VI Wahrscheinlichkeiten

Auch der Zufall ist nicht unergründlich; er hat seine Regelmäßigkeit

Novalis (Schriftsteller 1772–1801)

Das kannst du bald

- Wahrscheinlichkeiten von relativen Häufigkeiten unterscheiden
- Wahrscheinlichkeiten schätzen
- Mehrstufige Zufallsexperimente durch Baumdiagramme beschreiben
- Mithilfe der Pfadregel Wahrscheinlichkeiten berechnen

Check-in

Schätze dich ein:

1. **Ich kann Anteile als Bruch und in Prozent angeben.**
2. **Ich kann Brüche erweitern und kürzen.**
3. **Ich kann Brüche addieren und subtrahieren.**
4. **Ich kann relative Häufigkeiten aus absoluten Häufigkeiten bestimmen.**
5. **Ich kann Anteile berechnen und Brüche miteinander multiplizieren.**

Lerntipps

zu **1.** **Grundwissen**, Seite 230
zu **2.** **Grundwissen**, Seite 230
zu **3.** **Grundwissen**, Seite 231
zu **4.** **Grundwissen**, Seite 237
zu **5.** **Grundwissen**, Seite 231

Teste dich!

Lösungen, Seite 282

1 Darstellen von Anteilen

a) Schreibe als Bruch. Kürze so weit wie möglich.
(1) 1 % (2) 6 % (3) 25 % (4) 60 %

b) Gib in Prozent an.
(1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{4}{5}$ (3) $\frac{80}{200}$ (4) $\frac{2}{3}$

2 Erweitern, Kürzen und Vergleichen

a) Erweitere $\frac{7}{15}$ mit 4.

b) Kürze $\frac{81}{63}$ mit 9.

c) Kürze $\frac{120}{75}$ so weit wie möglich.

d) Ordne $\frac{5}{6}$, $\frac{13}{15}$ und $\frac{7}{10}$ der Größe nach.

3 Addieren und Subtrahieren von Brüchen

Übertrage die Rechenkette ins Heft und vervollständige sie.

a) $\frac{1}{3} \xrightarrow{+\frac{1}{2}} \bigcirc \xrightarrow{+\frac{1}{4}} \bigcirc \xrightarrow{-\frac{5}{6}} \bigcirc \xrightarrow{+\frac{1}{3}} \bigcirc \xrightarrow{-\frac{5}{12}} \bigcirc \xrightarrow{+\frac{1}{6}} \frac{1}{3}$

b) $\frac{1}{4} \xrightarrow{+\frac{2}{5}} \bigcirc \xrightarrow{-\frac{1}{2}} \bigcirc \xrightarrow{\square} \frac{7}{20} \xrightarrow{\square} \frac{3}{5} \xrightarrow{-\frac{1}{2}} \bigcirc \xrightarrow{+\frac{1}{4}} \frac{7}{20}$

4 Relative Häufigkeiten aus absoluten Häufigkeiten bestimmen

Ein Reiseveranstalter führt eine Befragung nach den beliebtesten Urlaubsgebieten durch:

Gebiet	Deutschland	Italien	Spanien	Griechenland	Frankreich	Portugal
Anzahl	20	112	143	41	84	11

Bestimme die relativen Häufigkeiten für die einzelnen Urlaubsgebiete.

5 Anteile berechnen und Brüche multiplizieren

Berechne.

a) $\frac{2}{3}$ von 600

b) 17 % von 150

c) $\left(\frac{1}{6}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)$

d) 25 % von 50

e) 25 % von 30 %

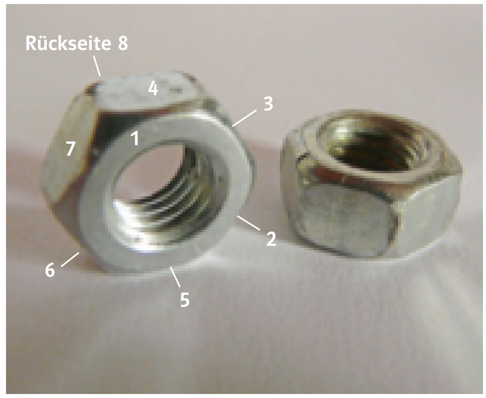
f) $\left(\frac{1}{6}\right)^3$

Kopiervorlage
Checkliste
4z83ga

Mit Schraubenmuttern „würfeln“

Lerneinheit 1
Seite 200

Auch mit Schraubenmuttern kann man würfeln! Wenn man sie beschriftet wie in Fig. 1, erhält man Augenzahlen zwischen 1 und 8.



Die Summe der Augenzahlen auf den Gegenseiten beträgt 9. Fig. 1

1. Spekulieren und Schätzen
- Zunächst schätzt jeder für sich die Chancen, mit denen die einzelnen Seiten beim Würfeln mit einem Würfelbecher oben zu liegen kommen.
- Vergleicht eure Schätzungen und versucht, euch auf eine gemeinsame zu einigen.
- Notiert, worauf ihr geachtet habt, um zu einer gemeinsamen Schätzung zu kommen.

2. Experimentieren
(relative Häufigkeiten bestimmen)
Bildet Fünfergruppen.
Jeder würfelt die Schraubenmutter 100-mal in einem Würfelbecher und protokolliert die Ergebnisse in einer Tabelle mit 10×10 Feldern wie in Fig. 2.
Zählt, wie oft die Augenzahlen 1 bis 8 jeweils gefallen sind. Übertragt die absoluten Häufigkeiten eurer Fünfergruppe in eine Tabelle (Fig. 3) und ermittelt die relativen Häufigkeiten, die eure Gruppe für die einzelnen Ergebnisse erhalten hat.

Vorlage Auswertungsvorlage 4z83ga

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	3	4	2	8	2	5	1	6	7	1
2										
3										
⋮		⋮			⋮			⋮		
8										
9										
10										

Fig. 2

1	//
2	//
3	/
4	/
5	/
6	/
7	/
8	/

Wenn man **gleichzeitig** zur Urliste die Strichliste anfertigt, geht das Auszählen schneller.

Name	1	2	3	4	5	6	7	8
Philipp								
Sascha								
Niki								
Nora								
Alessa								
rel. Häuf. (in %)								

absolute und relative Häufigkeiten je Fünfergruppe Fig. 3

3. Bewerten
Vergleicht die relativen Häufigkeiten aus Fig. 3 mit euren Schätzungen aus Auftrag 1 und bewertet so die Qualität eurer ersten Schätzungen. Gebt anschließend eine neue Schätzung ab, auf die sich eure ganze Gruppe oder die ganze Klasse einigen kann.

Prinzessin sucht Prinzen

Eine Prinzessin sucht den schönsten Prinzen. Sechs werden sich ihr nacheinander vorstellen. Jeden kann sie wegschicken (er kommt dann aber nie mehr zurück) oder erwählen. Wenn sie einen erwählt hat, dann können sich die restlichen aber nicht mehr vorstellen. Ihre Strategie: Sie schickt die ersten beiden Prinzen immer weg (die setzten die Maßstäbe). Danach wählt sie den ersten Prinzen, der schöner ist als die beiden ersten.

Lerneinheit 1
Seite 200

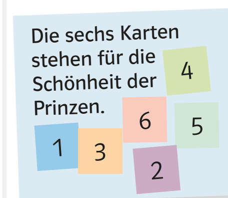
Beispiele:
- Wenn der schönste Prinz unter den ersten beiden (zurückgewiesenen) war, hat sie Pech und ihre Suche bleibt erfolglos, weil ein schönerer nicht mehr kommen kann (vgl. Zeile 1 in der Tabelle).
- Wenn die beiden Prinzen auf Schönheitsrang 3 und 6 zuerst kamen, dann die mit Rang 5, 4 und 2, wählt sie Rang 2 – und hat wieder Pech, weil sich der Schönste nicht mehr vorstellt (vgl. Zeile 3 in der Tabelle).

Die ersten beiden	Der schönere der ersten beiden	Weitere vorgestellte Prinzen	Die Prinzessin wählt	So viele haben sich vorgestellt
5, 1	1	6, 2, 4, 3	Keinen	6
3, 5	3	1	1 (den Schönsten)	3
3, 6	3	5, 4, 2	2 (den Zweitschönsten)	5

1. Schätze die Chance (in Prozent), dass die Prinzessin den schönsten Prinzen erwählt.
2. Schätze, wie viele Prinzen sie im Mittel begutachten wird.
3. Überprüft eure Schätzungen, indem ein Partner die wählerische Prinzessin spielt und der andere die Prinzen mithilfe beschrifteter gut gemischter Karten in zufälliger Reihenfolge vorbeischickt. Protokolliert wie in der Tabelle oben.
4. Fasst die Ergebnisse in Gruppen oder im Klassenverband zusammen und bewertet eure Schätzungen aus 1. und 2.

Wenn man die Prinzessin durch eine Personalchefin, die Prinzen durch Stellenbewerber und Schönheit durch Qualifikation ersetzt, gewinnt das Märchen reale Bedeutung.

Interaktives Forschen
Simulation „Prinzessin"
4z83ga

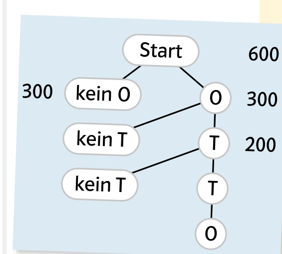


Hol OTTO aus dem Beutel

In einem Beutel liegen vier Kugeln, zwei mit dem Buchstaben O und zwei mit dem Buchstaben T beschriftet. Man zieht nacheinander die vier Buchstaben aus dem Beutel und legt sie in der gezogenen Reihenfolge zu einem Wort hintereinander.
Wer dabei OTTO zieht, bekommt einen Hausaufgabengutschein oder einen anderen Preis.

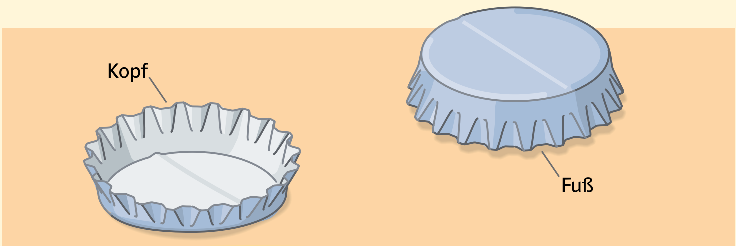
Lerneinheit 4
Seite 214

1. Lasst den Beutel in der Klasse kreisen, sodass jeder einmal das Beutelexperiment durchführen kann. Wie viele von euch haben das Wort OTTO gezogen?
2. Es gibt eine Reihe von Fragen, die man nach diesem Experiment stellen kann. Jeder von euch hat fünf Minuten Zeit, mögliche Fragen aufzuschreiben. Setzt euch dann in kleinen Gruppen zusammen, sucht die besten Fragen heraus und versucht, so viele zu beantworten, wie ihr in zehn Minuten schafft. Berichtet darüber.
3. Die Grafik veranschaulicht, was man erwarten könnte, wenn man 600 „OTTO-Experimente" durchführen würde. Übertragt das Diagramm in euer Heft und vervollständigt die Beschriftung. Besprecht die Informationen und diskutiert, welche Zusammenhänge es zu euren selbst formulierten Fragen gibt.
4. Zum Weiterdenken: Angenommen, ihr würdet das „OTTO-Experiment" auf einem Klassenfest anbieten und jeder, der OTTO zieht, bekommt einen Euro. Wie hoch sollte der Einsatz mindestens sein, damit ihr langfristig keinen Verlust macht?



1 Wahrscheinlichkeit

Kronkorken können auf „Kopf" oder „Fuß" landen, wenn man mit ihnen „würfelt".
Hannah: „Die Fußlage" ist wahrscheinlicher, weil die Auflagefläche größer ist."
Simon: „Nein, Kopf ist wahrscheinlicher, weil die schwere Seite dann unten liegt.
- Welcher Position schließt du dich an?
- Stimmt ab und überprüft anschließend durch ein Experiment, wer recht hat.



Im Alltag sammeln wir Erfahrungen, die sich im Laufe der Zeit zu Erwartungen verfestigen. Diese Erwartungen sind dann Anlass für (mehr oder weniger sichere) Prognosen. Bei Zufallsexperimenten lassen sich die Erfahrungen durch **relative Häufigkeiten** und die Erwartungen durch **Wahrscheinlichkeiten** beschreiben. Dieser Zusammenhang wird im Folgenden an einem Beispiel erforscht, das man nachspielen kann.

Statt von Wahrscheinlichkeiten, spricht man im Alltag auch von Chancen.

Wahrscheinlichkeiten schätzen
Beim Würfeln des Quaders (s. rechts) können die Augenzahlen 1, 2, …, 6 auftreten. Man nennt diese Augenzahlen die **möglichen Ergebnisse.** Welches Ergebnis eintreten wird, kann man nicht vorhersagen. Es hängt vom Zufall ab. Man spricht von einem **Zufallsexperiment**.

Quader mit den Maßen 1,3 cm × 2,0 cm × 2,3 cm

Die Augensumme gegenüberliegender Seiten ergibt 7 – wie beim Spielwürfel.

Obwohl sich das einzelne Ergebnis nicht vorhersagen lässt, kann man Wahrscheinlichkeiten für die Ergebnisse des Zufallsexperiments schätzen.
Hierbei beachtet man, dass die Summe aller Wahrscheinlichkeiten 1 bzw. 100% ergibt.
Aufgrund der Symmetrie des Quaders kann man außerdem davon ausgehen, dass
(1) einander gegenüberliegende Seitenflächen die gleiche Wahrscheinlichkeit und
(2) größere Seitenflächen größere Wahrscheinlichkeiten besitzen.

In einer Klasse haben sechs Schülerinnen und Schüler wie folgt geschätzt:

Ergebnis	1	2	3	4	5	6
Sandra	10 %	5 %	35 %	35 %	5 %	10 %
Alex	14 %	6 %	30 %	30 %	6 %	14 %
Jessi	10 %	10 %	30 %	30 %	10 %	10 %
Stefan	9 %	7 %	37 %	33 %	3 %	11 %

Man erkennt, dass die Schätzungen von Jessi und Stefan nicht überzeugen. Denn
– die Schätzung von **Jessi** widerspricht der Idee „Je größer die Seitenfläche, desto größer die Wahrscheinlichkeit".
– bei der Schätzung von **Stefan** haben gegenüberliegende Seitenflächen nicht die gleiche Wahrscheinlichkeit. Er hat vermutlich an relative Häufigkeiten gedacht, also an den Ausgang eines speziellen Versuchs und nicht an Wahrscheinlichkeiten.

