Rot setzen oder schwarz - Eine Einführung in statistisches Denken mit den Riemer-Würfeln
Meyer-Bothling, LEU Stuttgart, Ideenbörse Mathematik Sekundarstufe I Heft 1 Apr 2005

Rot setzen – oder Schwarz? 5.1

Vorüberlegungen

Ziele und Inhalte:

- *Die Schüler entwickeln eine Vorstellung von der Wahrscheinlichkeit, die an ihre eigenen Konzepte und Erfahrungen anknüpft.*
- *Sie erleben, dass sich die relative Häufigkeit eines Ereignisses nach vielen Würfen stabilisiert.*
- *Sie erleben, dass sich die absolute Häufigkeit eines Ereignisses auch nach vielen Würfen* ***nicht*** *stabilisiert.*
- *Sie akzeptieren diesen „Widerspruch" und lernen, ihn für Vorhersagen einzusetzen.*
- *Sie bilden und vergleichen verschiedene Definitionen für die Wahrscheinlichkeit.*

„Ja, Statistiken. Aber welche Statistik stimmt schon? Nach der Statistik ist jeder vierte Mensch ein Chinese, aber hier spielt gar kein Chinese mit!"
Werner Hansch, Fußballreporter

Zentrales Anliegen:

Die Schüler sollen sich zur Wahrscheinlichkeit sicheres Wissen erarbeiten. Wenn das Thema „Statistik" nicht von Beginn an auf eine solide Basis gestellt wird, entsteht bei manchen Schülern das Gefühl, dass die Statistik zwar ein in sich stimmiges Regelgebäude darstellt, aber mit ihnen selbst und ihren Erfahrungen fast nichts zu tun hat. Statt die **erlebte Realität** zu erklären, liefert der Mathematikunterricht damit eine Parallelwelt, die nur in der Schule nützt, nicht aber im **Leben**.

Mit dem hier beschriebenen Unterrichtsgang läuft es in der Regel anders: Die Schüler erschließen sich den neuen Begriff der Wahrscheinlichkeit, der zunächst zu Widersprüchen führt, die sich aber dann doch klären lassen. Ausgangspunkt ist nicht eine Definition, sondern die Schüler **entwickeln den Begriff** in seiner ganzen Reichhaltigkeit für sich selbst. Ziel ist, die Schüler nicht mit unserem Wissensvorsprung zu überrumpeln, sondern ihre Vorstellungen und ihre Argumente zum Ausgangspunkt des Lernens zu machen.

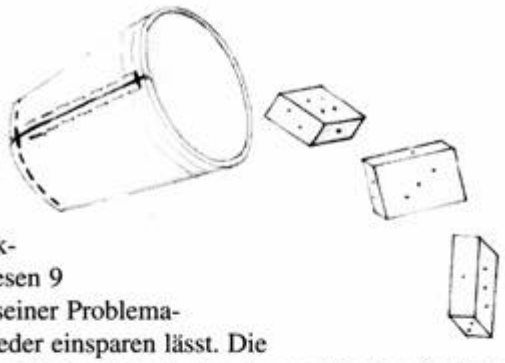
Die Auseinandersetzung der Schüler mit dem Begriff „Wahrscheinlichkeit" ist in dieser Einheit besonders intensiv, weil die Schüler einerseits durch ganz unterschiedliche Aktivitäten an den Begriff herangeführt werden, den Begriff wirklich für sich bilden können, während andererseits eine Definition des Begriffs so lange hinausgezögert wird, bis sie ihn selbst definieren können.

Von zentraler Bedeutung sind die Diskussionen, in denen die Rolle der Lehrkraft besonders schwierig und reizvoll ist: Einerseits muss sie sich inhaltlich so weit wie möglich zurückhalten, aber andererseits muss sie methodisch konsequent darauf achten, dass die Beobachtungen und Überlegungen der Schüler nicht durch voreilig akzeptierte „Wahrheiten" eingeengt werden. Es hat sich häufig als sehr fruchtbar erwiesen, den Unterricht in drei Abschnitte zu unterteilen: Zu Beginn eine kurze Plenardiskussion, in der jede der verschiedenen Positionen vertreten werden kann. Anschließend Diskussionen in Gruppen mit dem Auftrag, eine oder zwei Positionen schriftlich zu fixieren und zu begründen. Zum Schluss werden die unterschiedlichen Positionen der Gruppen vorgetragen. Hausaufgabe: Stelle deine Position mit Begründung dar.

Um das unterschiedlich besetzte Wort „Wahrscheinlichkeit" zunächst zu vermeiden, habe ich zu Beginn meistens Formulierungen mit „Häufigkeit" vorgezogen. Wenn aber die Schüler von Anfang an unbefan-

5.1 Rot setzen – oder Schwarz?

Vorüberlegungen



gen von „Wahrscheinlichkeit" sprechen, habe ich das zugelassen. Eine Präzisierung des Begriffes ist aber erst dann sinnvoll, wenn die Schüler genügend Erfahrung haben, um selbst eine Definition zu geben.

Einerseits dauert es bei diesem Konzept ziemlich lange, ca. 9 Stunden, bis der Begriff „Wahrscheinlichkeit" definiert ist und in dieser präzisierten Form für die weiteren Aktivitäten bereitsteht. Andererseits haben die Schüler mit diesen 9 Stunden ein so gründliches Verständnis des Begriffes und seiner Problematik erworben, dass sich die Zeit zu großen Teilen später wieder einsparen lässt. Die Einführung des fairen Würfels (10. Schritt) und die weiteren Unterrichtsstunden lassen dies bereits deutlich erkennen.

Für dieses Vorgehen ist es wesentlich, die Eingangsfrage (1. Schritt) wirklich einige Wochen vor Beginn der Unterrichtseinheit zu stellen.

Einordnung:

Die Unterrichtseinheit stellt eine tragfähige begriffliche Basis für die Statistik bereit. Sie setzt eine gewisse geistige Reife der Schüler voraus und ist insofern nicht für die Unterstufe gedacht, in der man sich mit ersten statistischen Aktivitäten eher im Intuitiven bewegt.

