seiten 1 und 6	2.99	8.94	26.73	79.93	238.98
Seiten 2 und 5	2.60	6.76	17.58	45.70	118.81
Seiten 3 und 4	4.60	21.16	97.34	447.75	2059.63
2*Summe	20.38	73.72	283.29	1146.76	4834.84

Daraus ergeben sich folgende Hypothesen:

P(1) = P(6)	14.7%	12.1%	9.4%	7.0%	5.0%
P(2) = P(3)	12.8%	9.2%	6.28%	4.0%	2.5%
P(3) = P(4)	22.5%	28.7%	34.4%	39.0%	42.5%

Tatsächlich werden die Wahrscheinlichkeiten für die stabilen Seiten immer größer, die für die kleinen Seiten immer kleiner, je mehr wir potenzieren. Die Hypothese, die wir aus einer Proportionalitätsannahme zwischen Wahrscheinlichkeit und dritter Potenz der Grundfläche erhalten, passt noch am besten zu unseren experimentellen Ergebnissen

Hypothese III
Wir geben noch nicht auf und machen unser Quaderproblem zweidimensional, indem wir die instabilen Seiten 2 und 5 völlig außer acht lassen. (Wir würfeln einfach weiter, wenn wir solche Zahlen erhalten.) Der Quader kann dann die stabile Lage A (3 oder 4) oder die Lage B (1 oder 6) annehmen:



Wir machen die Modellannahme, dass der Quader stets mit der Kante aufschlägt und der Aufschlagwinkel x $(\alpha \le x \le 90^o + \alpha)$ über die Endlage A oder B entscheidet.

Gilt x>90°, so wird der Quader in Stellung A kippen, sonst in Stellung B. Wenn alle Winkel x gleiche Wahrscheinlichkeit besitzen (weitere plausible Modellannahme), dann müssten sich die Wahrscheinlichkeiten P(B) und P(A) zueinander verhalten wie die Winkel 33 ° und 57 °. Wir erhalten die Wahrscheinlichkeitshypothese: P(A)=63.3%, P(B)=36.7%. In unseren 1800 Versuchen trat die Lage A (3;4) 1193mal, die Lage B (1;6) 397mal auf. Da wir die Lage (2;5) nicht zulassen, sind das 75.0% für A und 25.0% für B. Diese Ergebnisse sind mit unserer Hypothese nicht vereinbar. Wir müssen sie zusammen mit den zugrunde liegenden Modellannahmen als unrealistisch verwerfen. (Dies gilt übrigens auch, wenn man statt eines Quaders einen langen Stab mit rechteckigem Querschnitt rollt, also tatsächlich ein zweidimensionales Problem untersucht.)

Es gibt auf dem Niveau der Sekundarstufe I nicht viele Probleme, die den hypothetischen Charakter von Wahrscheinlichkeiten und den engen Zusammenhang mit dem Prozess des Modellbildens ähnlich prägnant hervortreten lassen wie die oben genannten Beispiele.

1.3 Stellung der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Bisher haben wir Hypothesen aufgestellt und diese durch Vergleich mit experimentellen Ergebnissen verworfen, modifiziert oder beibehalten. Da wir unserem Ziel gemäß einen konsistenten Aufbau von Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik anstreben, wird es bei der Wahrscheinlichkeitsrechnung nicht mehr um eine "voraussetzungslose" "exakte" Berechnung von Wahrscheinlichkeiten gehen. Vielmehr werden wir aus Wahrscheinlichkeitshypothesen (Primärhypothesen) andere Hypothesen (Sekundärhypothesen) ableiten, die uns interessierende Fragen beantworten. Die zugehörigen Prognosen werden sich wiederum in Experimenten zu bewähren haben. Auch die funktionalen Abhängigkeiten zwischen Primär- und Sekundärhypothesen werden wir gemäß der Frage studieren: "Wie wirken sich Modifikationen der Primärhypothesen auf die Sekundärhypothesen aus?" Auf diese Weise wächst ein Gefühl für die "Stabilität" stochastischer Modelle.