Experimentieren
Um zu entscheiden, welche Schätzung die Wirklichkeit am besten beschreibt, muss man experimentieren. Man braucht relative Häufigkeiten aus möglichst vielen Versuchen.
Zwei Fünfergruppen haben je 100-mal gewürfelt und dabei folgende Ergebnisse erhalten.

Gruppe 1

Ergebnis	1	2	3	4	5	6	Summe
abs. Häuf.	46	32	167	154	38	63	500
rel. Häuf. (in %)	9,2	6,4	33,4	30,8	7,6	12,6	100

Gruppe 2

Ergebnis	1	2	3	4	5	6	Summe
abs. Häuf.	48	36	164	166	36	50	500
rel. Häuf. (in %)	9,6	7,2	32,8	33,2	7,2	10	100

Bewerten/Verbessern

Das Experiment zeigt, dass Sandra und Alex vorab schon recht gut geschätzt hatten. Die Schätzungen lassen sich im Nachhinein mithilfe der letzten Zeilen der Tabellen oben noch verbessern. Die folgende Tabelle zeigt ein Beispiel für eine verbesserte Schätzung.

Ergebnis	1	2	3	4	5	6
Wahrscheinlichkeit	10 %	7 %	33 %	33 %	7 %	19 %

Wahrscheinlichkeit

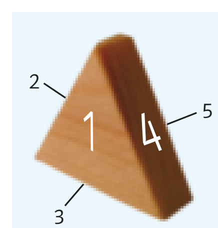
Bei einem **Zufallsexperiment** kann man die einzelnen **Ergebnisse** nicht vorhersagen. Man kann ihnen aber **Wahrscheinlichkeiten** zuordnen, die zusammen 1 (100 %) ergeben. Mit Wahrscheinlichkeiten drückt man aus, welche **relativen Häufigkeiten** man bei langen Versuchsreihen in etwa **erwartet**.
Beim **Schätzen** von Wahrscheinlichkeiten orientiert man sich an relativen Häufigkeiten aus vergangenen Versuchsreihen und beachtet Symmetrien. Je mehr Versuche man gemacht hat, desto größer wird das Vertrauen in die zugehörige Schätzung der Wahrscheinlichkeiten.

Das große Vertrauen in Schätzungen, die auf vielen Versuchen beruhen, lässt sich durch das **Gesetz der großen Zahlen** rechtfertigen. Es besagt: Die Abweichungen der relativen Häufigkeiten von den Wahrscheinlichkeiten werden mit steigender Versuchszahl tendenziell kleiner.

Mehr zum Gesetz der großen Zahlen findet sich auf Seite 207 in Aufgabe 11 und in der Exkursion auf Seite 225.

Beispiel **Wahrscheinlichkeiten schätzen**

a) Schätze für den Dreieckswürfel rechts die Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse 1 bis 5.
b) Verbessere die Schätzung nach einem Experiment. Erläutere dein Vorgehen.



Mögliche Lösung

a) 1 und 5 sowie 2, 3 und 4 besitzen jeweils gleiche Wahrscheinlichkeiten. Da der Würfel flach ist, werden 1 und 5 wahrscheinlicher auftreten als 2, 3 und 4 (vgl. Erste Schätzung).
b) 300 Würfe haben die rechts (Versuchsergebnisse) dargestellten Häufigkeiten ergeben. Da man annehmen kann, dass die Wahrscheinlichkeiten für 1 und 5 gleich sind, verwendet man den Mittelwert aus den zugehörigen relativen Häufigkeiten (35 % + 32 %) : 2 = 77 % : 2 = 33,5 % als Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit. Aus dem gleichen Grund schätzt man die Wahrscheinlichkeit für 2, 3 und 4 auf je (12 % + 10 % + 11 %) : 3 = 11 %. (vgl. Neue Schätzung).

Erste Schätzung

Augenzahl	1	2	3	4	5
Schätzung	30 %	$13\frac{1}{3}$ %	$13\frac{1}{3}$ %	$13\frac{1}{3}$ %	30 %

Versuchsergebnisse

Augenzahl	1	2	3	4	5
absolute Häufigkeit	104	37	29	34	96
relative Häufigkeit	35 %	12 %	10 %	11 %	32 %

Neue Schätzung

geschätzte Wahrscheinlichkeit	0,335 33,5 %	0,11 11 %	0,11 11 %	0,11 11 %	0,335 33,5 %

Aufgaben

○ **1** Der nebenstehende Würfel ist eigentlich als Ventilkappe fürs Fahrrad gedacht. Er besitzt auf der Seite 1 ein schweres Metallgewinde. In einem Experiment wurde 200-mal damit gewürfelt. Die Tabelle zeigt Schätz- und Würfelergebnisse.

	Seite 1	Seite 2	Seite 3	Seite 4	Seite 5	Seite 6
(1)	9,0 %	16,5 %	16,5 %	16,5 %	16,5 %	25,0 %
(2)	8,5 %	16,0 %	16,5 %	19,0 %	15,5 %	24,5 %
(3)	5,0 %	10,0 %	10,0 %	10,0 %	10,0 %	55,0 %
(4)	17	32	33	38	31	49

Die „6“ liegt dem Gewinde „1“ gegenüber.

a) Ordne den Zeilen (1) bis (4) die Begriffe zu, die auf den Kärtchen stehen.
b) Begründe deine Zuordnung.

A Wahrscheinlichkeitsschätzung nach dem Experiment

B relative Häufigkeit

C absolute Häufigkeit

D Wahrscheinlichkeitsschätzung vor dem Experiment

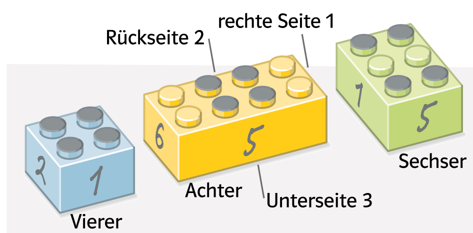
○ **2** **a)** Paul hat Legosteine wie einen Würfel beschriftet und die Wahrscheinlichkeiten für Vierer, Achter und Sechser geschätzt, ohne vorher einen Versuch durchzuführen. Ordne die Schätzungen den Steinen zu. Begründe deine Zuordnung.

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
Schätzung 1	10 %	10 %	40 %	20 %	10 %	10 %
Schätzung 2	10 %	0,5 %	47 %	32 %	0,5 %	10 %
Schätzung 3	11 %	1,5 %	45 %	30 %	1,5 %	11 %

Lerntipp
Seite 201, Beispiel

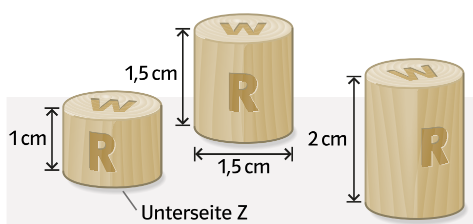
b) Bei dem Achter ergaben sich bei 400 Würfen die folgenden relativen Häufigkeiten.
Sollte Paul seine Schätzung daraufhin verändern? Begründe.

1	2	3	4	5	6
9 %	2 %	46,5 %	28,75 %	0 %	12,75 %



○ **3** Die „Zylinderwürfel“ haben den Durchmesser 1,5 cm. Die Kreisflächen sind wie Münzen mit Wappen W und Zahl Z beschriftet. Zusätzlich gibt es den Rand R.
a) Sandro und Sabine haben je 50-mal mit dem mittleren „Zylinderwürfel“ gewürfelt und die in der Tabelle abgebildeten Häufigkeiten erhalten. Gib eine sinnvolle Schätzung der Wahrscheinlichkeiten an.
b) Schätze unter Berücksichtigung von Teilaufgabe a) die Wahrscheinlichkeiten der anderen Zylinder. Erläutere, worauf du achtest.

Üben ○
Seite 218, Aufgabe 1



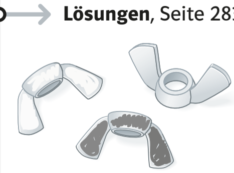
Ergebnis	Z	R	W
Sandro	9	35	6
Sabine	13	32	5

Teste dich!

Lösungen, Seite 283

○ **4** Wenn man Flügelmuttern auf einer Seite schwarz und auf der anderen weiß markiert, gibt es beim „Würfeln“ drei mögliche Ergebnisse. Heiko hat 50-mal, Simon 200-mal gewürfelt.

	schwarz	weiß	Boden
Heiko	20	24	6
Simon	88	95	17



a) Notiere sinnvolle Wahrscheinlichkeiten, die Heiko bzw. Simon nach ihren jeweiligen Versuchsreihen hätte angeben können. Erläutere deine Gedanken.
b) Fasse die Ergebnisse zusammen und notiere eine bessere Schätzung.

5 Ulla und Mario streiten sich, wer von beiden den Tisch decken muss. Ulla schlägt vor „Du darfst dreimal würfeln. Wenn du dabei eine 6 würfelst, decke ich den Tisch, sonst du.“ Mario erscheint der Vorschlag fair.
Überprüft in einem Experiment, ob Mario auf den Vorschlag eingehen sollte.

6 Bei Quadern ist die Wahrscheinlichkeit für eine Seitenfläche umso größer, je größer ihr Flächeninhalt ist. Jo vermutet, einen proportionalen Zusammenhang.
a) Berechne die Größe der Seitenflächen des Quaders mit den Kantenlängen 1,3 cm, 2 cm und 2,3 cm (vgl. Seite 200) und die gesamte Oberfläche.
b) Berechne den Anteil jeder Seitenfläche an der Gesamtfläche in Prozent.
c) Vergleiche mit den Versuchsergebnissen auf Seite 201. Bewerte Jos Vermutung.

Erforschen ●
Seite 221, Aufgabe 17

Teste dich!

Lösungen, Seite 283

7 Helena, Susanne und Jan experimentieren mit Reißnägeln einer bestimmten Sorte. Helena erhält bei 250 Würfen 177-mal Kopf, Susanne in 500 Würfen 342-mal Kopf und Jan in 750 Würfen 466-mal Kopf. Sie schätzen die Wahrscheinlichkeiten unterschiedlich zu 70,8 % bzw. 68,4 % bzw. 62,1 %.
a) Erläutere, wie die drei vorgegangen sind.
b) Erläutere, welchen Schätzwert du selbst abgeben würdest.

8 Jonas wirft drei Münzen gleichzeitig und zählt, wie viele der Münzen „Wappen“ zeigen, also, ob 0-mal, 1-mal, 2-mal oder 3-mal Wappen zu sehen ist.


0-mal Wappen


3-mal Wappen

a) Schätze die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten.
b) Wirf 60-mal drei verschiedene Münzen und überprüfe deine Schätzung.
c) Heiko: „Bei drei verschiedenen Münzen gibt es 8 verschiedene Ergebnisse. Damit kann ich die Wahrscheinlichkeiten ohne Versuche nur durch Abzählen genau bestimmen.“ Notiere die „8 Möglichkeiten“ und zu welchem Ergebnis Heiko vermutlich kommt. Vergleiche mit deinem Ergebnis aus Teilaufgabe b).

9 SP Hannah: „Münzen sind symmetrisch. Deswegen erwarte ich beim Münzenwerfen 50 % „Wappen“ und zwar unabhängig davon, ob ich 2, 4, 8 … oder 100 Münzen werfe.“
Max: „Das bezweifle ich. Bei zwei Münzen sind 50 % „Wappen“ wahrscheinlicher als bei 4 Münzen und bei vier Münzen wahrscheinlicher als bei acht Münzen und bei 8 Münzen wahrscheinlicher als bei 100 Münzen.“
Claudia: „Hannah hat recht, Max aber auch!“
a) Erforscht mithilfe eines Experiments, was Hannah und Max ausdrücken wollen. Nehmt Stellung zu Claudias Aussage. Belegt eure Aussagen durch Daten aus eurem Experiment.
b) Formuliert ein Forschungsergebnis, in dem Begriffe der Kärtchen vorkommen.

A relative Häufigkeit
B Wahrscheinlichkeit
C nahe dran
D genau gleich
E ungefähr gleich
F sehr wahrscheinlich
G unwahrscheinlich
H gleich wahrscheinlich

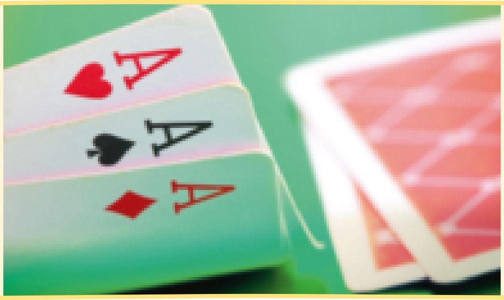
Teste dein Grundwissen! Terme aufstellen

Grundwissen,
Seite 125, Beispiel 2
Lösungen, Seite 283

G **10** x steht für eine ausgedachte ganze Zahl. Notiere den Term, für die Berechnung
a) des Vorgängers,
b) des Doppelten des Vorgängers,
c) des Vorgängers des Doppelten,
d) des Doppelten vom Fünffachen.
Überprüfe jeweils, ob deine Ergebnisse stimmen können, indem du $x = 3$ und $x = -2$ einsetzt.

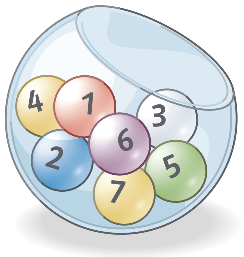
2 Laplace-Wahrscheinlichkeit – Summenregel

Auf dem Tisch liegen verdeckt drei Spielkarten, zwei rote und eine schwarze. Es sollen zwei Karten gezogen werden. Würdest du eher auf gleiche oder auf verschiedene Farben tippen? Bei einem richtigen Tipp gewinnst du. Gebt eure Tipps ab und spielt das Spiel. Denkt nach, experimentiert! Was wäre, wenn man aus vier Karten zieht?



Es gibt Zufallsexperimente, bei denen man nicht experimentieren muss, um Wahrscheinlichkeiten angeben zu können. Die Wahrscheinlichkeiten beruhen auf der Annahme einer vollständigen Symmetrie. Man spricht von Laplace-Experimenten, Laplace-Annahmen und von Laplace-Wahrscheinlichkeiten. Das wird im Folgenden an einem Beispiel erläutert.

Das Ziehen einer Kugel aus dem rechts abgebildeten Gefäß mit geschlossenen Augen ist ein Zufallsexperiment. Die möglichen Ergebnisse sind 1, …, 7. Wenn man annimmt, dass sich die Kugeln gleich anfühlen (Symmetrieannahme), dann kann man jedem Ergebnis die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{7} \approx 14{,}3\,\%$ zuordnen. Man schreibt dafür $P(1) = \frac{1}{7}, \ldots, P(6)\ \frac{1}{7}$.