Literaturtipps:

Ausführlichere Darstellungen des Themas:

- Köhler, Meyer-Bothling, Ringkowski et al.: Erfahrungen mit der Stochastik in Klasse 10 – eine Anregung zum Einstieg. Stuttgart, Landesinstitut für Erziehung und Unterricht, Heft M39, Januar 1997
- Wolfgang Riemer: Stochastische Probleme aus elementarer Sicht. Mannheim 1991

Bezugsquelle für Quaderwürfe
Dr. Wolfgang Riemer, August-Bebel-Str. 80, 50259 Pulheim, Tel.: (0 22 34) 8 42 36, www.riemer-koeln.de

Die einzelnen Unterrichtsschritte im Überblick:

1. Schritt: Die Frage vor der Unterrichtseinheit
2. Schritt: Gemeinsame Auswertung der Befragung
3. Schritt: Roulettespiel
4. Schritt: Spiel mit Quaderwürfeln
5. Schritt: Einschätzung der Quaderwürfel
6. Schritt: Systematische Forschung (4 Stunden)
7. Schritt: Auswertung der Schaubilder
8. Schritt: Hausaufgabe - drei Fragen zur Häufigkeit
9. Schritt: Definition der Wahrscheinlichkeit
10. Schritt: Vorstellen des fairen Würfels

Unterrichtsplanung

1. Schritt: Die Frage vor der Unterrichtseinheit

Einige Wochen vor Beginn der eigentlichen Unterrichtseinheit stellt man diese Eingangsfrage kurz zur Diskussion:

> Stell dir vor: Du hast beim Roulette zehnmal gespielt. Jedes Mal hast du auf Rot gesetzt. Jedes Mal hat Schwarz gewonnen. Einmal kannst du noch spielen, bevor dein Geld verbraucht ist.
> Auf welche Farbe setzt du? Warum?

Um die Spannung zu erhalten, empfiehlt es sich, die Diskussion bald abzubrechen und zu betonen, dass es offenbar unterschiedliche Meinungen gibt, die nicht leicht durch Diskussion zu vereinen sind. Die Klasse wird informiert, dass auch bei Erwachsenen erstaunlich verschiedene Meinungen anzutreffen sind.

Nun stellt man die Aufgabe, als Vorbereitung auf die Unterrichtseinheit in einer informellen Befragung herauszufinden, welche Meinungen in der Bevölkerung vorherrschen. Die Aufgabe lautet ausdrücklich: „Hört euch die Meinung anderer Menschen an. Eure eigene Meinung ist nicht Thema der Befragung, übt also keinen Einfluss aus."

Tatsächlich sollen die Schüler sehr wohl eine eigene Meinung entwickeln. Dabei sollen sie sich aber nicht primär einer Schulaufgabe entledigen, sondern aus der Beschäftigung mit dem Thema quasi beiläufig selbst **ins Nachdenken kommen**.

- Es vergehen zwei Wochen -

2. Schritt: Gemeinsame Auswertung der Befragung

Die Antworten (s. auch das **Beispiel**, **M5**) werden gezählt und an der Tafel festgehalten, z.B.:

(a) bei Rot bleiben: 63; (b) zu Schwarz wechseln: 23, (c) weiß nicht: 5

Typische Begründungen werden sinngemäß aufgeschrieben, z.B.

Begründungen für Rot:
- Irgendwann muss es ja mal kommen.
- Die Chance ist jetzt größer.

Dies ist die populäre Argumentation der ausgleichenden Gerechtigkeit. Sie geht von der (richtigen) Meinung aus, dass langfristig die Häufigkeiten beider Ereignisse etwa gleich sein müssen. Die (falsche) Folgerung ist: Wenn zu Beginn Schwarz öfter vorkommt, muss danach Rot verstärkt auftreten, damit beides insgesamt gleich häufig ist. Auf Erklärungen ex Cathedra sollte man hier unbedingt verzichten. Stattdessen sollen die Schüler später selbst aus der Erfahrung lernen.

Begründungen für Schwarz:
- Das Gesetz der Serie sagt, dass jetzt Schwarz gewinnt.
- Jetzt muss Schwarz kommen.

5.1 Rot setzen – oder Schwarz?

Unterrichtsplanung

Irrationale Begründungen:
- Ich würde auf Schwarz setzen, da ich den Glauben an Rot längst verloren gehabt hätte. Aber dann kommt bestimmt Rot.
- Rot, Farbe der Liebe.
- Schwarz, Lieblingsfarbe.
- Ich hasse Roulette.

Nun erst, nach dieser Vorbereitung, ist der Zeitpunkt für die eigentliche Diskussion in der Klasse gekommen. Die Fragestellung an jeden Schüler: Wie würdest du selbst entscheiden?

Typisch ist an dieser Stelle eine Diskussion, in der verschiedene Argumentationsebenen und -richtungen, Begründungen und Hoffnungen, Gefühl und rationale Verständigung ineinander fließen. Dies sollte nicht vom Lehrer korrigiert werden. Ziel ist ja, dass die Schüler selbst ihre eigenen Beobachtungen und Vorstellungen in ein präziseres Bild des Begriffs Wahrscheinlichkeit einbringen.

Als Argumentationsfiguren tauchen hier auf:
- Rot, Farbe der Liebe,
- das Gesetz der Serie,
- es gibt doch kein Gesetz der Serie,
- ich will nicht noch einmal verlieren,
- das Roulette hat kein Gedächtnis,
- denn der Zufall spielt anders,
- der Zufall wirkt,
- die Technik des Apparates.

Um den Stand der Diskussion festzuhalten, werden die Schüler aufgefordert, gruppenweise eine oder (bei bleibendem Dissens) mehrere Antworten schriftlich mit Begründung zu formulieren. Die Begründungen werden am Ende der Stunde eingesammelt.

Sie werden hier nicht weiter diskutiert. Gegen Ende der Einheit wird dieselbe Aufgabe noch einmal gestellt und die neuen Antworten der Schüler werden mit ihren einstmaligen verglichen. Von den Antworten, die im Vergleich sehr aufschlussreich sind, sei hier nur eine aufgeführt:

zu Beginn der Einheit [2. Std.]	**gegen Ende der Einheit**
Ich würde auf Rot erneut setzen, jedoch nur des Gefühls wegen. Ich denke man kann keine Wahrscheinlichkeit aufstellen, da es ein reines Glücksspiel ist, und die Bedingungen jedesmal unterschiedlich sind (Rouletterad ist schneller, Ball langsamer etc.). (Matthias)	Ich glaube, dass es egal ist, auf welche Farbe man setzt, da die Wahrscheinlichkeit sowohl bei Rot als auch bei Schwarz etwas weniger als 50 % beträgt, und somit die Wahrscheinlichkeit, bei Rot oder Schwarz zu gewinnen, gleich ist. (Matthias)

Weitere **Beispiele** kann man auf **M5** nachlesen.

Unterrichtsplanung

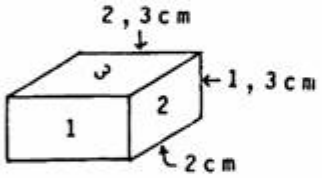
3. Schritt: Roulettespiel

Erfahrungsgemäß gibt es zu diesem Zeitpunkt immer noch einige unbeteiligte Beobachter. Um noch mehr von diesen aus der Reserve zu locken und um bei möglichst vielen die für das Glücksspiel charakteristischen **Emotionen** zu wecken, wird für die nächste Stunde ein tatsächliches Roulettespiel angesetzt. Es sollte um einen Einsatz gehen, der als wesentlich angesehen wird.