3.1 Wartezeiten

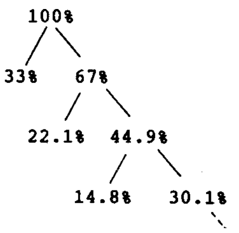
Wir werfen unseren Quader so lange bis die erste "3" erscheint. Wie lange müssen wir auf lange Sicht warten? Hier die spontan geäußerten Hypothesen dreier Schüler:

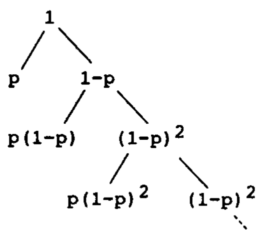
1x	2x	3x	4x	5x	6x	7x	8x	9x	>10x	
5%	15%	25%	15%	10%	8%	7%	6%	5%	4%	Sabine
10%	10%	10%	10%	10%	10%	10%	10%	10%	10%	Jens
21%	17%	14%	12%	10%	8%	6%	5%	4%	3%	Joanna

Rene´ schlug eine Verteilung vor, deren Wahrscheinlichkeiten mit wachsender Versuchszahl wachsen, zog diesen Vorschlag aber schnell wieder zurück – worauf Joanna eine monoton fallende Verteilung vorschlug und die einzelnen Wahrscheinlichkeiten so wählte, dass sich insgesamt 100% ergaben. Wieder haben wir eine Fülle von Hypothesen, eine "prickelnde" Erwartungshaltung, den "statistischen Spannungsbogen" zwischen Vorhersage und Experiment.

Denise: "Die Hypothesen sind alle falsch Bei „1 mal“ muss 33% stehen! In 33% aller Fälle erhalte ich sofort die "3“ In 67% muss ich weiterwürfeln.“ (Sie erinnert sich an die bewährte Hypothese mit P(3)=33%. Von hier aus ist es nur noch ein kleiner Schritt zum Baumdiagramm

(Taschenrechner, Zahlen gerundet; p bezeichnet die Trefferwahrscheinlichkeit)





Es ergibt sich P(Wartezeit=n)=$p(1-p)^{n-1}$. Mit Denise (p=0.33) erhalten wir

1x	2x	3x	4x	5x	6x	7x	8x	9x	>9x
33.0%	22%	14.8%	9.9%	6.6%	4.5%	3.0%	2.0%	1.3%	2.7%

Wir unterteilen unsere 1800 Würfelergebnisse in 180 "Zehnerpäckchen" und zählen aus, beim wievielten Wurf erstmalig die "3" erschien. Hier die mit Spannung erwarteten Ergebnisse:

34.3% 21.8% 16.8% 12.9% 4.6% 3.9% 2.1% 2.1% 9% 1.4%

Tatsächlich schwanken die relativen Häufigkeiten um die nach „Denise" vorausgesagten Werte. Die Hypothesen von Jens und Sabine müssen wir verwerfen, diejenige von Joanna hat sich wenigstens qualitativ bestätigt. Die Wahrscheinlichkeiten werden mit wachsender Wartezeit kleiner. Ergebnis: Die Hypothese von Denise stimmt! Oder doch nicht? Was wäre, wenn wir für "3" nicht die Wahrscheinlichkeit p=33% sondern 32%, 30% oder 35% angenommen hätten? (Auch diese Hypothesen waren von den Schülern vorgeschlagen worden.) Führen wir drei Modellrechnungen durch:

1x	2x	3x	4x	5x	6x	7x	8x	9x	>10x
30.0%	21.0%	14.7%	10.3%	7.2%	5.0%	3.5%	2.5%	1.7%	4.0%
32.0%	21.8%	14.8%	10.1%	6.8%	4.7%	3.2%	2.3%	1.5%	3.1%
35.0%	22.8%	14.8%	9.6%	6.2%	4.1%	2.6%	1.7%	1.1%	2.1%

Funktionale Abhängigkeit der Hypothesen bei Variation der Trefferwahrscheinlichkeit