P steht für (lateinisch) **probabilis** = glaubhaft, wahrscheinlich.

Wenn man mehrere Ergebnisse zusammenfasst, nennt man das ein **Ereignis**. Beispielsweise gehören zum Ereignis „gelb“ die Ergebnisse 4 und 7. Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses „gelb“ ist dann $\frac{2}{7}$, denn zwei der sieben Ergebnisse gehören zum Ereignis „gelb.“ Man schreibt: $P(\text{gelb}) = P(4; 7) = P(4) + P(7) = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = \frac{2}{7}$.

Laplace-Experimente
Zufallsexperimente, bei denen man annimmt, dass alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich sind, nennt man **Laplace-Experimente**. Für diese Zufallsexperimente muss man keine Versuchsreihen durchführen, um Wahrscheinlichkeiten angeben zu können.
Wenn es k Ergebnisse gibt, beträgt die Wahrscheinlichkeit eines jeden Ergebnisses $\frac{1}{k}$.

Summenregel
Wenn man mehrere Ergebnisse zu einem **Ereignis** zusammenfasst, erhält man die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses als Summe der Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse.
Bei Laplace-Experimenten gilt damit:

$$P(\text{Ereignis}) = \frac{\text{Anzahl der zum Ereignis gehörenden Ergebnisse}}{\text{Anzahl aller möglichen Ergebnisse}}$$

Reale Spielwürfel sind wegen der eingedruckten Augenzahlen oder der Materialstruktur nie ganz symmetrisch und kleine Neigungen der Unterlage beeinflussen die Wahrscheinlichkeiten bei Glücksrädern (vgl. Seite 224). Daher sind auch Laplace-Wahrscheinlichkeiten nur Modelle, die die Wirklichkeit oft gut, aber selten ganz genau beschreiben. In der Praxis spielen die Abweichungen aber meist keine Rolle.

Beispiel 1 Erwartete absolute Häufigkeiten

a) Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beim Würfeln mit dem Tetraeder in Fig. 1 die „3" unten liegt.
b) Schätze, wie oft etwa die „3" bei 800 Versuchen unten liegen wird.

Lösung

a) Man nimmt an, dass der Tetraeder regelmäßig gebaut ist. Dann haben alle Seitenflächen, also die Ergebnisse 1, …, 4, die gleiche Wahrscheinlichkeit. Die Wahrscheinlichkeit der Seite „3" beträgt also $\frac{1}{4} = 0{,}25 = 25\,\%$.
b) Man erwartet die „3" etwa in einem Viertel von 800 Würfen, also etwa 200-mal.

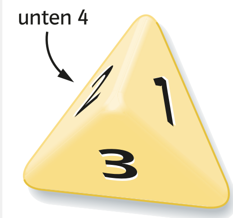


Fig. 1

Beispiel 2 Wahrscheinlichkeiten durch Abzählen bestimmen und vergleichen

Aus dem in Fig. 2 abgebildeten Behälter wird zufällig eine Kugel gezogen. Julia bekommt einen Punkt, wenn die Kugel rot ist, Ramona, wenn sie eine gerade Zahl zeigt.
a) Notiere die Ergebnisse, die zu den Ereignissen „rot" und „gerade" gehören.
b) Vergleiche die Wahrscheinlichkeiten, mit denen die beiden einen Punkt bekommen.

Lösung

a) Zum Ereignis „rot" gehören die Ergebnisse 5, 8, 10, 12 zu „gerade" 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14.
b) Da vier von 15 Kugeln rot sind, beträgt die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „rot" $P(\text{rot}) = \frac{4}{15} \approx 26{,}7\,\%$. Für das Ereignis „gerade" beträgt die Wahrscheinlichkeit $P(\text{gerade}) = \frac{7}{15} \approx 46{,}7\,\%$, weil 7 von 15 Kugeln eine gerade Zahl darstellen. Die Wahrscheinlichkeit, dass Ramona einen Punkt bekommt, ist deutlich größer.

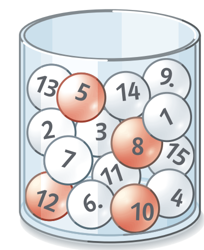
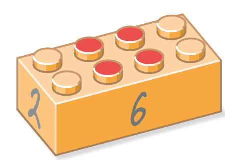


Fig. 2

Beispiel 3 Summenregel

In der Tabelle rechts sind die Wahrscheinlichkeiten für die Ergebnisse beim Würfeln mit einem Lego-Achter angegeben.

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
Wahrscheinlichkeit	10%	0,5%	47%	32%	0,5%	10%



Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man beim Würfeln eine Augenzahl erhält, die kleiner als 5 ist, wenn man mit
a) einem Lego-Achter wirft,
b) einem Laplace-Würfel wirft.

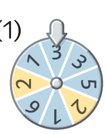
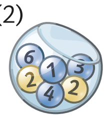
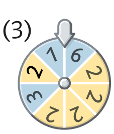
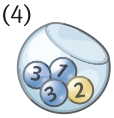
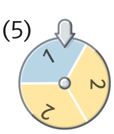
Lösung

a) Zum Ereignis „kleiner 5" gehören die Ergebnisse 1, 2, 3, 4. Die Werte aus der Tabelle oben und die Summenregel liefern: $P(\text{Augenzahl} < 5) = 10\,\% + 0{,}5\,\% + 47\,\% + 32\,\% = 89{,}5\,\%$.
b) Da alle Augenzahlen die gleiche Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ besitzen, liefert die Summenregel: $P(\text{Augenzahl} < 5) = \frac{4}{6} \approx 66{,}67\,\%$.

Aufgaben

○ **1** Doreen hat für das Ereignis „2" bei den folgenden Zufallsgeräten die Wahrscheinlichkeiten $\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{8}$ notiert. Ordne sie den Zufallsgeräten (1) bis (5) zu.

Lerntipp
Seite 205, Beispiel 1

(1)

(2)

(3)

(4)

(5)


○ **2** a) Bestimme die Wahrscheinlichkeiten für das Ergebnis „1" bei den folgenden Würfeln.

b) Die Würfel werden 120- bzw. 200-mal geworfen. Gib an, wie oft man etwa „1" erwartet.

An der größten lesbaren Augenzahl erkennst du, wie viele Seiten der Würfel hat.

○ **3** SP Das Glücksrad mit den möglichen Ergebnissen 0 bis 9 wird einmal gedreht. Notiere, welche Ergebnisse zum jeweiligen Ereignis (A bis H) gehören und bestimme die Wahrscheinlichkeit. Notiere wie Sandra.

Sandra:
Zum Ereignis „Primzahl" gehören die Ergebnisse 2, 3, 5, 7. Daher gilt: P (Primzahl) $= \frac{4}{10} = 40\%$.

A weniger als 1 | B höchstens 7 | C ungerade | D liegt ganz oben | E untere Hälfte | F teilbar durch 3 | G hellblau | H hellblau, aber nicht ungerade

Lerntipp
Seite 205, Beispiel 3

○ **4** Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass eine Roulettekugel
a) in einem roten Feld,
b) auf einer Zahl unter 10,
c) auf der 0 landet.

Lerntipp
Seite 205, Beispiel 1

○ **5** a) Michael: „Wenn ich beim Würfeln unter 3 bleibe, zahle ich dir ein Eis, ansonsten zahlst du mir eines."
Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass Michael zahlen muss, und wie oft du bei 300 Spielen zahlen müsstest, wenn du auf Michaels Angebot eingehen würdest.
b) Ändere die Regel so ab, dass Michaels Gewinnwahrscheinlichkeit den Wert $\frac{1}{2}$ annimmt.

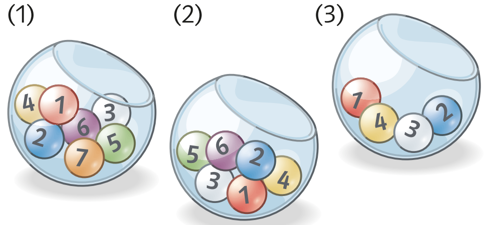
Vertiefen ◒
Seite 220, Aufgabe 13

Teste dich!

Lösungen, Seite 283

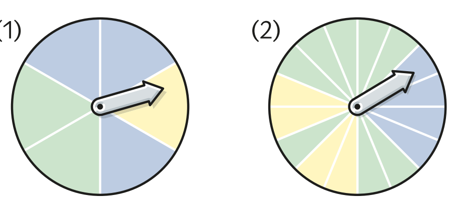
○ **6** a) Bestimme bei den Behältern die Wahrscheinlichkeiten, mit der man beim blinden Hereingreifen die Zahl „3" erwischt.
b) Ellen zieht 75-mal aus Behälter (1). Dabei wird jede gezogene Kugel vor dem nächsten Zug zurückgelegt. Gib an, wie oft etwa sie die „3" ziehen wird.

(1) (2) (3)



◒ **7** a) Bestimme für die Glücksräder die Wahrscheinlichkeiten für die Ereignisse „blau", „gelb" und „grün".
b) Erläutere, wie du die Glücksräder simulieren könntest.
(1) Das Glücksrad (1) durch einen Würfel,
(2) das Glücksrad (2) durch eine mit Kugeln gefüllte Socke.

(1) (2)

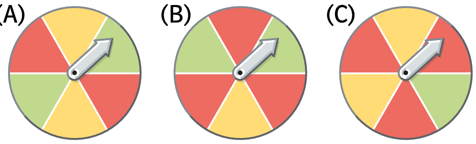


Als Simulation bezeichnet man das Nachahmen von Situationen mit zur Verfügung stehenden Hilfsmitteln.

Üben ○
Seite 218,
Aufgaben 2 und 3

◒ **8** a) Gib die Wahrscheinlichkeiten dafür an, dass jemand, der nicht in einem Schaltjahr geboren wurde (1) am 12. Januar (2) im März (3) am 29. Februar Geburtstag hat.
b) Benenne die Annahme, die du bei den Angaben in Teilaufgabe a) gemacht hast.

9 SP
Ordne die Tabellenzeilen den Glücksrädern und den Begriffen „Wahrscheinlichkeit", „relative Häufigkeit" und „absolute Häufigkeit" zu. Formuliere wie Mo.

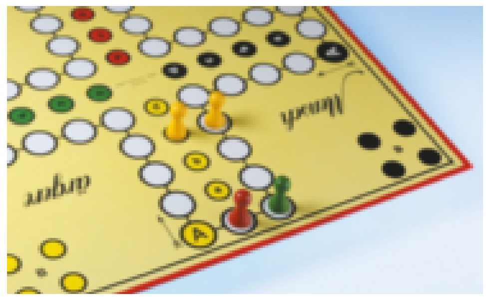

(A) (B) (C)

	rot	gelb	grün
1	50,00 %	33,33 %	16,67 %
2	42,50 %	39,00 %	18,50 %
3	103	60	37
4	33,33 %	33,33 %	33,33 %
5	59	73	68
6	29,50 %	36,50 %	34,00 %
7	50,00 %	16,67 %	33,33 %
8	46,50 %	14,50 %	39,00 %
9	91	32	77

Mo: Zeile 5 enthält absolute Häufigkeiten. Sie passt gut zu (A), weil gelb und grün ungefähr gleich häufig auftraten und diese Häufigkeiten nicht sehr von der Häufigkeit für rot abweichen.

10 a) Beim „Mensch ärgere dich nicht" ist Gelb am Zug. Gib die Wahrscheinlichkeit für die folgenden Ereignisse an.
(1) Der Spieler wirft eine Figur hinaus.
(2) Der Spieler erreicht sein Haus.
(3) Es geschieht keins von beidem.

b) Erläutere, wie sich die Wahrscheinlichkeiten ändern, wenn mit einem Lego-Achter (vgl. Seite 205, Beispiel 3) „gewürfelt" wird.



11 **Das Gesetz der großen Zahlen**
Das Gesetz der großen Zahlen besagt: Die Abweichungen der relativen Häufigkeiten von der Wahrscheinlichkeit werden mit steigender Versuchszahl tendenziell kleiner.

a) Timo, Jamie, Lena und Kathleen haben diesen Zusammenhang untersucht. Sie haben hierzu je 400 Münzwürfe durchgeführt und nach jeweils 25 Würfen die relative Häufigkeit für die seit Versuchsbeginn geworfenen Wappen notiert. In Fig. 1 sind die Ergebnisse grafisch dargestellt. Erläutere, wie sich dort die relativen Häufigkeiten für die Anzahl der Wappen bei zunehmender Versuchszahl entwickeln.

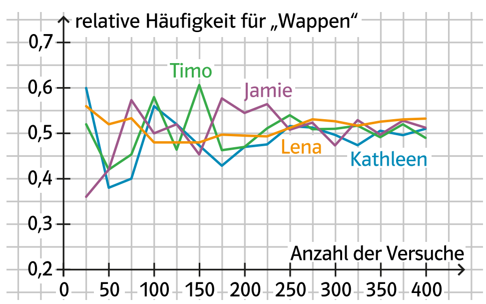


Fig. 1

b) Führt das Experiment selbst durch und berechnet jeweils nach 25 Würfen die relative Häufigkeit für die seit Versuchsbeginn geworfenen Wappen (vgl. Tabelle rechts). Vergleicht die Ergebnisse in der Klasse, indem ihr diese ähnlich wie in Fig. 1 mit verschiedenen Farben in einem gemeinsamen Diagramm festhaltet.

Anzahl der Würfe	Wappen in den letzten 25 Würfen	Anzahl der Wappen insgesamt	Relative Häufigkeit
25	12	12	0,48
50	10	22	0,44
…	…	…	…

Tipp:
Arbeitet in Vierergruppen zusammen. Jeder steuert dann viermal 25 Würfe für Spalte 2 bei, und jede Gruppe einen Linienzug wie in Fig. 1.

MK
c) Mithilfe einer Tabellenkalkulation kann man das Experiment am Computer simulieren. Verwende hierzu die Datei aus dem Online-Code.
(1) Erläutere, welche Berechnungen die Datei aus dem Online-Code durchführt.
(2) Nina behauptet: „Wenn man eine lange Versuchsreihe durchführt, dann liegt die relative Häufigkeit am Ende meistens näher an der Wahrscheinlichkeit als am Anfang. Es gibt aber Ausnahmen."
Lass den Rechner mehrfach das Experiment simulieren, indem du jeweils alle Zufallszahlen neu berechnen lässt, und beurteile Ninas Aussage.