Einsatz:
Der Gewinner wird von seinem nächsten einwöchigen Tafeldienst befreit. Stattdessen macht der Verlierer den Tafeldienst.

Regeln:
Verlierer ist derjenige Spieler, der als Erster bankrott ist.
Gewinner ist der Spieler, der am Ende der Sitzung am meisten Kapital hat.
Erlaubte Wetten sind: Rot/Schwarz, Gerade/Ungerade, kleine Hälfte/große Hälfte, reine Zahl.

4. Schritt: Spiel mit Quaderwürfeln



In dieser Stunde spielen die Schüler in Gruppen **„Hausnummern würfeln"** (**Arbeitsblatt 1, M1**). Anschließend erklären sie ihre Strategie. Zum Würfeln verwenden sie spezielle „Quaderwürfel". Diese haben gegenüber regulären Würfeln den Vorteil, dass die Symmetrie nicht zu groß ist. Sie sind in Riemer 1991 (s. die Literaturtipps in den Vorüberlegungen) beschrieben. Man kann solche Würfel aber auch selbst herstellen: Latte aus dem Baumarkt, zuschneiden, abschleifen, beschriften. Wichtig ist, dass sich die drei Wahrscheinlichkeiten für die unterschiedlichen Flächen ausreichend unterscheiden, und dass die Würfel möglichst dieselben Maße haben. Zum bequemen Arbeiten sind etwa 3 Würfel je Schüler angemessen.

Das Verhalten von Quaderwürfeln ist weniger leicht vorhersagbar als das von fairen Würfeln. Es bietet auch mehr Möglichkeiten, durch Betrachtung verschiedener Aspekte schwache wie gute Schüler angemessen zu fordern. Damit die Schüler Entscheidungen treffen müssen, werden für dieses Spiel 3 Arten von Würfeln eingesetzt, die gleiche Form haben und nur unterschiedlich beschriftet sind:

blaue Würfel: 3, 4 haben hohe, 1, 6 mittlere, 2, 5 geringe Wahrscheinlichkeit.
grüne Würfel: 2, 5 haben hohe, 3, 4 mittlere, 1, 6 geringe Wahrscheinlichkeit.
rote Würfel: 1, 6 haben hohe, 2, 5 mittlere, 3, 4 geringe Wahrscheinlichkeit.

Die Regeln für das Spiel „Hausnummern würfeln" sind auf dem Arbeitsblatt 1 erklärt.

Anschließend sollen die Schüler die Frage beantworten: „Wie setzt du die Würfel ein? – Erkläre und begründe!" Als Beispiel ist hier die Begründung einer Gruppe (Ingo, Korhan, Levent, Melanie) angegeben:

> *Wir spielen immer mit dem roten Würfel – auf volles Risiko! Besser wäre es allerdings, wenn man zu Beginn des Spiels mit dem roten Würfel wirft, da bei ihm die Möglichkeit am größten ist, eine 1 oder eine 6 zu würfeln. So kann man die 1 an den Anfang und die 6 an den Schluss stellen. Beim 2. und 3. Wurf würde man dann am besten den grünen Würfel nehmen, da bei dem auch noch ein Risiko da ist (größte Flächen 2 und 5), das man falls es schlecht ist, bei den letzten Würfen noch ausgleichen kann. Wenn man auf Sicherheit spielen will, sollte man den blauen Würfel nehmen,*

da bei diesem die größten Flächen 3 und 4 sind. So kann man gewinnen, falls die Anderen zu großes Pech mit ihren Würfen hatten.

Die Schüler zeigen hier schon eine größere Bereitwilligkeit, ihre Gedanken zu formulieren, als zu Beginn der Einheit. Vor allem aber zeigt ihr strategisches Geschick, dass sie die Wahrscheinlichkeiten der verschiedenen Würfel aufgrund ihrer Intuition völlig korrekt einschätzen – schon bevor der Begriff im Unterricht behandelt wird.

5. Schritt: Einschätzung der Quaderwürfel

Die Schüler sollen die Wahrscheinlichkeit für jede Seite des Würfels schätzen. Eine **vorbereitete Folie** (**Arbeitsblatt 2, M2**) liegt auf dem Projektor. Jeder nennt seine Schätzung und sie wird zunächst nur eingetragen.

Einmal hat ein Schüler hier erklärt, dass es reichte, die Wahrscheinlichkeiten für 1-3 anzugeben, weil die für 4-6 aufgrund der Symmetrie gleich seien. Die Klasse war sofort einverstanden. Deshalb haben wir da auch nur die linke Hälfte der Tabelle benutzt.

Am Beispiel dieser Klasse beschreibe ich das weitere Vorgehen.

Bei der Sammlung nahmen die Schüler die Schätzungen der anderen mit durchaus unterschiedlichen Lauten der Anerkennung oder des Zweifels auf. Anschließend fragte ich die Schüler, welche der 24 Schätzungen ihnen nun am glaubwürdigsten vorkommt. Die Glaubwürdigkeit der Schätzungen haben wir in offener Abstimmung ermittelt. Die Ergebnisse stehen in der rechten Spalte.

Name	1	2	3	4	5	6	Glaubwürdigkeit
...							
Fabian	2 %	2 %	46 %				**12,5 %**
Levent	12,5 %	12,5 %	25 %				**0 %**
Sebastian	7 %	3 %	40 %				**21 %**
Melanie	10 %	5 %	35 %				**62,5 %**
Katrin	6 %	1 %	43 %				**0 %**
Markus	15 %	5 %	30 %				**4 %**
...							

Es ist schon erstaunlich, dass die Klasse damit denjenigen Wert auswählte, der sich in den späteren Messungen als der genaueste herausstellte. Es zeigte sich damit auch, dass das intuitive Verständnis der gesamten Gruppe durchaus funktionierte, obwohl der Begriff „Wahrscheinlichkeit" noch nicht systematisch erarbeitet worden war.