Auch diese Wartezeitenverteilungen wären mit unseren experimentellen Ergebnissen gefühlsmäßig vereinbar. Wegen des geringen Versuchsumfangs 180 können wir keine verwerfen. An der Struktur (exponentielles Verhalten) $P(\text{Wartezeit}=n)=p(1-p)^{n-1}$, die sich zwangsläufig aus der Einsicht in das Baumdiagramm ergibt, besteht jedoch kein Zweifel. Untersuchungen anderer Quaderseiten, der Vergleich mit der Wartezeitenverteilung beim Laplace-Würfel, das Studium der mittleren Wartezeit und ihrer Schwankungen um den Erwartungswert (=Kehrwert der Trefferwahrscheinlichkeit) bieten sich als mögliche Vertiefungen an.

3.2 Quader contra Würfel

Auch "klassische Einführungsaufgaben" zu Pfad- und Additionsregel gewinnen an Reiz, wenn man neben Glücksrädern und Laplace - Würfeln Quader benutzt und zu vergleichenden Prognosen auffordert. Wieder wird die Abhängigkeit der Antworten von den zugrunde liegenden Modellhypothesen ins Bewusstsein gerückt. Alle abgeleiteten Hypothesen lassen sich durch erneutes Befragen der Urlisten mit wenig Aufwand experimentell überprüfen.

(a) Du hast sechs Würfe. Beim ersten Wurf darf keine 1, beim zweiten keine 2,..., beim sechsten keine 6 auftreten. Sind die Chancen für einen solchen "Durchmarsch" beim Quader oder beim Würfel größer?
Antwort:
Würfel: P(Durchmarsch) $(5/6)^6 = 0.335$
Quader: P(Durchmarsch) $0.89^2 \cdot 0.94^2 \cdot 0.67^2 = 0.314$ (wenn man Hypothese (*) verwendet)
$0.9^2 \cdot 0.95^2 \cdot 0.65^2 = 0.308$ (wenn man Rene's Hypothese verwendet)
Der Würfel verspricht die größeren Chancen.

(b) Möchte man einen Pasch (zwei gleiche Zahlen) würfeln, so erweist sich der Quader als günstiger. Hier gilt $P(\text{Pasch})= 2\,(0.33^2+0.11^2+0.06^2) = 24.92\%$, falls wir die Hypothese (*) verwenden. Verwenden wir Renes Hypothese, so ergibt sich $P(\text{Pasch})=2(0.3^2+0.10^2+0.05^2)=27\%$. Der normale Würfel liefert dagegen nur $P(\text{Pasch})=1/6=16.66\%$.

(c) Braucht man eine 10, so erweist sich dagegen der Laplace-Würfel mit $P(10)=P(6;4)+P(5;5)+P(4;6)=3/36=8.33\%$ als günstiger. Der Quader liefert die 10 nur mit der Wahrscheinlichkeit $P(10)=2 \cdot 0.11 \cdot 0.33^2+0.06^2=7.62\%$ (Hypothese (*) bzw. $P(10)=2 \cdot 0.10 \cdot 0.35+0.05^2)=7.25\%$ (Hypothese von Rene´).

(d) Möchte man beim Würfeln besonders schnell vorwärts kommen, sind Quader und Würfel gleich schlecht (Erwartungswert 3.5). Man sollte den Quader anders beschriften und auf die Regel "Summe der Gegenseiten ist 7“ verzichten.

3.3 Binomialverteilungen als Hypothesen

Mehrfachzüge aus Urnen gehören zu den Standardthemen der Wahrscheinlichkeitsrechnung. "Wir ziehen aus einer Urne mit 1/4 roten Kugeln. wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass..."
Wie viel spannender sind solche Fragestellungen unter statistischen Aspekten, wenn man etwa Urnen mit unbekanntem Inhalt erforschen möchte. "In dieser Kiste sind 5 Kugeln. Wie viele davon sind rot?"
Wir ziehen 4 mal mit Zurücklegen: 2 rote - wieder 2 rote - eine rote - keine rote .
20 Vierfach - Experimente lieferten folgende Anzahlen roter Kugeln:

0	1	2	3	4
7	8	3	2	0

Sicher enthält die Urne weniger rote als weiße Kugeln. Stefanie tippt auf eine rote, Nicole auf 2 rote (Hypothesen: p=0.2 und p=0.4) Diese Hypothesen führen zu folgenden Binoimialverteilungen:

K	0	1	2	3	4
B(4;0.2;k)	40.98%	40.96%	15.36%	2.25%	0.26%
B(4;0.4;k)	12.96%	34.56%	34.56%	15.36%	2.56%

Wegen der höheren Häufigkeiten für 0 und 1 scheinen die experimentellen Ergebnisse eher für Stefanies Hypothese zu sprechen. Vielleicht hatten wir nur Pech und Nicoles Hypothese stimmt doch? Wir tragen die Ergebnisse zusammen und erhalten für 100 Vierfachzüge:

0	1	2	3	4
44	39	14	2	1

Stefanie hat Recht. Ihre Hypothese sagt die experimentellen Ergebnisse wesentlich besser voraus. Nicoles Hypothese müssen wir verwerfen. (Das kann man natürlich auch so begründen: Die 100 Vierfachzüge sind 400 Einfachzüge, in denen insgesamt 77 mal (19.25%) eine rote Kugel gezogen wurde. Nur eine von den fünf Kugeln kann rot gewesen sein.) wer könnte der Versuchung widerstehen, jetzt einen Blick in die Urne zu riskieren?

4 Hypothesen als Modelle von der Wirklichkeit

Der Leser erkennt an den genannten Beispielen unschwer, wie die Gegenüberstellung Laplacescher und nicht Laplacescher Objekte den Reiz der "klassischen Wahrscheinlichkeitsrechnung" erhöht. Wir benutzen kombinatorische Zählprinzipien, Pfadregel und Summenregel unter verändertem Blickwinkel. Sie dienen nicht mehr zur "genauen Berechnung von Wahrscheinlichkeiten", sondern (in statistischer Sicht) zur Herleitung von Hypothesen aus einfacheren Hypothesen. Diese Blickpunktverschiebung ist unter unserer Zielperspektive einer Integration statistischer Gedanken in die elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung grundlegend. Hätten wir ausschließlich Laplace-Würfel statt der Quader verwendet, so wäre niemand auf die Idee gekommen, beispielsweise die Wartezeitenverteilung für verschiedene Trefferwahrscheinlichkeiten zu berechnen, die Ergebnisse miteinander zu vergleichen und so den hypothetischen Charakter präsent zu halten. Mathematik - und insbesondere Stochastik - betreiben heißt eben nicht: absolute Wahrheiten über die Wirklichkeit ableiten, sondern in sich stimmige Modelle von der Wirklichkeit erarbeiten. Die Vernachlässigung dieses Aspektes hat - gerade die Schulmathematik - etwas in Verruf gebracht. Schupp formuliert: "Dass ein Modell nicht aus der Wirklichkeit abstrahiert, sondern an sie herangetragen wird, dass somit jede mittels des Modells gewonnene Aussage über Realität in gewisser Weise hypothetisch ist, gilt grundsätzlich für jede Modellbildung. Doch scheint der stochastische Regelkreis wegen der jedermann ersichtlichen Schwierigkeiten beim Aufstellen der Primärwahrscheinlichkeiten besonders gut geeignet, erstmals auf diese prinzipielle Grenze der Wirklichkeitserfassung (durch Mathematik) hinzuweisen."