Interaktives Forschen
Simulation Münzwurf
4z83ga

In der Exkursion (S. 225) wird das Gesetz der großen Zahlen noch genauer untersucht.

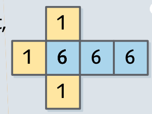
Teste dich!

Lösungen, Seite 283

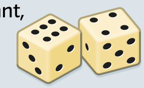
12 Bei einem Spiel geht es darum, als Erster die „6“ zu erzielen. Jeder Mitspieler darf ein Spielgerät wählen. Begründe, welches du wählen würdest.

Die „6“ gewinnt, wenn nach der Drehung des Glücksrads der Zeiger auf einer 6 steht.

Die „6“ gewinnt, wenn der aus dem Netz gebaute Würfel eine 6 zeigt.



Die „6“ gewinnt, wenn die Summe der Augenzahlen 6 ist.



13 **Wahrscheinlichkeiten schätzen**

Vertiefen
Seite 219, Aufgabe 9

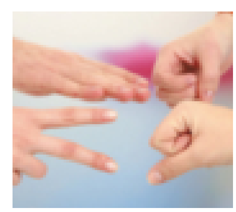
a) Partner A steckt fünf Kugeln in eine Socke. Nur er weiß, wie viele davon rot sind. Die restlichen sind weiß. Partner B muss nach fünfmaligem Ziehen (mit Zurücklegen) tippen, welcher Anteil der Kugeln rot ist. Dann tauscht ihr die Rollen.
Protokolliert, welche Farben ihr gezogen, wie ihr getippt habt und ob der Tipp stimmte.

b) Wiederholt das Experiment, wobei ihr nun vor dem Tipp 10-mal ziehen dürft.

c) Erläutert in eigenen Worten, welchen Einfluss die Erhöhung der Versuchszahl von 5 auf 10 auf die Sicherheit der abgegebenen Tipps hat.

14 Beim Knobeln „Schere-Stein-Papier“ gilt: Stein schlägt Schere, Schere schlägt Papier, Papier schlägt Stein. Wenn man Brunnen hinzunimmt (2. Spielvariante), gilt zusätzlich zu diesen Regeln: Papier schlägt Brunnen, Brunnen schlägt Stein und Schere.
Zeigen beide Spieler dasselbe Symbol („unentschieden“), wird weiter geknobelt.

- Stein schleift Schere
- Schere schneidet Papier
- Papier wickelt Stein ein
- Papier deckelt Brunnen
- Stein fällt in Brunnen
- Schere fällt in Brunnen



a) Mia und Sina wollen ihre Symbole zufällig auswürfeln. Erläutere, wie sie bei der ersten und wie bei der zweiten Variante vorgehen könnten.

b) Tim spekuliert: „Bei der ersten Variante gibt es vier mögliche Ausgänge mit je $\frac{1}{4} = 25\,\%$ Wahrscheinlichkeit, bei der zweiten Variante sind es fünf mit je $\frac{1}{5} = 20\,\%$ Wahrscheinlichkeit.“
Nimm Stellung zu Tims Aussage.

c) Überlegt, wie man das Spiel mithilfe von Spielwürfeln nachspielen kann.
Spielt dann beide Varianten je 50-mal.
Protokolliert mit einer Strichliste.
Fasst eure Ergebnisse zusammen und beurteilt Tims Aussage erneut.

	Schere – Stein – Papier	Schere – Stein – Papier – Brunnen
unentschieden		
Schere gewinnt		
Stein gewinnt		
Papier gewinnt		
Brunnen gewinnt	X	

	Schere	Stein	Papier
Schere			
Stein			
Papier			

d) Nico: „Bei der ersten Spielvariante gibt es 9 Kombinationen. Damit kann ich die Wahrscheinlichkeit genau bestimmen.“
Erläutere Nicos Gedanken und zu welchem Ergebnis er vermutlich kommt.

e) Bestimme die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten für die zweite Spielvariante durch eine Tabelle mit 16 Feldern.

Teste dein Grundwissen! Werte von Termen berechnen

Grundwissen,
Seite 125, Beispiel 1
Lösungen, Seite 283

G **15** a) Berechne den Wert des Terms $4 \cdot (2 \cdot x - 1) - 6 \cdot x + 2$ für $x = 3{,}5$ und $x = -2$.

b) Vereinfache den Term und prüfe, ob deine Ergebnisse stimmen können, indem du $x = 3{,}5$ und $x = -2$ in den vereinfachten Term einsetzt.

3 Baumdiagramm und Pfadregel

Stimmst du Jonas oder Lasse zu? Argumentiere!

Häufig werden mehrere Zufallsexperimente hintereinander durchgeführt. Sie lassen sich dann durch Baumdiagramme beschreiben. Im Folgenden wird an einem zweistufigen Beispiel gezeigt, wie man dabei die Wahrscheinlichkeiten für die Ergebnisse bestimmt.

Bei einem Schulfest kauft Anja zweimal hintereinander ein Los. Im Topf liegen am Anfang drei Gewinnlose und sieben Nieten. Es sind vier **Ergebnisse** möglich, die man als **Pfade** in einem **Baumdiagramm** (Fig. 1) darstellt.
GG: Beide Lose sind Gewinne.
GN: Das erste Los ist ein Gewinn, das zweite eine Niete.
NG: Das erste Los ist eine Niete, das zweite ein Gewinn.
NN: Beide Lose sind Nieten.
Diese Pfade besitzen unterschiedliche Wahrscheinlichkeiten. Um diese zu bestimmen, nimmt man an, dass Anja das Experiment sehr oft durchführt. Dann wird sie in etwa $\frac{3}{10}$ der Fälle beim ersten Zug ein Gewinnlos ziehen. Beim zweiten Zug sind, falls der erste ein „Gewinn" war, nur noch neun Lose mit zwei Gewinnen im Topf. Deshalb wird sie im zweiten Zug nur noch in etwa $\frac{2}{9}$ der Fälle ein Gewinnlos ziehen. Daher wird sie insgesamt in ca. $\frac{2}{9}$ von $\frac{3}{10} = \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{10} = \frac{6}{90} = \frac{1}{15}$ aller Fälle das Ergebnis GG erwarten. Also gilt $P(GG) = \frac{1}{15}$.
Man erkennt: Wenn man im Baumdiagramm die einzelnen Pfade wie in Fig. 2. beschriftet, erhält man die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ergebnisse, indem man die Wahrscheinlichkeiten entlang der zugehörigen Pfade miteinander multipliziert.

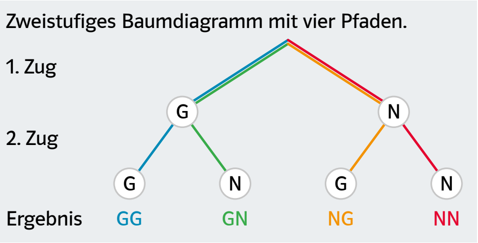
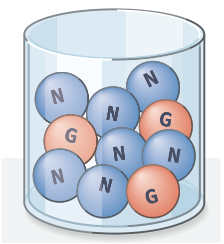


Fig. 1



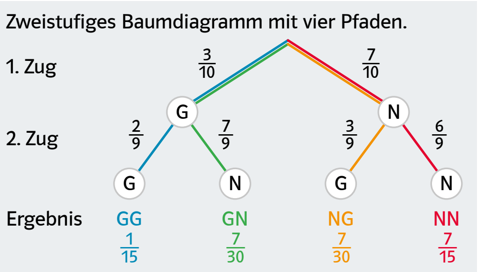


Fig. 2

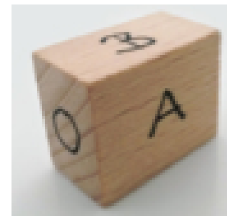
Die Wahrscheinlichkeiten nach jeder Verzweigung addieren sich zu 1.

Ergebnis	Wahrscheinlichkeit
GG	$\frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{15} \approx 6{,}7\,\%$
GN	$\frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} = \frac{7}{30} \approx 23{,}3\,\%$
NG	$\frac{7}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{7}{30} \approx 23{,}3\,\%$
NN	$\frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{7}{15} \approx 46{,}7\,\%$
Summe:	$1 = 100\,\%$

Pfadregel
Mehrstufige Zufallsexperimente kann man durch Baumdiagramme beschreiben.
Die Wahrscheinlichkeit für ein Ergebnis des mehrstufigen Experiments erhält man, indem man die Wahrscheinlichkeiten entlang des zugehörigen Pfades multipliziert.

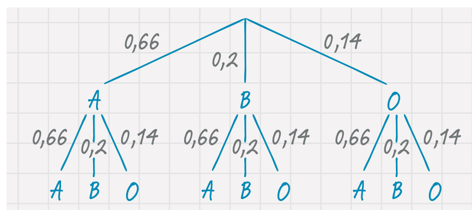
Im Zusammenhang mit Baumdiagrammen ist auch die **Summenregel** nützlich:
Wenn man z. B. nach der Wahrscheinlichkeit dafür fragt, dass Anja „mindestens ein Gewinnlos" zieht, dann gehören zu diesem Ereignis die Pfade GG, GN und NG.
Die Summenregel liefert
P(„mindestens ein Gewinnlos") = $P(GG) + P(GN) + P(NG) = \frac{1}{15} + \frac{7}{30} + \frac{7}{30} = \frac{16}{30} = \frac{8}{15} \approx 53\,\%$.

Beispiel 1 **Wahrscheinlichkeiten mit einem Baudiagramm bestimmen**
Nico muss jedes Wochenende zwei Pflichten übernehmen, die mit dem rechts abgebildeten Quader ausgewürfelt werden. A bedeutet „abwaschen", B „Betten machen" und O „Ofen säubern".
Stelle die Situation durch ein Baumdiagramm dar und berechne die Wahrscheinlichkeit, dass Nico
(1) zweimal Betten machen,
(2) abwaschen und Betten machen,
(3) mindestens einmal den Ofen säubern muss.



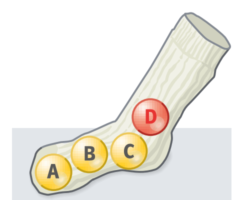
Gegenüberliegende Seiten sind gleich beschriftet. Es gilt:
P(A) = 66 %,
P(B) = 20 %,
P(O) = 14 %

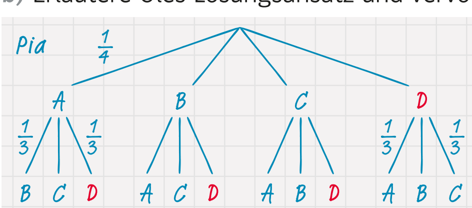
Lösung
Da zweimal gewürfelt wird, hat das Baumdiagramm zwei Stufen mit insgesamt $3 \cdot 3 = 9$ Pfaden. Man beschriftet die Abschnitte der Pfade mit den Würfelwahrscheinlichkeiten und erhält mit Pfad- und Summenregel die folgenden gesuchten Wahrscheinlichkeiten:

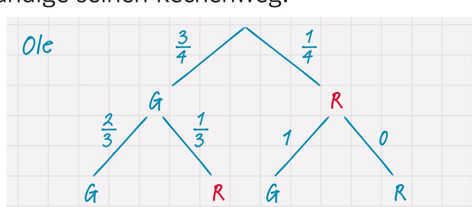


(1) $P(BB) = 0{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}04 = 4\,\%$
(2) $P(AB) + P(BA) = 0{,}2 \cdot 0{,}66 + 0{,}66 \cdot 0{,}2 = 0{,}264 = 26{,}4\,\%$
(3) P(mindestens einmal Ofen säubern) = $P(AO) + P(BO) + P(OA) + P(OB) + P(OO)$
$= 0{,}66 \cdot 0{,}14 + 0{,}2 \cdot 0{,}14 + 0{,}14 \cdot (0{,}66 + 0{,}2 + 0{,}14) = 0{,}2604 \approx 26\,\%$

Beispiel 2 **Baumdiagramme vergleichen**
Aus einer Socke mit drei gelben und einer roten Kugel werden in einem Griff zwei Kugeln gezogen. Ole und Pia haben die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die beiden Kugeln verschiedene Farben (G = Gelb und R = Rot) haben, mit unterschiedlichen Bäumen berechnet.
a) Erläutere Pias Lösungsansatz und vervollständige ihren Rechenweg.
b) Erläutere Oles Lösungsansatz und vervollständige seinen Rechenweg.





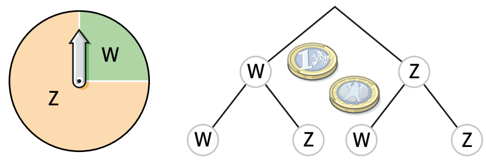


Lösung
Obwohl die Kugeln gleichzeitig gezogen werden, deuten Pia und Ole das Ziehen als zweistufiges Experiment. Sie legen die Kugeln in Gedanken nebeneinander und betrachten die linke zuerst.
a) Pia achtet auf die Buchstaben und erhält einen Baum mit 12 Pfaden, die alle die gleiche Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$ besitzen. Sechs Pfade führen zum gewünschten Ereignis. Sie erhält nach der Summenregel P(verschiedene Farben) = $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.
b) Ole achtet nur auf die Farbe, nicht auf die Buchstaben. Er erhält dann einen Baum mit vier Pfaden unterschiedlicher Wahrscheinlichkeit. Die erste Kugel ist mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{4}$ gelb und mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ rot. Wenn man eine gelbe erwischt hat, ist die zweite mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ rot usw. Ole erhält mit P(verschiedene Farben) = $P(GR) + P(RG) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{2}$ das gleiche Ergebnis wie Pia.

Aufgaben

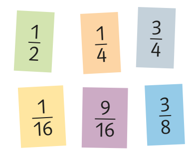
Lerntipp
Seite 210, Beispiel 1

○ **1** Sowohl beim Werfen einer Münze als auch beim Drehen des nebenstehenden Glücksrades treten entweder W (Wappen) oder Z (Zahl) auf. Das zweimalige Werfen bzw. Drehen lässt sich jeweils durch ein Baumdiagramm beschreiben.

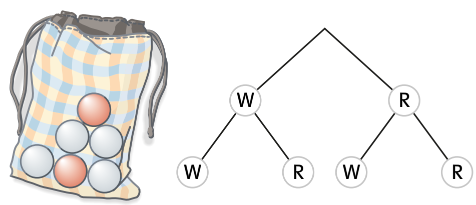


a) Übertrage das Baumdiagramm zweimal in dein Heft. Beschrifte es
(1) für den zweifachen Münzwurf, (2) für das zweimalige Drehen des Rades.
Nutze zum Beschriften Zahlen, die du auf den Kärtchen findest.

b) Ordne den Ereignissen „keinmal Wappen", „einmal Wappen" und „zweimal Wappen" Wahrscheinlichkeiten zu, die sich ebenfalls auf den Kärtchen befinden.