Unterrichtsplanung

6. Schritt: Systematische Forschung (4 Stunden)

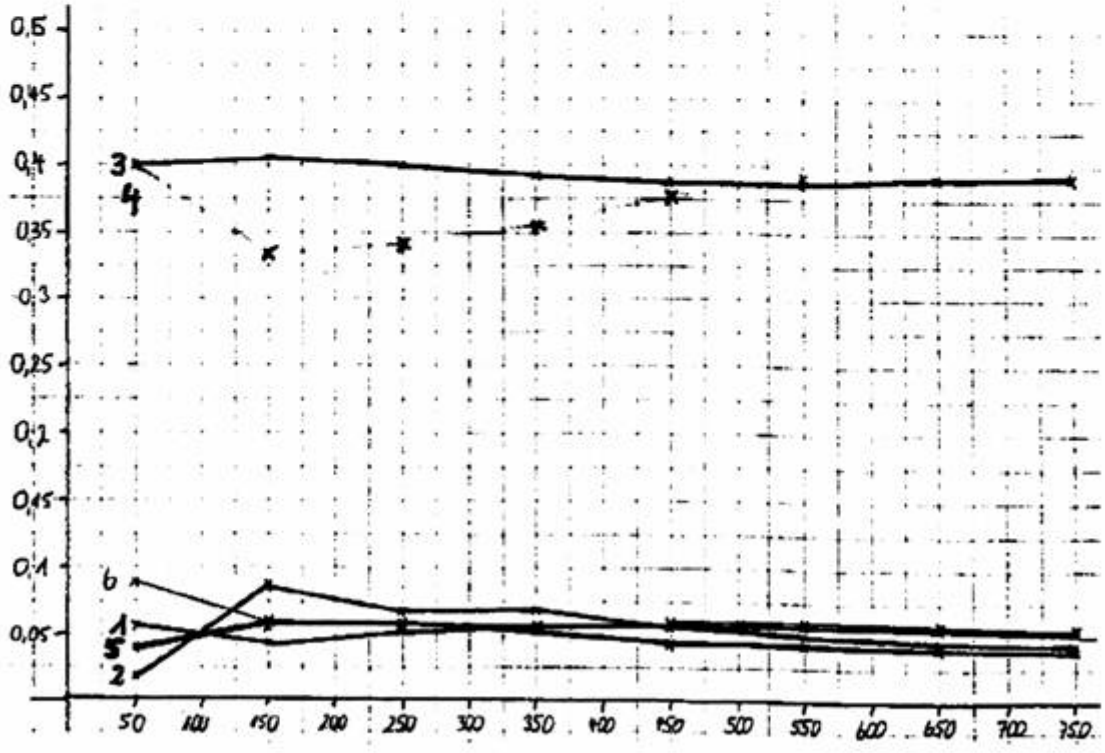
Mit dem **Arbeitsblatt 3** (**M3**) beginnt die systematische Untersuchung unseres Problems. Wir bestimmen die Häufigkeit H(x) für jede Seite des Quaderwürfels bei insgesamt 100 Würfen und wiederholen das Experiment und notieren dabei jedes Mal das Ergebnis. (Anregung für die Schüler: Wie kannst du den Aufwand sinnvoll verringern, wenn dir 2 Würfel zur Verfügung stehen?)

Die Tabelle auf dem Arbeitsblatt 3 beginnt mit zwei Zeilen für die Wurfzahl 50, um die Unterscheidung zwischen absoluter und relativer Häufigkeit zu provozieren. Diese Maßnahme erweist sich manchmal als überflüssig, wenn einige Gruppen aus Versehen zu oft würfeln und z.B. in einer Zeile 104 Würfe eintragen. Daraus ergibt sich die Unterscheidung von absoluter und relativer Häufigkeit ganz von selbst.

Die Schüler sollen erkennen, dass eine Art von Unsicherheit auch nach vielen Würfen bleibt. Sie sollen den sicheren und den unsicheren Aspekt selbst unterscheiden und charakterisieren.

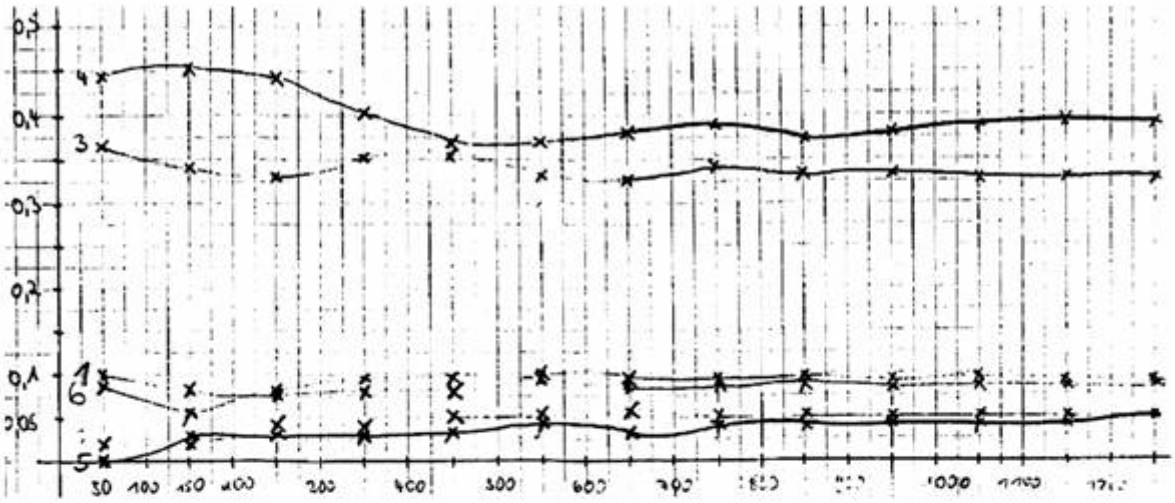
Um die Entwicklung der Häufigkeit geht es im nächsten Schritt mit dem **Arbeitsblatt 4** (**M4**): Die Schüler addieren die Ergebnisse auf und tragen die kumulierte Häufigkeit h(x) in eine weitere Tabelle ein. Danach erstellen sie ein Schaubild.

Es folgen drei **Beispiele** entsprechender Schaubilder.