5 Lernpsychologischer Rückblick

Vergleichen wir den Aufforderungsgehalt, den unsere Quader mit partiellen Symmetrien im Hinblick auf eine adäquate Begriffsbildung bieten, mit den Möglichkeiten der "klassischen" Zufallsobjekte, so fällt auf:
(a) Laplacesche Objekte (mit vollständige Symmetrien) lassen nur eine Wahrscheinlichkeitsverteilung zu. Niemand bezweifelt ernsthaft, dass bei einer Münze Kopf und Zahl, bei einem Würfel die 6 Augenzahlen die gleiche Wahrscheinlichkeit besitzen, d. h. auf lange Sicht gleich häufig auftreten werden. Damit verschwindet die fundamentale Idee der Statistik, dass es für eine Situation verschiedene Modelle

geben kann, dass Wahrscheinlichkeiten stets hypothetischen Charakter haben, nur Annahmen darstellen, die mitunter auch verworfen werden müssen. Bei Verwendung teilweise symmetrische Objekte drängt sich diese Idee von selbst auf. Andererseits verschwindet

(b) bei völlig unsymmetrischen Objekten wie dem Reißnagel der begriffliche Unterschied zwischen relativen Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten. Wahrscheinlichkeiten sind Schätzungen der relativen Häufigkeiten auf lange Sicht. Wenn man bei 1000 Würfen 692 mal die Lage "Spitze oben" erhielt, warum sollte man durch eine von 0.692 verschiedene Zahl diese Prognose möglicherweise willkürlich verschlechtern? Muss damit die relative Häufigkeit in den Augen der Schüler nicht notwendig zur Wahrscheinlichkeit werden? (Man vergleiche das zweite der untenstehenden Transkripte). Die beiden Begriffe, die hier durch gleiche Zahlen beschrieben werden, liegen so dicht beieinander, dass eine Unterscheidung viele Schüler überfordert. Bei teilweise symmetrischen Objekten dagegen ist der Unterschied offensichtlich: Wahrscheinlichkeiten spiegeln die Symmetrien wider, relative Häufigkeiten nur in seltenen Ausnahmefällen, die in der Tat höchstes Erstaunen hervorrufen.

(c) Auch unter lernpsychologischen Gesichtspunkten spricht einiges für die partiell symmetrischen Objekte:

- Da man aufgrund der Primärintuition: "mit wachsender Stabilität wachsen die Wahrscheinlichkeiten einen Anhaltspunkt für Schätzungen hat, ist man bereit, quantitative Prognosen auf lange Sicht abzugeben. Es entsteht der in der Einleitung paradigmatisch erwähnte "Spannungsbogen zwischen Erwartung und Experiment". Beim Würfel dagegen erwarten alle das gleiche, beim Reißnagel erwartet man - ehrlich gesagt gar nichts (vgl. die untenstehenden Unterrichtsszenen).
- Wie oben beschrieben, nutzen wir mit Hilfe der Quader das aus, was Schüler auf natürliche Weise (spielerisch) von sich aus tun. Sie erfahren handelnd, wie man mit Wahrscheinlichkeiten umgeht, wie sie mit relativen Häufigkeiten zusammenhängen, was man unter Hypothesen versteht, was es bedeutet, sie zu verwerfen. Durch Handlungen voneinander klar abgegrenzte Begriffe werden schließlich nur noch mit Namen versehen. Ein solches Vorgehen ist gemeint, wenn Bauersfeld vom "Aushandeln der Begriffe" spricht: Mathematische Begriffe werden eingeführt zur Strukturierung dessen, was Schüler tun - und nicht als Selbstzweck oder aus formallogischen Gründen.

Zur Konkretisierung unserer Ausführungen beschließen wir diesen Abschnitt durch Unterrichtsszenen aus Einführungsstunden in die Wahrscheinlichkeitsrechnung mit Hilfe der klassischen Objekte Würfel und Reißnagel. Bei diesen Unterrichtsszenen handelt es sich um Auszüge aus Transkripten von Videoaufzeichnungen , die zum Zwecke der Interaktionsanalyse angefertigt wurden.