○ **2** Aus einem Beutel mit vier weißen und zwei roten Kugeln werden nacheinander zwei Kugeln gezogen. Übertrage den nebenstehenden Baum ins Heft, beschrifte die Pfade und bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine rote und eine weiße Kugel gezogen werden.



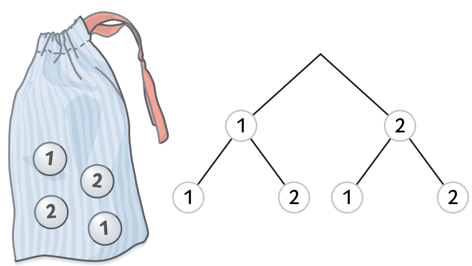
Üben ○
Seite 218, Aufgabe 6

○ **3** Aus dem Beutel werden mit einem Griff zwei Kugeln gezogen. Die Zahlen auf den beiden Kugeln werden addiert.

a) Zeichne das Baumdiagramm ins Heft und beschrifte es vollständig.

b) Berechne die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass sich als Summe 2 bzw. 3 bzw. 4 ergibt.

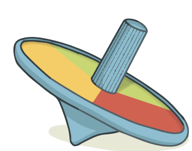
c) Überprüfe rechnerisch, ob die Summe aller Pfadwahrscheinlichkeiten 100 % ergibt.



○ **4** Der Kreisel wird zweimal gedreht. Die unten liegende Farbe zählt als Ergebnis.

a) Stelle das Experiment durch ein Baumdiagramm mit neun Pfaden dar.

b) Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Kreisel
(1) beim ersten Drehen „gelb" zeigt,
(2) beide Male „gelb" zeigt,
(3) mindestens einmal „rot" zeigt.



○ **5** Ein Spielwürfel wird zweimal geworfen. Bestimme mithilfe eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dabei

a) keine einzige Sechs auftritt,

b) nur Zahlen größer als zwei auftreten,

c) zwei Einsen auftreten.

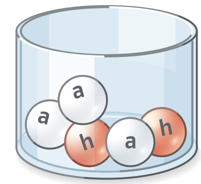
○ **6** Die Klassen 7 a und 7 b bieten zwei Gewinnspiele mit nebenstehenden Glücksrädern an. Vergleiche die Gewinnwahrscheinlichkeiten.

○ **7** Aus dem Behälter werden nacheinander zwei Kugeln entnommen.

a) Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man das Wort „ah“ erhält, wenn man die erste Kugel
   (1) nach dem Ziehen zurücklegt,
   (2) nach dem Ziehen nicht zurücklegt.

b) Vergleiche die Ergebnisse aus Teilaufgabe a) mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten des Wortes „ha“.

Üben ○
Seite 219, Aufgabe 7



Teste dich!

Lösungen, Seite 283

○ **8** Felix schätzt, dass er beim Pfeilwerfen mit einer Wahrscheinlichkeit von 30 % trifft. Er wirft zweimal und notiert die Ergebnisse mit „T“ (Treffer) bzw. „F“ (Fehlwurf).

a) Notiere alle möglichen Ergebnisse in einem Baumdiagramm.

b) Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Felix zweimal trifft.

c) Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Felix mindestens einmal trifft.

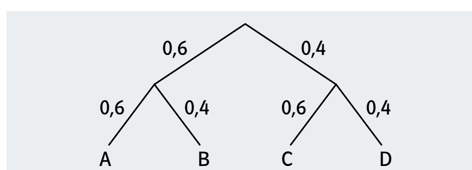
◒ **9** Trainer Olli schätzt, dass Ilkay beim Torwandschießen mit einer Wahrscheinlichkeit von 80 % und Axel mit einer Wahrscheinlichkeit von 60 % trifft. Jeder hat einen Schuss. Axel schießt zuerst.

a) Stelle die Situation in einem Baumdiagramm dar.

b) Bestimme auf der Grundlage von Ollis Schätzung die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass sie zusammen keinen, einen oder zwei Treffer erzielen. Kontrolliere dein Ergebnis durch Aufsummieren der Wahrscheinlichkeiten.

c) Erstelle ein zweites Baumdiagramm, das die Situation beschreibt, wenn Ilkay zuerst schießt. Vergleiche die sich ergebenden Wahrscheinlichkeiten mit denen aus b).

◒ **10** Erfinde einen Zufallsversuch oder eine passende Situation, die durch das Baumdiagramm rechts beschrieben werden könnte. Erläutere in dem von dir gewählten Zusammenhang, welche Bedeutung die Ergebnisse A bis D haben.

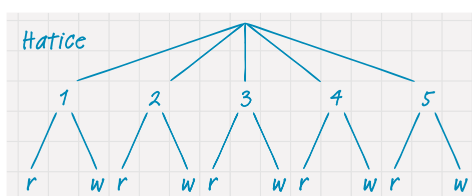


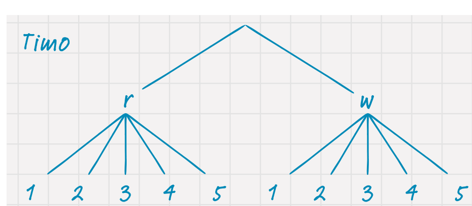
◒ **11** Aus dem Beutel auf dem Rand wird zufällig eine Kugel gezogen.

a) Begründe: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man die rote Drei zieht, beträgt $\frac{1}{5}$.

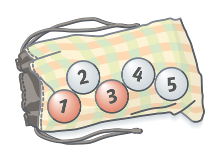
b) Hatice und Timo haben versucht, die Wahrscheinlichkeit mithilfe zweistufiger Bäume zu bestimmen. Erläutere, welche Überlegungen die beiden jeweils angestellt haben.

c) Überlege, wie man die Bäume beschriften könnte, damit man auch hier mit der Pfadregel das richtige Ergebnis $\frac{1}{5}$ erhält.



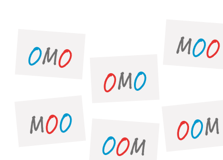


Lerntipp
Seite 210, Beispiel 2



◒ **12** a) Mara hat alle Ergebnisse notiert, die beim Ziehen von drei Buchstaben aus einer Socke auftreten können. Erläutere, wie die Socke gefüllt war und warum Mara für das Wort „OMO“ die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ angibt.

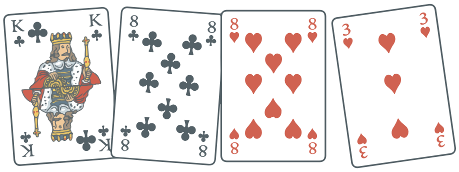
b) Zeichne ein Baumdiagramm und erläutere, wie man damit zu demselben Ergebnis kommt.

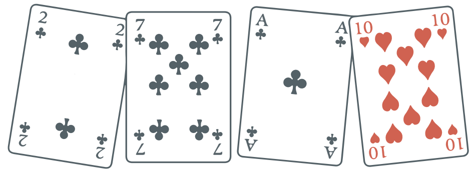


Teste dich!

Lösungen, Seite 284

13 Aus einem Kartensatz mit vier Spielkarten werden zwei Karten zufällig gezogen. Man gewinnt, wenn eine Spielkarte rot und die andere schwarz ist.





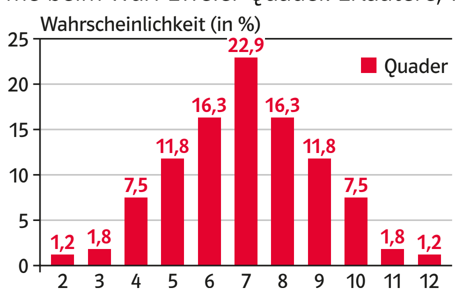
Bestimme für beide Kartensätze die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses
a) mithilfe eines Baumdiagramms, **b)** durch Aufschreiben aller Kombinationen.

14 **Würfel gegen Quader – Abzählen gegen Pfadregel**

Üben ○
Seite 218, Aufgabe 5

a) Die Augensumme 7 hat beim Wurf zweier Würfel die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$. Alle anderen Augensummen sind unwahrscheinlicher. Begründe dies, indem du ohne Anwendung der Pfadregel alle möglichen Ergebnisse in einer Tabelle notierst und anschließend abzählst.
b) Berechne die Wahrscheinlichkeit für die Augensumme 7 beim zweifachen Wurf des nebenstehenden Quaders. Erläutere, warum ein Abzählverfahren wie in Teilaufgabe a) versagt.
c) Die Grafik veranschaulicht die komplette Wahrscheinlichkeitsverteilung der Augensumme beim Wurf zweier Quader. Erläutere, wie man sie mithilfe der Tabelle erhält.

Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Quaderseiten:
1 und 6: je 0,11
2 und 5: je 0,08
3 und 4: je 0,31



Wahrscheinlichkeiten der Augensummen 2 bis 12 beim Quader-Doppelwurf

		1	2	3	4	5	6
		0,11	0,08	0,31	0,31	0,08	0,11
1	0,11	0,012	0,009	0,034	0,034	0,009	0,012
2	0,08	0,009	0,006	0,025	0,025	0,006	0,009
3	0,31	0,034	0,025	0,096	0,096	0,025	0,034
4	0,31	0,034	0,025	0,096	0,096	0,025	0,034
5	0,08	0,009	0,006	0,025	0,025	0,006	0,009
6	0,11	0,012	0,009	0,034	0,034	0,009	0,012

Die Wahrscheinlichkeiten der 36 Augenzahlenpaare beim Quader-Doppelwurf

15 Auf dem Weg zur Arbeit muss Herr Flindt zwei Ampeln passieren, die mit einer Wahrscheinlichkeit von je 50 % Grün zeigen.
„Daher treffe ich mit einer Wahrscheinlichkeit von 100 % eine grüne Ampel an."
a) Philipp zeichnet ein Baumdiagramm und versucht, seinem Vater zu beweisen, dass die fragliche Wahrscheinlichkeit nur 75 % beträgt. Erläutere, wie Philipp zu seinem Ergebnis kommt.
b) Franka weiß, dass ihr Vater bei zwei anderen Ampeln eine „grüne Welle" hatte. Auch sie zeichnet ein Baumdiagramm und kommt für die gesuchte Wahrscheinlichkeit auf einen Wert von 100 %. Erläutere, wie Frankas Baumdiagramm aussehen könnte.
c) Wie stehst du zu Philipps und Frankas Einschätzung? Begründe.

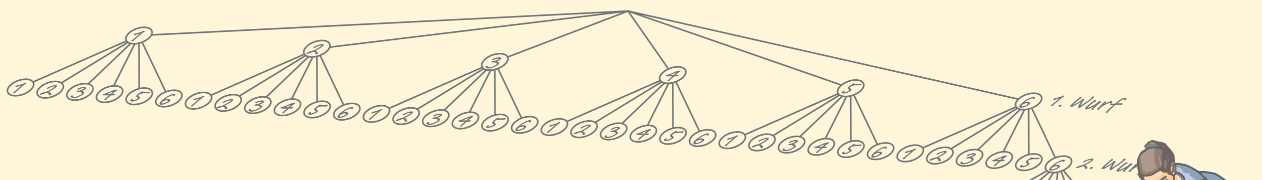
Teste dein Grundwissen! Gleichwertige Terme

Grundwissen, Seite 130, Beispiel 1
Lösungen, Seite 284

G **16** Gib an, welche der vier Terme gleichwertig sind. Forme die Terme dazu um.

a)	b)	c)	d)
$d \cdot 2 + 5 \cdot d$	$1 \cdot x + 3$	$s + s + 3 + s$	$2 \cdot x \cdot 3 + 4$
$2 \cdot d + 5$	$3 + x$	$2 + 3 + s$	$4 + 6 \cdot x$
$2 \cdot d + 5 \cdot d$	$3 \cdot x + x$	$2 \cdot s + s + 3$	$2 \cdot 3 + 4 \cdot x$
$5 \cdot d + 2 \cdot d$	$x + 3$	$3 \cdot s + 3$	$2 + 6 \cdot x + 2$

4 Der richtige Blick auf das Baumdiagramm



Tina versucht, mithilfe eines Baumdiagramms herauszubekommen, mit welcher Wahrscheinlichkeit sie beim sechsmaligen Würfeln mindestens eine Sechs erzielt.
Suche nach einem einfacheren Baumdiagramm, mit dem man die Frage beantworten kann.

Zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten ist das Zeichnen eines vollständigen Baumdiagramms oft sehr aufwendig. Man kann sich Arbeit sparen, wenn man geschickt vorgeht. Man kann sich z. B. nur auf die nötigen Teile des Baumdiagramms konzentrieren, Pfade zusammenfassen oder Gegenwahrscheinlichkeiten nutzen.
Am folgenden Beispiel wird dies erläutert.

Aus dem Beutel auf dem Rand werden nacheinander drei Buchstaben gezogen und hintereinandergelegt. Wer das Wort „OMA" erhält, gewinnt. Gesucht ist die Gewinnwahrscheinlichkeit. Das vollständige Baumdiagramm zu diesem Zufallsexperiment hat 24 Pfade mit unterschiedlichen Wahrscheinlichkeiten (s. Fig. 1).

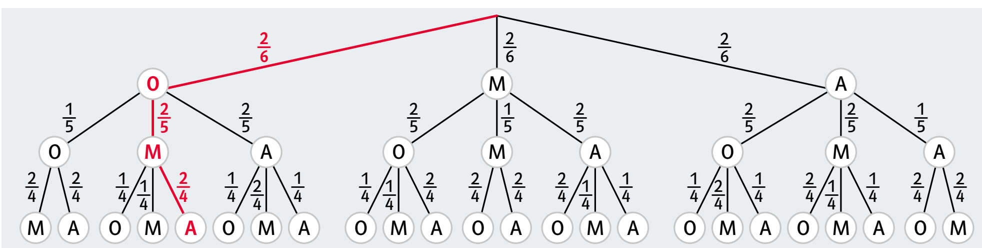


Fig. 1

Zur Bestimmung der Gewinnwahrscheinlichkeit benötigt man jedoch nur den rot markierten Pfad: Beim ersten Zug tragen 2 der 6 Kugeln das benötigte O, beim zweiten Zug tragen 2 der 5 verbliebenen Kugeln das gewünschte M und beim dritten Zug tragen 2 der nun noch 4 verbliebenen Kugeln das für den Gewinn benötigte A.