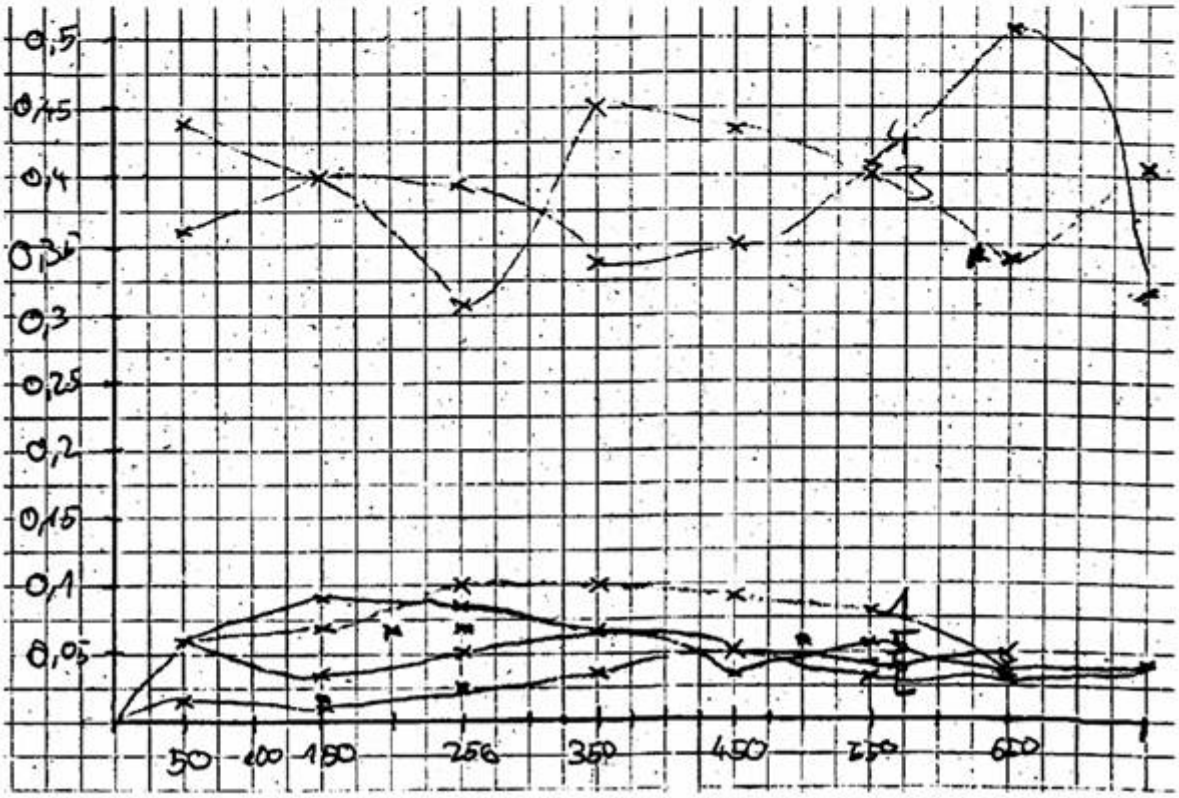


Typischer Verlauf der kumulierten Häufigkeit: Die einzelnen Häufigkeiten werden mit zunehmender Wurfzahl stabiler und die Schaubilder für gegenüberliegende Zahlen (z.B. 3, 4) nähern sich bei großen Wurfzahlen an.

Unterrichtsplanung



Auch hier werden die einzelnen Häufigkeiten mit zunehmender Wurfzahl stabiler. die Schaubilder für 3 und 4 nähern sich bei großen Wurfzahlen aber nicht an. Dies ist willkommener Anlass zur Diskussion: „Werden sie jemals wieder zusammenkommen?"



Hier stabilisiert sich die Häufigkeit für 3 und 4 nicht. Die Gruppe hat versehentlich nicht die kumulierte, sondern die Einzelhäufigkeit aufgetragen. Man erkennt gut, dass die Einzelhäufigkeit immer unsicher bleibt. Stabiler wird die Häufigkeit nur durchs Kumulieren.

Unterrichtsplanung

Die meisten Gruppen wollten die Häufigkeiten H(3) und H(4) mitteln, weil beide wegen der Symmetrie des Würfels eigentlich gleich sein sollten. Ich strebe für die Auswertung eine möglichst differenzierte Diskussionsgrundlage an und ermutige deshalb die Schüler, beide Häufigkeiten zu trennen.

Mit dem Bestimmen der Häufigkeiten haben wir in dieser Klasse 4 Stunden verbracht.
Das ist eine lange Zeit, und man fragt sich, ob dieser Teil nicht auch zu Hause hätte erledigt werden können. In den 4 Stunden haben die Schüler aber nicht nur gewürfelt, sondern sie haben die bis dahin gewonnenen Ergebnisse dargestellt und bewertet. Es fanden lebhafte und kontroverse Diskussionen statt, die auch für mich von großem Interesse waren.

Einige Gruppen zeigten am Ende der zweiten Stunde Ermüdungserscheinungen. Dies lag an der Enttäuschung, dass die Häufigkeiten manchmal erheblich voneinander und von den Erwartungen abwichen. Z.B. ist bei einigen Serien die 2 bzw. 5 häufiger erschienen als die 1 bzw. 6. Das Interesse stieg aber wieder erheblich, als in den beiden folgenden Stunden bei einigen Gruppen eine Stabilisierung der relativen Häufigkeit eintrat.

Während des Würfelns kamen die Schüler immer wieder auf Fragen zum richtigen Vorgehen. Hier hat sich einerseits gezeigt, dass sie motiviert waren, die gestellte Aufgabe richtig zu lösen, es wurde aber auch offenbar, dass sie ohne die Hilfe der Lehrkraft ratlos gewesen wären.

Ist es beispielsweise zulässig, mehrere Quaderwürfel gleichzeitig mit einem Becher zu werfen oder riskiert man dabei, dass sie sich gegenseitig beeinflussen? Die Schüler sind überzeugt, dass man einzeln würfeln muss, denn „wenn es im Becher eng wird, stellen sich die Würfel eher auf eine kleine Seite." Nach einiger Zeit bitten einige Gruppen jedoch um insgesamt drei Würfel, die dann gleichzeitig von drei Schülern mit der Hand geworfen werden. Später kommt eine Gruppe auf die Idee, die 17 insgesamt noch übrigen Würfel in einem geräumigen Plastikbeutel gründlich zu schütteln und auf einmal zu werfen. Sie versuchen dabei, jedem Würfel einen unabhängigen Fall zu ermöglichen.

Die Schüler interessieren sich aber auch für **philosophische Aspekte**: Wenn wir unsere Kenntnis der Häufigkeit vergangener Würfe auf das Verhalten des Würfels in der Zukunft übertragen, kann es keine absolute Sicherheit geben. Die Vorhersagen, die wir auf dieser Basis treffen, können nur im pragmatischen Sinne einigermaßen sicher sein.

7. Schritt: Auswertung der Schaubilder

Die Schaubilder werden vergrößert in der Klasse ausgehängt. Dort bleiben sie auch für einige Wochen hängen. Sie wecken großes Interesse und werden ausführlich und kontrovers diskutiert. Die Diskussion hat **drei Kernsätze** zum Ergebnis:

1. Die kumulierte relative Häufigkeit (h) stabilisiert sich zunehmend um einen Wert, aber absolute Stabilität wird nie erreicht.
2. Die nicht kumulierte Häufigkeit (H) schwankt unverändert.
3. Die relative Häufigkeit einer Zahl hängt auch von den anderen Häufigkeiten ab. Wenn sie bei der Zahl 4 sinkt, muss sie durch andere Zahlen ausgeglichen werden, indem sie bei diesen Zahlen steigt. Alle Häufigkeiten zusammen müssen 100 % ergeben.

Die Qualität der Argumente zeigt den Erfolg der langen Erfahrungsphase. Als **Hausaufgabe** sollten die Schüler ihre Meinung schriftlich darlegen. Die Ergebnisse zeigten eine hohe Bereitschaft, sich mit den Fragen **differenziert** auseinander zu setzen.