1. Szene: (Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung, 7. Klasse, Realschule: Bauersfeld/Voigt)
Der Lehrer notiert die Ergebnisse von 100 (Laplace-) Würfelversuchen an der Tafel

1 2 3 4 5 6 15 16 19 14 19 17

und fragt: "Was fällt auf?"
Den Schülern fällt nichts auf. Vermutlich wird auch dem Leser nichts auffallen, weil die Ergebnisse recht genau in das Bild hineinpassen, das man sich gemeinhin von einem normalen Würfel macht. Der Lehrer strebt die Formulierung an, dass die gewürfelten Zahlen "vom Zufall abhängen", aber das ist für die Schüler nichts auffälliges. So kommen Antworten wie:
Martina: "Alle Zahlen liegen über 10%." Michael: "Es ist selbstverständlich, dass die Ergebnisse unterschiedlich sind." Lehrer: "Warum hast du erwartet, dass nicht alle Ergebnisse gleich sind?" Michael: "100 geht nicht durch 6." (Lehrer wirkt konsterniert.)
Nach einem längeren Frage- und Antwortspiel gelangt man zu der (vom Lehrer) angestrebten Formulierung, dass die Würfelergebnisse "vom Zufall" abhängen. Statt vor dem Experiment beispielsweise eine Vermutung über die Größe der von den Schülern erwarteten Schwankungen zu formulieren, die Vermutungen einer Serie von Experimenten gegenüberzustellen und so einen "statistischen Spannungsbogen" aufzubauen, wurden langweilige Selbstverständlichkeiten zum Unterrichtsthema. Die experimentellen Daten beantworten keine Frage, sie führen zu keinen Konsequenzen. Die Chance, Statistik zu erleben, wurde vertan.

2. Szene: Klasse 8, Gymnasium, 2. Stunde einer Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Vorausgegangen war eine Stunde, in der man sich mit Laplace -Versuchen beschäftigte. Diese Szene veranschaulicht die Probleme mit der Begriffsbildung, wenn man völlig unsymmetrische Objekte wie die Reißzwecke benutzt:

An der Tafel stehen (aufsummierte) relative Häufigkeiten für das Ergebnis "Spitze oben" beim Werfen einer Reißzwecke.

Lehrer: "54%, 60%, 54%, 51%, 55%, 60% ... sind das Wahrscheinlichkeiten?
Schüler: "weiß nicht".
Lehrer: "Was sind denn das für Dinger"?
Schüler: "Wahrscheinlichkeiten"

Einige Minuten später...
Schüler: "Die Wahrscheinlichkeit hängt vom Zufall ab."
Lehrer: "Die Wahrscheinlichkeit hängt nicht so sehr vom Zufall ab. Die Versuchsausgänge hängen vom Zufall ab."
Lehrer: Was hat jetzt die relative Häufigkeit mit Wahrscheinlichkeit zu tun?
Schüler: Erklärt, wie man die relative Häufigkeit ausrechnet.
Lehrer: "ja, aber ist jetzt Wahrscheinlichkeit dasselbe wie relative Häufigkeit?"
Stefan: Ich würde sagen ja. Von der Herkunft würde ich sagen ja. Nur relative Häufigkeit ist im Vergleich zur Wahrscheinlichkeit ungenauer."
Lehrer: (deutet auf eine relative Häufigkeit): "Bist du denn sicher, dass das die richtige Wahrscheinlichkeit ist?
Stefan: "Nein. Die kann man gar nicht feststellen"
Lehrer: "Die kann man gar nicht feststellen. So etwas gibt es, aber feststellen können wir sie nicht. Was können wir machen für die Wahrscheinlichkeit?
Schüler: "überhaupt nichts."

Die folgende Szene belegt, dass bei klassischen Objekten Schülern der hypothetische Charakter von Wahrscheinlichkeiten nicht präsent ist und höchstens vom gewissenhaften Lehrer in Nebensätzen eingeflochten wird.

3. Szene: (5. Stunde des oben genannten Klasse 8)
Schüler: "ja, bei den Reißzwecken da waren die beiden Seiten verschieden, aber - "
Lehrer: "möglicherweise verschieden, und beim Würfel?"
Schüler: "Ja, da sind sie alle gleich."
Lehrer: "Sofern der Würfel nicht gezinkt ist."

Es handelt sich bei diesen Seiten um einen Auszug aus
Wolfgang Riemer: Stochastische Probleme aus elementarer Sicht BI-Verlag (vergriffen)