Man erhält $P(OMA) = \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{8}{120} = \frac{1}{15} \approx 6{,}7\,\%$.

Man kann das Baumdiagramm aus Fig. 1 verkleinern wie in Fig. 2, denn beim ersten Zug interessiert nur, ob man ein O gezogen hat oder nicht. Deswegen fasst man die „unerwünschten" Buchstaben M und A zum Ereignis „nicht O" zusammen und zeichnet diesen Pfad des Baumdiagramms nach der ersten Stufe nicht weiter. Ebenso verfährt man auf der Stufe 2, auf der nur interessiert, ob man ein M gezogen hat oder „nicht M" usw. Noch kürzer ist die Darstellung in Fig. 3, in der man nur den Pfad zeichnet, der zum Gewinn führt.

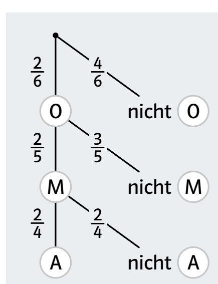


Fig. 2

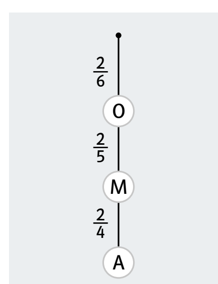


Fig. 3

In der ersten Stufe des Baumdiagramms bezeichnet man das Ereignis „nicht O“ als **Gegenereignis** von „O“. Es besteht aus den Ergebnissen „M“ und „A“.
Die Wahrscheinlichkeiten des Ereignisses und seines Gegenereignisses ergänzen sich zu 1: $P(O) + P(\text{nicht } O) = \frac{2}{6} + \frac{4}{6} = 1$.
Entsprechend gilt in der zweiten Stufe $P(M) + P(\text{nicht } M) = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1$.
Wenn man das dreistufige Experiment als Ganzes betrachtet, ist „nicht OMA“ das Gegenereignis zu „OMA“. Es besteht hier aus 23 Ergebnissen (Pfaden), deren Wahrscheinlichkeiten sich zu $\frac{14}{15}$ addieren.
Auch hier gilt $P(\text{nicht OMA}) + P(\text{OMA}) = 1$, also $P(\text{nicht OMA}) = 1 - P(\text{OMA})$.

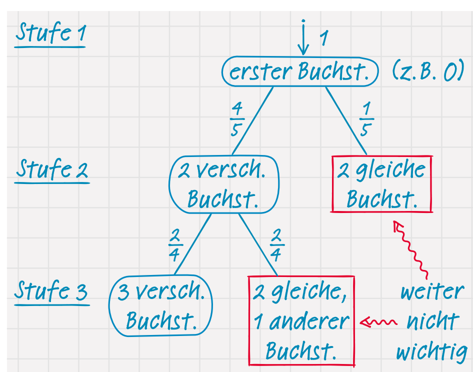
Statt „nicht O“ schreibt man auch kurz $\overline{O}$.

Wahrscheinlichkeiten bei mehrstufigen Zufallsexperimenten
Zur **Bestimmung der Wahrscheinlichkeit** eines Ereignisses bei einem mehrstufigen Zufallsexperiment können folgende Vorgehensweisen hilfreich sein:
- auf wesentliche Merkmale achten
- Pfade zusammenfassen
- nur die relevanten Ausschnitte des Baumdiagramms skizzieren
- Wahrscheinlichkeiten von Gegenereignissen nutzen

Für ein Ereignis A und sein Gegenereignis $\overline{A}$ gilt:
$\mathbf{P(A) + P(\overline{A}) = 1}$

Das Gegenereignis von A (also „nicht A“) kürzt man oft mit $\overline{A}$ ab. Für ein Ereignis A und sein Gegenereignis $\overline{A}$ gilt: $P(A) + P(\overline{A}) = 1$.

Beispiel 1 Auf wesentliche Merkmale achten
Aus dem Beutel von Seite 214 werden drei Buchstaben gezogen. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man aus ihnen nach Umsortieren das Wort „OMA“ legen kann.
Lösung
Man kann „OMA“ genau dann legen, wenn die drei Buchstaben verschieden sind. Der erste Buchstabe passt daher immer. Deswegen trägt der erste Ast im Baumdiagramm die Wahrscheinlichkeit 1. Der zweite Buchstabe muss vom ersten verschieden sein. Das passiert beim zweiten Zug mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{4}{5}$. Dass der dritte Buchstabe von den ersten beiden verschieden ist, hat dann die Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{4}$. Man braucht von dem Baumdiagramm nur den ganz linken Pfad und erhält



$P(\text{alle drei Buchstaben voneinander verschieden}) = 1 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{2}{5} = 40\,\%$.

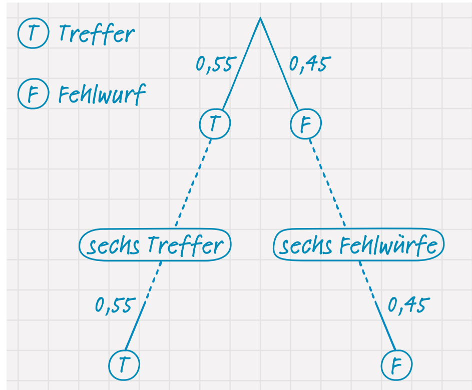
Kontrolle: Das gleiche Ergebnis erhält man, wenn man die Wahrscheinlichkeiten der sechs relevanten Pfade OMA OAM AMO AOM MOA MAO aus Fig. 1 auf Seite 214 addiert.

Beispiel 2 Lange Pfade und Gegenereignisse betrachten
a) Nimm an, dass Kai bei 6 Freiwürfen den Korb jeweils mit einer Wahrscheinlichkeit von 55 % trifft. Bestimme mit dieser Annahme die Wahrscheinlichkeit für „6 Treffer“.
b) Erläutere, warum „6 Fehlwürfe“ nicht das Gegenereignis von „6 Treffern“ ist.
c) Beschreibe das Gegenereignis von „6 Treffern“ in Worten und berechne die zugehörige Wahrscheinlichkeit.
d) Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Kai mindestens einen Treffer landet.
e) Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er genau einen Treffer landet.

Lösung

a) Die Wahrscheinlichkeit für „6 Treffer“ berechnet man mit dem linken Pfad des Baumdiagramms:
P(6 Treffer) = $0{,}55^6 \approx 2{,}8\,\%$.

b) Die Wahrscheinlichkeit für „6 Fehlwürfe“ berechnet man mit dem rechten Pfad:
P(6 Fehlwürfe) = $0{,}45^6 \approx 0{,}83\,\%$. Da sich zusammen mit dem Ergebnis aus Teilaufgabe a) keine 100 % ergeben, kann „6 Fehlwürfe“ nicht das Gegenereignis zu „6 Treffern“ sein. Zum Gegenereignis von „6 Treffern“ gehören zusätzlich zum rechten Pfad auch die in der Figur nicht abgebildeten Pfade.



Von den $2^6 = 64$ „langen“ Pfaden des vollständigen Baums benötigt man nur wenige. Es reicht, sie anzudeuten.

c) Das Gegenereignis zu „6 Treffern“ ist „mindestens ein Fehlwurf“.
Also gilt: P(6 Treffer) + P(mindestens 1 Fehlwurf) = 1,
also P(mindestens 1 Fehlwurf) = 1 − P(6 Treffer) = $1 - 0{,}55^6 \approx 97{,}2\,\%$.

d) „Mindestens ein Treffer“ ist das Gegenereignis von „6 Fehlwürfen“.
Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist daher $1 - 0{,}45^6 \approx 99{,}2\,\%$.

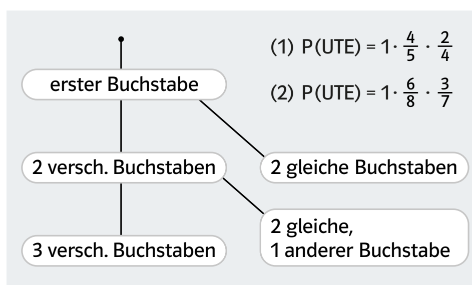
e) Der Treffer kann bei jedem der 6 Würfe passiert sein. Zum Ereignis „genau ein Treffer“ gehören daher 6 Pfade mit einer Wahrscheinlichkeit von jeweils $0{,}55 \cdot 0{,}45^5 \approx 1{,}01\,\%$.
Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist dann $6 \cdot 0{,}55 \cdot 0{,}45^5 \approx 6{,}09\,\%$.

Aufgaben

○ **1** Ute darf aus einem der Beutel auf dem Rand drei Buchstaben ohne Zurücklegen ziehen. Sie gewinnt, wenn sie aus den gezogenen Buchstaben ihren Namen legen kann. Sie berechnet die Gewinnwahrscheinlichkeiten mit dem Baumdiagramm.

a) Ordne die Rechnungen (1) und (2) den Beuteln zu. Begründe deine Zuordnung.

b) Bestimme, für welche der Beutel Utes Gewinnwahrscheinlichkeit größer ist.



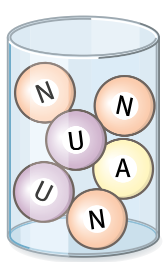
Beutel 1 Beutel 2

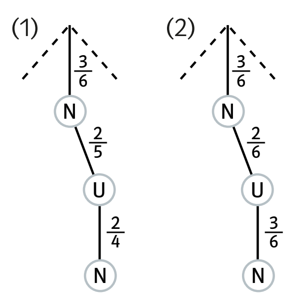
Lerntipp
Seite 215, Beispiel 1

○ **2** Aus dem Behälter werden drei Buchstaben gezogen und hintereinandergelegt. Wer „NUN“ erhält, gewinnt.
Josef zieht ohne Zurücklegen, Nina mit.

a) Ordne die Pfade den beiden Kindern zu. Begründe deine Zuordnung.

b) Untersuche, wer die größere Gewinnchance hat.



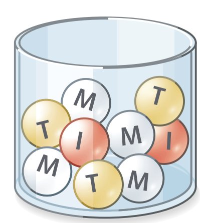


Lerntipp
Seite 215, Beispiel 1

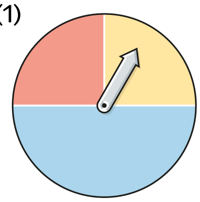
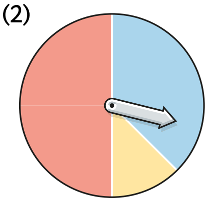
○ **3** Tim zieht aus dem Behälter auf dem Rand drei Kugeln. Er notiert die Buchstaben in der gezogenen Reihenfolge. Bestimme durch das Zeichnen eines Pfades die Wahrscheinlichkeit, dass er seinen Namen erhält, wenn er die gezogene Kugel nach jedem Ziehen

a) zurücklegt,

b) nicht zurücklegt.



○ **4** Ein Glücksrad wird zweimal gedreht. Berechne für jedes der Glücksräder die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis
a) zuerst blau, dann rot,
b) einmal blau, einmal rot,
c) zweimal dieselbe Farbe.

(1)

(2)


Vertiefen ◒
Seite 220, Aufgabe 12

Teste dich!

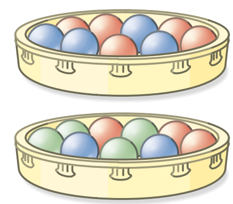
Lösungen, Seite 284

○ **5** Es wird dreimal gewürfelt. Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man
a) nur ungerade, **b)** nur verschiedene, **c)** nur gleiche Augenzahlen erhält.

◒ **6** **Finde den Fehler!**
Begründe, dass die Aussagen falsch sind und korrigiere sie im Heft.
a) *Wenn man drei Münzen gleichzeitig wirft, gibt es 3 mögliche Ergebnisse.*
b) *„Keinmal Wappen" ist das Gegenereignis von „einmal Wappen".*
c) *„Mindestens einmal Wappen" ist das Gegenereignis von „höchstens einmal Wappen".*

Üben ○
Seite 219, Aufgabe 8

◒ **7** König Balthasar gewährt jedes Jahr den Gefangenen die Chance auf eine vorzeitige Entlassung. Mit verbundenen Augen darf jeder eine der beiden Schalen auswählen und aus der gewählten Schale eine Kugel ziehen. Wer eine blaue Kugel zieht, wird begnadigt.
a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Gefangener begnadigt wird.
b) Untersuche, ob sich die Wahrscheinlichkeit ändert, wenn vor dem Ziehen der Inhalt beider Schalen zusammengeschüttet wird.



◒ **8** Ein Laplace-Würfel mit 12 Seiten wird 8-mal gewürfelt. Bestimme die Wahrscheinlichkeit
a) für keinmal die 12, b) für mindestens einmal die 12, c) für genau einmal die 12.

Lerntipp
Seite 215, Beispiel 2

Teste dich!

Lösungen, Seite 230

◒ **9** Es werden Kugeln aus dem Beutel auf dem Rand gezogen.
a) Finde ein Wort, das mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{4}{14} \cdot \frac{6}{13} \cdot \frac{3}{12} \cdot \frac{5}{11}$ auftritt. Entscheide, ob dabei mit oder ohne Zurücklegen gezogen wird.
b) Gib ein Wort mit drei Buchstaben an, das eine besonders hohe Wahrscheinlichkeit besitzt, wenn man mit Zurücklegen zieht. Begründe deine Wahl.

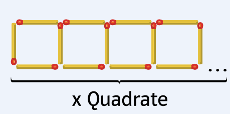
● **10** **Gilt immer – gilt nie – es kommt darauf an**
Untersuche, ob die folgenden Aussagen immer gelten, nie stimmen oder ob sie nur in bestimmten Fällen richtig sind. Begründe deine Antwort.
a) Beim Wurf zweier Würfel kann man die Wahrscheinlichkeiten aller Ereignisse durch Abzählen bestimmen.
b) Alle Pfade in einem Baumdiagramm haben zusammen die Wahrscheinlichkeit 1.

● **11** In einer Bahn sitzen 3 % Schwarzfahrer. Sieben Fahrgäste werden überprüft.
a) Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass kein Schwarzfahrer dabei ist.
b) Nina bezweifelt, dass das Ergebnis in a) realistisch ist, wenn die sieben kontrollierten Fahrgäste nebeneinandersitzen. Erläutere, welche Argumente sie vorbringen könnte.

Teste dein Grundwissen! **Terme aufstellen**

Grundwissen,
Seite 125, Beispiel 2
Lösungen, Seite 284

G **12** **a)** Begründe: Die Anzahl der benötigten Streichhölzer lässt sich beschreiben durch $4 \cdot x - 1 \cdot (x - 1)$ oder durch $1 + 3 \cdot x$.
b) Zeige rechnerisch, dass beide Terme gleichwertig sind.