Unterrichtsplanung

8. Schritt: Hausaufgabe – drei Fragen zur Häufigkeit

Nachdem die Schüler ausführlich mit den Quaderwürfeln experimentiert haben, sollen sie in einer Hausaufgabe ihre Erfahrungen zusammenfassen. Zu beantworten sind die Fragen:

1. Wie verändert sich die relative, wie die absolute Häufigkeit?
2. Kann man sie vorhersagen?
3. Von welchen Eigenschaften des Würfels hängen sie ab?

Die Schüler waren sehr motiviert, die Frage ausführlich zu beantworten. Hier nur zwei Beispiele:

Katja:

1. Die absolute Häufigkeit verändert sich kaum. Sie schwankt zwar immer ein bisschen, aber wenn die Bedingungen gleich bleiben, kann sich die absolute Häufigkeit natürlich nicht wesentlich verändern. Das gilt auch für die relative Häufigkeit. Die kumulierte relative Häufigkeit wird immer genauer, je öfter man würfelt.
2. Man kann die Häufigkeit ungefähr schätzen, aber ich glaube nicht, dass man sie genau vorhersagen kann. Das ist immer so: man kann vermuten, was in der Zukunft passiert, aber wissen kann man es nicht.
3. Die Häufigkeit hängt von der Form und vom Material des Würfels ab. Außerdem spielen das Gewicht und die Verteilung des Gewichtes auf den Würfel eine Rolle.

Alexander:

1. Angenommen wird, dass diese beiden Häufigkeiten kumuliert gemeint sind. Bei der absoluten Häufigkeit kann man dann sagen, dass sich die Anzahl der jeweiligen Zahl erhöht. Unter bestimmten Umständen kann sie auch gleich bleiben, was aber bei einer Wurfzahl von 100 Würfen recht unwahrscheinlich ist. Wird jeweils gleich oft gewürfelt, dann kann man bei gleichen Bedingungen erwarten, dass die jeweilige Zahl gleich oft gewürfelt ist. Wenn man tatsächlich exakt dieselben Bedingungen bei allen 10 Würfen schaffen kann (keine/gleiche Kälte, Wärme, Luft, exakt die gleiche Wurftechnik, ...), so müsste theoretisch die Zahl nach jeweils 100 Würfen exakt gleich oft vorkommen. Dies wird in der Praxis vom Menschen garantiert nicht erreicht (Maschine???). Jedoch können die von unterschiedlichen physikalischen Bedingungen stammenden Unterschiede nach jeden 100 Würfen durch häufiges Würfeln verhältnismäßig klein gehalten werden. So hat ein Wurf bei 100 Würfen einen Anteil von immerhin 1%. Nach 10000 Würfen beträgt dessen Anteil nur noch 0,1 ‰. Hiermit kann man auch beantworten, wie sich die relative, kumulierte Häufigkeit verhält und verändert. Man kann sagen, dass sich diese Häufigkeit bei jeder Zahl bei einem bestimmten prozentualen Anteil und nach einer längeren Zeit stabilisiert, eben deshalb weil ein Zufall bei 10000 Würfen nicht so viel ausmacht wie bei 100 oder 50 Würfen. Es kann durchaus vorkommen, dass auf dem Schaubild der eine oder andere „Zacken", eben wegen der unterschiedlichen (physikalischen) Bedingungen, das Bild der immer stabiler werdenden Gerade 'verunreinigt'.
2. Bei jeweils denselben Bedingungen (s.o.) kann man in der Theorie sicherlich den prozentualen Anteil einer Zahl vorhersagen. Dies wird in der Praxis auf keinen Fall erreicht, deshalb ist es notwendig, dass man sehr häufig wirft, um die „Ausrutscher" also die Unterschiede wegen der unterschiedlichen Bedingungen so niedrig wie möglich zu halten.
3. Um eine relativ realitätsnahe Prognose machen zu können, ist es nötig, dass man bei allen Würfen denselben oder zumindest einen exakt gleich aufgebauten Würfel benutzt. Die Zahlen müssen bei jedem benutzten Würfel auf der gleichen Seite stehen. Die Inhalte der jeweiligen Flächen müssen exakt gleich groß sein. Die Kanten und Ecken müssen immer gleich geschliffen sein.

Unterrichtsplanung

Zu Alexanders deterministischer Sicht, dass dieselben Bedingungen immer wieder zu demselben Ergebnis führen, ist mir kein Argument eingefallen, mit dem ich einen Schüler der Klasse 10 hätte überzeugen können. Ich habe mich deshalb zurückgehalten. Erfreulich ist die große Bereitschaft des Schülers, seine Gedanken zu formulieren. Dies war zu Beginn der Einheit nicht so.

9. Schritt: Definition der Wahrscheinlichkeit

Zu diesem Zeitpunkt haben die Schüler genügend Erfahrung, selbst eine Definition der Wahrscheinlichkeit zu versuchen. Bestätigt wird dies, weil es den Schülern in den Diskussionen zunehmend bewusst wurde, dass ihre sprachlichen Mittel nicht mehr ausreichten. Gelegentlich wurde sogar explizit gefordert, man müsste sich mal einigen, was man denn unter Wahrscheinlichkeit zu verstehen habe. Da auch der Fachwelt keine einzige, allseits befriedigende Definition gelungen ist, sollten die Schüler das Bemühen um eine akzeptable Lösung selbst erleben.

Wie die Definition im Einzelnen lauten wird, kann bei einer wirklichen Diskussion nicht vorhergesagt werden. Nur als Beispiel wird hier unser Ergebnis genannt. Zuerst wurde die folgende Definition gegeben:

> Die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis ist gleich der relativen Häufigkeit des Ereignisses, z.B. p(3) = h(3).

Diese Definition wurde an die Tafel geschrieben und anschließend zur Diskussion gestellt. Mehrere Schüler kritisierten sie: „Verschiedene Leute würden verschiedene Werte herausbekommen." Daraus entwickeln wir eine verfeinerte Definition:

> Offensichtlich gibt es einen Wert, um den sich bei großen Wurfzahlen die kumulierte relative Häufigkeit eines Ereignisses stabilisiert. Diesen Wert nennt man die Wahrscheinlichkeit p des Ereignisses.

Diese Definition haben wir gleich auf die Quaderwürfel angewendet und kamen aufgrund unserer Messungen mit Berücksichtigung der Symmetrie zu den Werten

> p(1) H„ 9 %; p(2) H„ 4 %; p(3) H„ 37 %

In den Schätzungen (Schritt 4) stimmte Melanies Vorhersage mit den relativen Häufigkeiten am besten überein. Sie hatte vermutet:

> p(1) = 10 %; p(2) = 5 %; p(3) = 35 %

Bemerkenswert ist dabei, dass die beste Vorhersage in der Abstimmung auch von der Mehrheit (63 %) gewählt worden war. Dies zeigt, dass die Schüler von vorneherein durchaus ein Gefühl für statistische Zusammenhänge mitbrachten. Dies sollte im Unterricht nicht ignoriert, sondern ausgebaut werden.