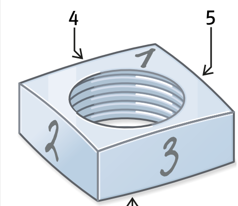


Wiederholen und Üben

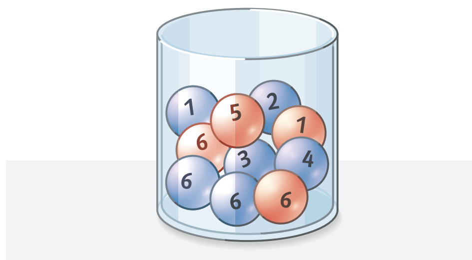
Lösungen, Seite 284

○ **1** **a)** Die Gegenseiten der quadratischen Schraubenmutter haben die Augensumme 7.
Beim 100-maligen Würfeln ergaben sich nebenstehende Häufigkeiten. Schätze die Wahrscheinlichkeiten.
b) Erläutere, wie du bei der Schätzung vorgegangen bist.

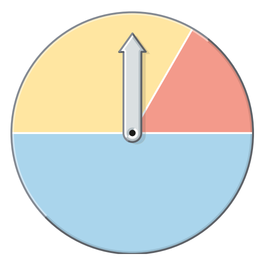
1	2	3	4	5	6
33 %	7 %	2 %	9 %	10 %	39 %



○ **2** Aus dem Behälter wird zufällig eine Kugel gezogen.
a) Gib die Wahrscheinlichkeit an,
(1) dass man eine 6 erhält,
(2) dass man eine ungerade Zahl erhält,
(3) dass die gezogene Kugel blau ist.
b) Erläutere, wie sich diese Wahrscheinlichkeiten ändern, wenn man eine weitere Kugel mit einer „blauen 6" hinzufügt.



○ **3** **a)** Notiere die Wahrscheinlichkeiten, die du den drei Farben des Glücksrades zuordnest.
b) Schätze, wie oft du etwa bei 300 Drehungen „Rot" erhalten wirst. Erläutere deine Schätzung.
c) Erläutere, wie man das Drehen des Glücksrades mit einem Würfel nachspielen kann.



○ **4** Oliver zieht aus dem Behälter in Fig. 1 zufällig drei Kugeln und legt sie in der gezogenen Reihenfolge hintereinander. Schreibe alle möglichen Wörter mit drei Buchstaben auf und berechne die Wahrscheinlichkeit, dass das Wort „OLI" entsteht.

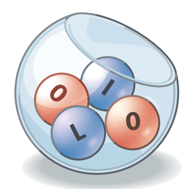
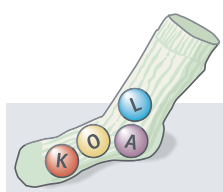


Fig. 1

○ **5** In einer Socke liegen vier Kugeln mit den Buchstaben K, O, L und A. Zwei Kugeln werden gezogen und in der gezogenen Reihenfolge zu einem Wort zusammengesetzt.
a) Berechne mithilfe der nebenstehenden Tabelle die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Wort „KO" entsteht.
b) Kontrolliere das Ergebnis mithilfe eines Baumdiagramms.



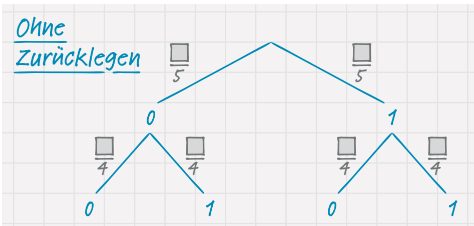
		2. Zug			
		A	L	K	O
1. Zug	A	–	AL	AK	AO
	L	LA	–	LK	LO
	K	KA	KL	–	KO
	O	OA	OL	OK	–

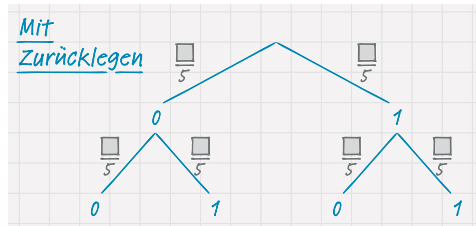
○ **6** Aus dem Beutel werden die drei Buchstaben nacheinander gezogen und hintereinandergelegt. Leo und Katja berechnen die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dabei das Wort SOS entsteht. Dazu schreiben sie alle möglichen Buchstabenkombinationen auf, zählen ab und nutzen die Laplace-Regel. Leo achtet auf die Farbe der Buchstaben, Katja nicht.
a) Erläutere, zu welchen Ergebnissen Leo und Katja kommen.
b) Bestimme die gesuchte Wahrscheinlichkeit mithilfe der Pfadregel in einem möglichst einfachen Baumdiagramm und vergleiche mit den Lösungen aus Teilaufgabe a).

Teste dich!

Kopiervorlage
Check-out
4z83ga

○ **7** Aus dem Beutel auf dem Rand werden zwei Kugeln gezogen. Einmal mit Zurücklegen, einmal ohne. Nico addiert die gezogenen Zahlen, Laura zählt, wie viele Kugeln blau sind. Beide erhalten Ergebnisse zwischen 0 und 2.





a) Übertrage jedes der Baumdiagramme zweimal in dein Heft und beschrifte sie.
(1) für Nico, (2) für Laura.

b) Ordne die Rechnungen auf den Kärtchen deinen Baumdiagrammen zu. Begründe deine Zuordnung.

A $P(0) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$

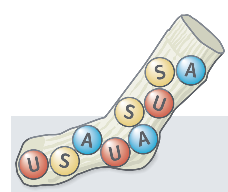
B $P(0) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$

C $P(1) = \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{4} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{8}{20}$

c) Formuliere zu den Kärtchen B und C aus Teilaufgabe b) einen Satz wie im Beispiel rechts.

A: Die Wahrscheinlichkeit dafür, beim Ziehen ohne Zurücklegen keine blaue Kugel zu ziehen, beträgt $\frac{3}{10}$.

○ **8** Aus der Socke auf dem Rand werden drei Buchstaben gezogen und zu einem Wort hintereinandergelegt. Heike hat sechs Pfade gezeichnet, um die Wahrscheinlichkeit für verschiedene Ereignisse zu berechnen. Ordne die Pfade den einzelnen Kärtchen zu und berechne die Wahrscheinlichkeiten.



A Es werden nur As gezogen.

B Es kommt kein S vor.

C Alle Buchstaben sind gleich.

D Alle drei Buchstaben kommen vor.

E Es entsteht das Wort SAU.

F Es entsteht das Wort AUA.

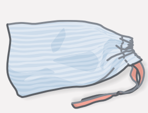
G Es kommt mindestens ein U vor.

(1)	O	$\xrightarrow{\frac{6}{9}}$	O	$\xrightarrow{\frac{5}{8}}$	O	$\xrightarrow{\frac{4}{7}}$	O
(2)	O	$\xrightarrow{\frac{3}{9}}$	O	$\xrightarrow{\frac{2}{8}}$	O	$\xrightarrow{\frac{1}{7}}$	O
(3)	O	$\xrightarrow{1}$	O	$\xrightarrow{\frac{6}{8}}$	O	$\xrightarrow{\frac{3}{7}}$	O
(4)	O	$\xrightarrow{\frac{1}{3}}$	O	$\xrightarrow{\frac{3}{8}}$	O	$\xrightarrow{\frac{3}{7}}$	O
(5)	O	$\xrightarrow{\frac{1}{3}}$	O	$\xrightarrow{\frac{3}{8}}$	O	$\xrightarrow{\frac{2}{7}}$	O
(6)	O	$\xrightarrow{1}$	O	$\xrightarrow{\frac{2}{8}}$	O	$\xrightarrow{\frac{1}{7}}$	O

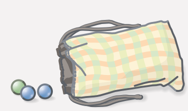
Vertiefen und Anwenden

◒ **9** Die folgende Aufgabe stammt aus einem Mathebuch der Klasse 4.
Beantworte die gestellte Frage. Kommentiere deine Antwort.

Beutel A



Beutel B



In einem Beutel sind 20 blaue und 80 grüne Murmeln. Im anderen Beutel sind 40 blaue und 60 grüne Murmeln. Es wurden mit geschlossenen Augen immer 20 Murmeln gezogen. Welcher Inhalt ist wohl in Beutel A, welcher in Beutel B?

Beutel A

blaue Murmeln	grüne Murmeln
5	15

Beutel B

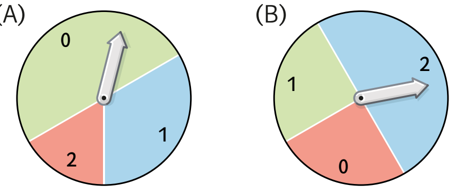
blaue Murmeln	grüne Murmeln
9	11

10 Von zehn gleich aussehenden Eiern sind sechs gekocht und vier roh. Man greift zufällig drei Eier heraus und zählt, wie viele davon roh sind (0, 1, 2 oder 3). Bestimme die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten.

11 **a)** Simon schätzt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er beim Torwandschießen trifft, auf 70 %. Er hat vier Versuche. Berechne auf Grundlage seiner Schätzung die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Simon
(1) viermal trifft, (2) keinmal trifft, (3) mindestens einmal trifft,
(4) genau einmal danebenschießt, (5) genau dreimal trifft.
b) Erläutere, welche der Ereignisse (1) bis (5) zueinander Gegenereignisse sind.

12 Klaus dreht zuerst Glücksrad (A), dann (B). Er addiert die Punkte und erhält Ergebnisse zwischen 0 und 4.

(A) (B)



a) Zeichne ein Baumdiagramm, das dieses Zufallsexperiment beschreibt.
b) Berechne die Wahrscheinlichkeiten der möglichen Ergebnisse von 0 bis 4.
c) Sina subtrahiert die Punkte des Rades (B) von denen des Rades (A) und erhält Punkte zwischen −2 und 2. Bestimme die zu Sinas Experiment gehörenden Wahrscheinlichkeiten. Du kannst ein neues Baumdiagramm zeichnen oder das aus a) ergänzen.
d) Jonas mag keine negativen Differenzen, er nimmt als Ergebnis nur den Abstand zwischen (A) und (B) und erhält Werte zwischen 0 und 2. Zur Berechnung der zugehörigen Wahrscheinlichkeiten verwendet er Sinas Wahrscheinlichkeiten und die Summenregel. Erläutere, wie Jonas vorgeht, und führe die Rechnung durch.

13 **Schlechte Noten**
Lehrer Lämpel macht den Vorschlag, die Noten für die nächste Klassenarbeit per Zufall zu ermitteln. Seine Schüler haben die Wahl: Es wird gewürfelt oder die nebenstehenden fünf Münzen werden geworfen. Zur Anzahl der auftretenden „Wappen“ wird eins addiert.
a) Schätzt für beide Varianten die Wahrscheinlichkeiten, mit denen die Noten auftreten.
b) Überprüft die Schätzungen zur zweiten Variante durch ein Experiment. Verbessert eure Schätzungen!
c) Hanno: „Für die Lage der 5 Münzen gibt es 32 Kombinationen. Damit kann ich die Wahrscheinlichkeit der Noten bei der zweiten Variante über Anteile berechnen.“ Erläutere Hannos Idee und finde heraus, zu welchem Ergebnis Hanno kommt. Vergleiche mit den Experimenten aus Teilaufgabe b).
d) Welche Variante der Notengebung würdet ihr der Klasse von Lehrer Lämpel empfehlen? Sammelt Vor- und Nachteile.

Wenn 0 Münzen Wappen zeigen, gibt das die Note 1.

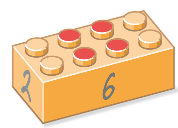
14 **Warten auf Erfolg**
Ede versucht, mit einem Bund sechs gleich aussehender Schlüssel im Dunkeln eine Tür zu öffnen. Ein Schlüssel passt. Er probiert einen nach dem anderen, wobei er die schon probierten Schlüssel festhält.
a) Kaya meint, man könne die Situation mit sechsmaligem Würfeln vergleichen. Anne möchte lieber einen Beutel mit Kugeln füllen und daraus ziehen. Begründe, warum Anne recht hat, und Kaya nicht.
b) Es kann vorkommen, dass man den richtigen Schlüssel gleich beim ersten Mal erwischt, manchmal erst beim zweiten, dritten, vierten, fünften oder sechsten Versuch. Heiko glaubt, dass alle diese „Wartezeiten“ von 1 bis 6 gleich wahrscheinlich sind. Nico behauptet dagegen, die Wahrscheinlichkeit, dass man den passenden Schlüssel genau beim dritten Mal erwischt, sei am größten. Entscheide mithilfe eines Baumdiagramms und einer Rechnung.

15 Ein Laplace-Würfel wird mehrmals geworfen. Wenn man beim ersten Wurf die 1 erhält, muss man abbrechen. Die Spieldauer ist 1, andernfalls darf man weitermachen. Erscheint beim zweiten Wurf die 2, hat man wieder verloren (Spieldauer 2). Andernfalls wird erneut geworfen. Erscheint beim dritten Wurf die 3, muss man abbrechen (Spieldauer 3) usw. Erscheint beim sechsten Wurf die 6, hat man Pech gehabt (Spieldauer 6). Man ist nur dann „durchgekommen", wenn man beim sechsten Wurf keine 6 würfelt.

a) Berechne die Wahrscheinlichkeit für die Spieldauern 1, …, 6 und die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man durchkommt.

b) Berechne die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten, wenn man statt mit einem Würfel mit einem Lego-Achter würfelt.

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
Wahrscheinlichkeit	10 %	0,5 %	47 %	32 %	0,5 %	10 %



abgebrochen:
3 4 3
4 2
6 2 3 3 5

durchgekommen
2 1 4 3 4 3
3 4 4 3 2 3

Vernetzen und Erforschen

16 **Das Geburtstagsproblem**

SP

Inka: Bei zwei Personen muss eine an einem anderen Tag Geburtstag haben als die andere. Die Wahrscheinlichkeit dafür beträgt $\frac{364}{365}$. Bei drei Personen muss die dritte an einem anderen Tag Geburtstag haben als die ersten beiden. Die Wahrscheinlichkeit dafür beträgt $\frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365}$. Wenn ich das so fortführe, ergibt sich für die gesuchte Wahrscheinlichkeit $\frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \frac{362}{365} \cdot \frac{361}{365} \approx 97{,}3\,\%$

Maria: Jeder muss an einem anderen Tag Geburtstag haben, also bleiben 360 Tage in einem Jahr mit 365 Tagen übrig. Daher ist die Wahrscheinlichkeit $\frac{360}{365} \approx 98{,}6\,\%$

Ruben: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man an einem bestimmten Tag Geburtstag hat, beträgt $\frac{1}{365}$. Daher ist die Wahrscheinlichkeit, dass einer nicht am Tag des anderen Geburtstag hat, $\frac{364}{365}$. Also ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $\left(\frac{364}{365}\right)^5 \approx 98{,}6\,\%$

Drei Kinder überlegen, wie groß die Wahrscheinlichkeit dafür ist, dass fünf Personen an verschiedenen Tagen in einem Jahr Geburtstag haben.

a) Begründe, welcher Vorschlag richtig ist.

b) Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zehn Personen an verschiedenen Tagen Geburtstag haben.

c) Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer Klasse mit 30 Kindern (oder in eurer Klasse) mindestens zwei Kinder am selben Tag im Jahr Geburtstag feiern.