10. Schritt: Vorstellen des fairen Würfels

Wenn der faire Würfel erst nach dem viel interessanteren Quaderwürfel vorgestellt wird, können die Schüler diesen leichten Sonderfall ohne weiteres abhandeln.

5.1 – oder Schwarz?

Unterrichtsplanung

Besonderheiten des fairen Würfels:

1. Alle Seitenflächen sind gleich groß.
2. In jeder Lage ist der Würfel gleich hoch.
3. Die Dichte ist konstant.

Daraus folgt: Die Wahrscheinlichkeit für jede Seite ist gleich.

$$= p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = p(6)$$

Das Laplace-Experiment und die daraus resultierende Definition der Wahrscheinlichkeit wird vorgestellt.

Wahrscheinlichkeit: $p = \frac{\text{Anzahl der günstigen Ereignisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ereignisse}}$

Bei vielen Spielen ist der Wurf zweier Sechsen mit zwei Würfeln (6er-Pasch) ein besonders günstiges Ereignis. Wir planen die experimentelle Bestimmung der Wahrscheinlichkeit. Dieser Teil soll zu Hause durchgeführt werden.

Als Vorbereitung der Berechnung besprechen wir das Baumdiagramm für einen einmaligen Wurf eines fairen Würfels.

Hausaufgabe:
Bestimme die Wahrscheinlichkeit p(6,6) für einen 6er-Pasch, indem du entweder mit zwei Würfeln gleichzeitig oder mit einem Würfel immer zweimal hintereinander wirfst und dies als ein Ereignis wertest.

(Die Beurteilung dieser beiden Wurftechniken ist für die Schüler keineswegs selbstverständlich.)

Hausnummern würfeln

Spieler:

A: ..... B: .....
C: ..... D: .....
E: ..... F: .....

Spielregeln:

Gespielt wird mit 3 Quaderwürfeln, die gleiche Form haben und nur unterschiedlich beschriftet sind. Jeder Spieler füllt sein Zahlenfeld mit 5 Ziffern, jede wird einzeln gewürfelt. Vor jedem Wurf darfst du dir einen der drei Würfel aussuchen, den roten, den grünen oder den blauen. Nach jedem Wurf entscheidest du selbst, in welches Zahlenfeld du die gewürfelte Ziffer einträgst. Gewonnen hat am Ende die kleinste Hausnummer.

Spielfelder:

Spiel 1:

A:						B:					
C:						D:					
E:						F:					

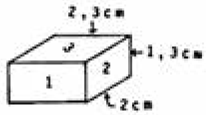
Spiel 2:

A:						B:					
C:						D:					
E:						F:					

Spiel 3:

A:						B:					
C:						D:					
E:						F:					

Geschätzte Wahrscheinlichkeiten für den Quaderwürfel



Vermutungen am blauen Würfel

Name	1	2	3	4	5	6	Glaubwürdigkeit

5.1	Rot setzen – oder Schwarz?
M4	Arbeitsblatt 4

Kumulierte Häufigkeiten

Bestimme die kumulierte Häufigkeit h(x) für jede Seite des Würfels aus deinen Werten und trage sie ein. Fülle die Tabelle aus, soweit du kommst.

Anzahl der Würfe	h(1)	h(2)	h(3)	h(4)	h(5)	h(6)
50						
100						
200						
300						
400						
500						
600						
700						
800						
900						
...						

5.1	Rot setzen – oder Schwarz?
M4	Arbeitsblatt 4

Kumulierte Häufigkeiten

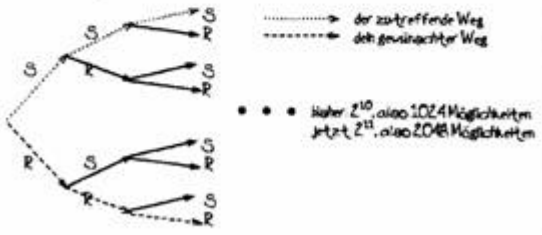
Bestimme die kumulierte Häufigkeit h(x) für jede Seite des Würfels aus deinen Werten und trage sie ein. Fülle die Tabelle aus, soweit du kommst.

Anzahl der Würfe	h(1)	h(2)	h(3)	h(4)	h(5)	h(6)
50						
100						
200						
300						
400						
500						
600						
700						
800						
900						
...						

Weitere Antworten auf die Eingangsfrage

Stell dir vor: Du hast beim Roulette zehnmal gespielt. Jedes Mal hast du auf Rot gesetzt. Jedes Mal hat Schwarz gewonnen. Einmal kannst du noch spielen, bevor dein Geld verbraucht ist.
Auf welche Farbe setzt du? Warum?

Es folgen weitere Beispiele für Antworten von Schülern. Sie zeigen oft eine Veränderung im erwünschten Sinne (korrekte Einschätzung, rationale Begründung, quantitative Aussage). Gelegentlich bleiben aber auch falsche Konzepte erhalten.
Generell zeigen die Antworten eine hohe Bereitschaft der Schüler, sich ausführlich und differenziert auszudrücken – keine Selbstverständlichkeit. Vorausgegangen waren lebhafte Diskussionen, in denen die Lehrkraft immer wieder das Begründen, das gegenseitige Zuhören und das Aufeinander-Eingehen gefördert hatte.
Wichtig ist dabei eine gewisse Toleranz gegenüber falschen Aussagen. Wenn wir Lehrkräfte alle Fehler immer reflexartig sofort korrigieren, führen wir dem Schüler auch immer wieder seine Unmündigkeit vor Augen und reduzieren damit seine Bereitschaft, eine eigene Meinung zu entwickeln und klar darzustellen. Die folgenden Aussagen sind Stationen individueller Lernwege. Respektieren wir sie als solche!

zu Beginn der Einheit [2. Std.]	gegen Ende der Einheit
„Ich bin für schwarz, denn wenn 10 x Schwarz gekommen ist, dann muss beim 11. Mal auch Schwarz kommen. Es ist sowieso fast unmöglich, dass 10 x hintereinander eine Farbe kommt, aber es kann ja ein Zufall sein. Wenn ich auf Schwarz setze, hoffe ich, dass beim 11. Mal auch Schwarz kommt. Wenn ich 10 x mit Rot verloren hätte, dann hätte ich die Hoffnung auf Rot auch verloren, deshalb setzte ich auch auf schwarz." (Ingo)	„Ich bin inzwischen der Meinung, dass es egal ist, ob man auf rot oder schwarz setzt. Es gibt 18 rote und 18 schwarze Felder (und ein grünes Feld). So ergibt sich für rot (schwarz) jeweils die Wahrscheinlichkeit von 48,6 % (für grün 2,7 %). Ich bin aber auch weiterhin der Meinung, dass es sehr unwahrscheinlich ist, dass 10 x hintereinander eine Farbe kommt." (Ingo)
„Ich würde auf Rot erneut setzen, jedoch nur des Gefühls wegen. Ich denke man kann keine Wahrscheinlichkeit aufstellen, da es ein reines Glücksspiel ist, und die Bedingungen jedes Mal unterschiedlich sind (Rouletterad ist schneller, Ball langsamer etc.)." (Matthias)	„Ich glaube, dass es egal ist, auf welche Farbe man setzt, da die Wahrscheinlichkeit sowohl bei Rot als auch bei Schwarz etwas weniger als 50 % beträgt, und somit die Wahrscheinlichkeit, bei Rot oder Schwarz zu gewinnen, gleich ist." (Matthias)
„Ich würde auf Rot setzen. Die Chancen stehen zwar 50:50 aber die Wahrscheinlichkeit dass nach 10 Mal Schwarz Rot kommt, ist größer." (Markus)	„Ich würde auf rot setzen, weil rot jetzt einfach kommen muss. Die Wahrscheinlichkeit, dass rot kommt, ist zwar genauso groß wie die, dass schwarz kommt, nämlich $^{18}/_{37}$ oder ca. 48,5 % aber ich glaube an rot." (Markus)
„Ich würde weiterhin auf Rot setzen, weil die Wahrscheinlichkeit, dass jetzt Rot kommt, größer ist als beim 1.-10. Mal setzen. Ich glaube, dass die Wahrscheinlichkeit für Rot 10 x größer ist, als für Schwarz." (Alexander S.)	„Baumdiagramm:  Die Wahrscheinlichkeit, dass Schwarz bzw. Rot kommt ist logischerweise jeweils 50 %. Wie beim fairen Würfel, sind auch hier für beide möglichen Fälle gleiche Bedingungen geschaffen, die sich nach längerer Zeit in der Exaktheit der relativen Häufigkeit bemerkbar machen. Damit wäre be-

Rot setzen – oder Schwarz?

wiesen, dass sich die relative Häufigkeit bei diesem Fall höchstwahrscheinlich eher Richtung Mitte bewegt, als dass jetzt ein weiteres Mal Schwarz kommt.

Schaubild:

Theoretisch müssten die Kurven jetzt so weiter verlaufen, bis sie nach der 20. Runde beide bei 50 % angelangt sind. Jedoch weiß man bereits aus der Praxis, da Schwarz und Rot sich nicht wie erwartet abwechselten, sondern 10 x Schwarz kam, dass dies wieder unwahrscheinlicher wird. Nach der 10. Runde ist das Wahrscheinlichkeitsverhältnis von Rot zu Schwarz 10:1 (oder 10/11:1/11). Nach der 11. Runde wären es 11:1, falls wieder Schwarz gekommen wäre und 10:2 nach Rot.
Antwort: Ich würde auf Rot setzen, da die Wahrscheinlichkeit größer als 50 % ist. Jedoch würde ich mich vorher davon versichern, ob das Roulette nicht gezinkt wurde?" (Alexander S.)

„Es ist wahrscheinlich, dass nach dem 10ten Mal endlich Rot kommt. Wenn man unendlich oft spielt, gibt es genauso viele schwarze Treffer wie rote. Jetzt sind von den unendlich vielen schwarzen schon 10 abgegangen, d.h. es gibt 10 überschüssige Rote, welche zu der 50 % Chance dazukommen. Die Chance Rot zu treffen ist also 50 % + 10 rote Kugeln, verteilt auf eine unendlich lange Spiellänge. Die Wahrscheinlichkeit, dass Rot kommt, liegt aber nur gering über 50 %." (Timo)

„Ich würde auch das 11te Mal auf Rot setzen. Weil, wenn man immer auf eine Farbe setzt, liegt die Chance, sein Geld wieder doppelt zurückzubekommen ungefähr 48,6 %. Da bis jetzt die Chance 0 % war, muss sie noch kräftig steigen, da es im Unendlichen im Durchschnitt » 48,6 % sein müssen." (Timo)

„Wenn es ein Gesetz der Serie gäbe, würde ich auf Schwarz setzen, sozusagen als Glückssträhne. Wenn es letzteres nicht gibt, so setze ich auf Rot, weil die Wahrscheinlichkeit, dass Rot kommt, höher wird je öfter Schwarz hintereinander gefallen ist. Theoretisch gesehen beträgt die Chance jedoch 50 %, dass Rot fällt, und 50 %, dass Schwarz fällt." (Alen)

„Ich würde rot nehmen, weil es wahrscheinlicher ist, dass nach 10-mal schwarz rot kommt, weil es schon sehr unwahrscheinlich ist, dass 10-mal schwarz kommt, und es deshalb noch unwahrscheinlicher ist, dass schwarz ein elftes Mal kommt. Es ist zwar mathematisch nicht begründbar, aber auf jeden Fall logisch." (Alen)

„Ich würde auf Schwarz setzen, weil ich nicht glaube, dass genau beim 10. Mal die Farbe sich wieder ändert. Es hätte auch schon beim 7. Mal sich ändern können oder es kann auch erst nach dem 13. Mal passieren." (Regina)

„Man kann nicht sagen, ob rot oder schwarz kommt. Weil jedes Mal, wenn man wieder neu dreht, ist die Wahrscheinlichkeit, dass schwarz oder rot kommt, wieder gleich groß ist: $p = {}^{18}/_{37}$„ (Regina)

„Ich würde auf Rot setzen. Ich habe jedes Mal gehofft, dass Rot kommt und jedes Mal hat Schwarz gewonnen. Deshalb würde ich mich ärgern, wenn ich jetzt auf Schwarz setzen, also wechseln würde, und Rot gewinnen würde. Weniger würde ich mich ärgern, wenn ich wieder auf Rot gesetzt hätte und Schwarz gewonnen hätte. Ich bleibe konsequent und weiche nicht von Rot ab." (Nina)

„Ich würde immer noch auf rot setzen. Dass schwarz oder rot als nächstes kommt ist gleich wahrscheinlich. Ich habe die ganze Zeit auf rot gesetzt und immer darauf vertraut, dass rot kommt, also weiche ich auch beim 11. Mal nicht davon ab. Denn wenn ich jetzt auf schwarz setzen würde, und es würde rot kommen, würde ich mich mehr ärgern, als wenn ich konsequent weiter auf rot gesetzt hätte, und schwarz gekommen wäre. Ich hätte ja auch die vorherigen Male die Farbe wechseln können, doch ich bin bei rot geblieben, da ich mich, wenn ich von meiner konsequenten Linie „Rot" abgewichen wäre, und rot gekommen wäre „schwarz geärgert" hätte." (Nina)