17 **Der Euro im Gitternetz**

Zeichne auf ein kariertes Blatt ein Quadratgitter mit Linien im Abstand von 3 cm. Du schnippst einen Euro auf das Gitternetz. Nur wenn er ganz in einem der Quadrate landet, ohne die Gitterlinien zu berühren, gilt das als Treffer.

1 Euro
Durchmesser: 23,25 mm

1 Cent
Durchmesser: 16,25 mm

a) Schätze die Trefferwahrscheinlichkeit und die Veränderung, wenn man 1 ct verwendet.

b) Jan: „Ich kann mit den Flächen die Trefferwahrscheinlichkeit berechnen". Färbe den Bereich des Gitternetzes blau, in dem der Mittelpunkt des Euro für „Treffer" liegen müsste. Erläutere Jans Idee und beantworte, zu welchem Ergebnis er kommt.

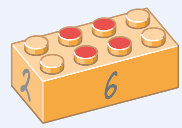
c) Berechne die Trefferwahrscheinlichkeit bei Verwendung der Cent-Münze.

Ihr könnt eure Ergebnisse durch ein Experiment in der Klasse überprüfen.

Rückblick

Bei einem **Zufallsexperiment** kann man die einzelnen **Ergebnisse** nicht vorhersagen. Man kann ihnen aber **Wahrscheinlichkeiten** zuordnen, die zusammen 1 (100 %) ergeben.
Mit Wahrscheinlichkeiten drückt man aus, welche **relativen Häufigkeiten** man bei mehreren langen Versuchsreihen in etwa **erwartet.** (D.h. um welchen Wert die relativen Häufigkeiten zufallsabhängig pendeln.)

Ergebnis	1	2	3	4	5	6
Wahrscheinlichkeit	10%	0,5%	47%	32%	0,5%	10%



Beim **Schätzen** von Wahrscheinlichkeiten orientiert man sich an relativen Häufigkeiten aus vergangenen Versuchsreihen und man beachtet Symmetrien.
Wahrscheinlichkeiten, die aus relativen Häufigkeiten geschätzt wurden, vertraut man umso mehr, je größer der Versuchsumfang war.

Gegenüberliegen Seiten ordnet man gleiche Wahrscheinlichkeiten zu. Lage 4 hält man für etwas unwahrscheinlicher als Lage 3, weil die Noppen wegen des Gewichts eher unten liegen werden als oben.

Ereignis, Gegenereignis, Summenregel
Man kann Ergebnisse zu **Ereignissen** zusammenfassen.
Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A ist dann die Summe der Wahrscheinlichkeiten der zu A gehörenden Ergebnisse.
Das Gegenereignis $\overline{A}$ zu einem Ereignis A enthält alle Ergebnisse, die nicht zu A gehören. Es gilt $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Die Wahrscheinlichkeit einer 6 beträgt beim Laplace-Würfel $P(6) = \frac{1}{6}$. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man keine 6 erhält, ist $P(\overline{6}) = \frac{5}{6}$

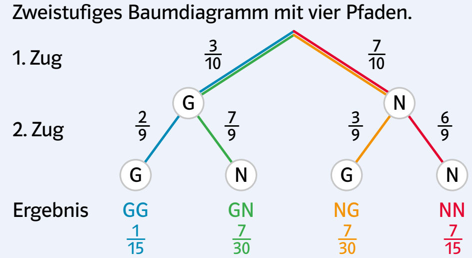
Laplace-Experimente
Zufallsexperimente, bei denen man annimmt, dass alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich sind, nennt man Laplace-Experimente.
Für diese Zufallsexperimente muss man keine Versuchsreihen durchführen, um Wahrscheinlichkeiten angeben zu können.
Wenn es k Ergebnisse gibt, dann beträgt die Wahrscheinlichkeit eines jeden Ergebnisses $\frac{1}{k}$. Bei Laplace-Experimenten gilt:

$$P(\text{Ereignis}) = \frac{\text{Anzahl der zum Ereignis gehörenden Ergebnisse}}{\text{Anzahl aller möglichen Ergebnisse}}$$

Die Wahrscheinlichkeit, mit einem Spielwürfel eine „1“ zu würfeln, ist $\frac{1}{6} \approx 16{,}6\,\%$. Beim Ziehen aus dem Gefäß hat „Blau“ die Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{7} \approx 29\,\%$.

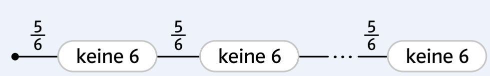
Pfadregel
Mehrstufige Zufallsexperimente kann man durch Baumdiagramme beschreiben. Die Wahrscheinlichkeit für ein Ergebnis des mehrstufigen Experiments erhält man, indem man die Wahrscheinlichkeiten entlang des zugehörigen Pfades multipliziert.

Zweistufiges Baumdiagramm mit vier Pfaden.



Wahrscheinlichkeit bei mehrstufigen Zufallsexperimenten
Zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses bei einem mehrstufigen Zufallsexperiment können folgende Vorgehensweisen hilfreich sein:
- auf wesentliche Merkmale achten
- Pfade zusammenfassen
- nur relevante Ausschnitte des Baumdiagramms skizzieren
- Wahrscheinlichkeiten von Gegenereignissen nutzen

Die Wahrscheinlickeit dafür, dass man bei sechsmaligem Würfeln keine 6 erhält, lässt sich durch einen Pfad berechnen:

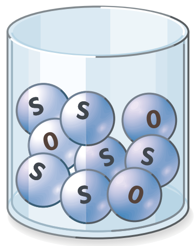


$P(\text{6-mal keine 6}) = \left(\frac{5}{6}\right)^6 \approx 33{,}49\,\%$

Runde 1

Lösungen, Seite 287

1 Robert zieht aus dem Behälter (s. rechts) zufällig zwei Kugeln und legt sie in der gezogenen Reihenfolge nebeneinander.
a) Erstelle zu dieser Situation ein vollständiges Baumdiagramm.
b) Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Robert „SO" erhält.
c) Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die beiden Buchstaben voneinander verschieden sind.



2 Zwei Laplace-Würfel werden gleichzeitig geworfen.
a) Bestimme mithilfe eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeit dafür,
(1) dass einer der Würfel eine 1 und der andere keine 1 zeigt,
(2) dass mindestens eine 1 dabei ist.
b) Kontrolliere die Ergebnisse aus Teilaufgabe a), indem du systematisch, z. B. in einer Tabelle, Ergebnisse zählst.
c) Selma behauptet: „Die Würfel werden gleichzeitig geworfen. Deswegen ist das ein einstufiges Experiment, zu dem man kein zweistufiges Baumdiagramm zeichnen kann." Kommentiere Selmas Behauptung.

3 Lukas dreht das Glücksrad aus Fig. 1 sechsmal. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür,
a) dass er nur „rot" erhält,
b) dass er mindestens einmal „rot" erhält.

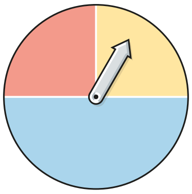
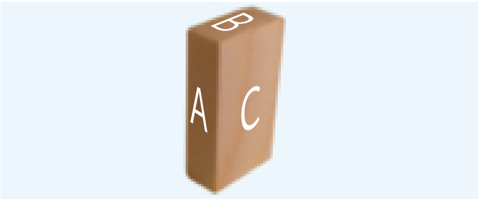


Fig. 1

Runde 2

Lösungen, Seite 287

1 Bei einem Quader wurden gegenüberliegende Seiten gleich mit A bzw. B bzw. C beschriftet. Die Wahrscheinlichkeit für B wurde auf 7 % und die von C auf 69,7 % geschätzt. Der Quader wird 300-mal geworfen. Erläutere, welche absoluten Häufigkeiten du in etwa erwartest.



2 Die Sitzplätze von vier Kindern (zwei Mädchen, zwei Jungen) liegen nebeneinander. Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Jungen und Mädchen sich abwechseln, wenn sie sich zufällig hinsetzen.
Notiere dazu alle Möglichkeiten.

3 Oliver zieht aus dem Behälter in Fig. 2 zufällig drei Kugeln und legt sie in der gezogenen Reihenfolge hintereinander.
a) Stelle die Situation in einem vollständigen Baumdiagramm dar.
b) Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Wort „OLI" entsteht.
c) Untersuche die Wahrscheinlichkeit für „OLI", wenn man ein drittes O in den Behälter legt.

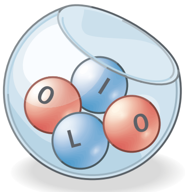


Fig. 2

4 Eine Münze landet mit einer Wahrscheinlichkeit von 50 % auf „Wappen". Nina meint: „Dann ist auch die Wahrscheinlichkeit 50 %, dass die Münze bei zwei Würfen einmal und bei vier Würfen zweimal auf ‚Wappen' landet." Untersuche Ninas Aussage mithilfe eines Baumdiagramms und kommentiere dein Ergebnis.

Glücksrad auf der schiefen Ebene

1 Vorbereitung

a) Zeichne ein Glücksrad mit sechs gleich großen Sektoren, auf dem eine Haarklemme als Zeiger durch Anschnippen um einen Pin rotieren kann. Beschrifte wie in Fig. 1, sodass einander gegenüberliegende Sektoren die Summe 7 besitzen – wie beim Spielwürfel. Tipp: Zeichne einen Kreis und halbiere ihn. Trage von den Eckpunkten der Kreishälften (das sind die Endpunkte des Durchmessers) den unveränderten Radius ab. Dadurch, dass man den Zirkel nicht verstellt, entstehen gleichseitige Dreiecke, bei denen alle Innenwinkel 60° groß sind. Davon passen genau drei Stück in einen Habkreis.

b) Prüfe das Glücksrad, indem du testest, ob der Zeiger auf allen Sektoren etwa gleich häufig stehen bleibt, bei 60 Schnippen also auf jedem Sektor jeweils 10-mal. Wenn du zweifelst, lass deinen Partner zur Kontrolle weitere 60-mal schnippen – und du kontrollierst das Glücksrad deines Partners.

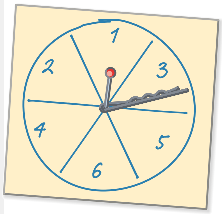


Fig. 1

Damit das Ergebnis zählt, muss der Zeiger zwei oder mehr volle Umdrehungen absolviert haben.

2 Schätzen

Nun wird das Buch auf der langen Seite um 2 cm (Duplostein) angehoben und zur schiefen Unterlage für das Glücksrad (Fig. 2).
Die 1 liegt oben, die 6 unten.
Schätze spontan, wie sich die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Sektoren durch das Schiefstellen verändern.

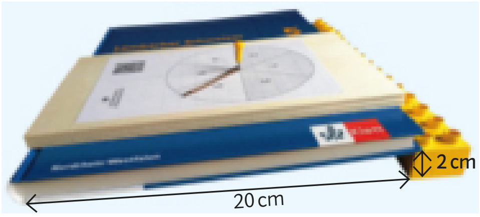


Fig. 2

Die Steigung beträgt 10 %, da man auf 20 cm Länge 2 cm (= 10 % von 20 cm) steigt.

3 Argumentieren

Diskutiert folgende Aussagen und stimmt ab, welche ihr für glaubwürdig haltet.
- **Nora**: Die untere Hälfte wird wahrscheinlicher: „Die Wahrscheinlichkeit rutscht runter."
- **Niko**: Die Wahrscheinlichkeiten ändern sich nicht, es bleibt bei $\frac{1}{6}$ für jeden Sektor.
- **Doris**: Die Wahrscheinlichkeiten hängen davon ab, ob man rechts- oder linksrum schnippt.
- **Sebi**: Beim Rechtsdrehen (im Uhrzeigersinn) ist die Wahrscheinlichkeit für 6 am größten. Danach nehmen die Wahrscheinlichkeiten in der Reihenfolge 6–4–2–1–3–5 ab.
- **Balthasar**: Nein, die 5 ist am wahrscheinlichsten, weil da der Zeiger von der 6 aus am längsten unterwegs war. Sie nehmen in der Reihenfolge 6–4–2–1–3–5 zu!
- **Ina**: Die „bergauf-Felder" sind wahrscheinlicher als die „bergab-Felder".
- **Simon**: Die Wahrscheinlichkeiten hängen vom Startfeld ab.
- **Micha**: Ich kann so „Ziel-Schnippen", dass ich fast immer oben auf „1" lande.

Kopiervorlage
Auswertungsbogen
4z83ga

4 Experimentieren

Einige Aussagen aus Aufgabe 3 sollen geprüft werden.

a) Ein Partner „R" schnippt *von der 6 aus* 100-mal in Richtung 4, sodass der Zeiger im Uhrzeigersinn (Rechtsdrehung, rechtsherum) rotiert, der andere „L" in Richtung 5, sodass der Zeiger gegen den Uhrzeigersinn (Linksdrehung, linksherum) rotiert.

b) Zählt die Häufigkeiten der einzelnen Sektoren aus und vergleicht.

c) Addiert in der Klasse jeweils die absoluten Häufigkeiten aller R- und aller L-Partner. Bestimmt die zugehörigen relativen Häufigkeiten und erläutert, welche der Aussagen aus Aufgabe 3 eure Daten absichern oder widerlegen.

↻ rechtsdrehend
↺ linksdrehend

5 Wahrscheinlichkeiten

a) Einigt euch in der Klasse auf Wahrscheinlichkeiten für ein Glücksrad mit 10 % Steigung.

b) Formuliert Vermutungen über die Wahrscheinlichkeiten von Glücksrädern mit Steigung 20 %. Überprüft diese Wahrscheinlichkeiten durch erneute Versuchsserien.

Das Gesetz der großen Zahlen

Mit Computersimulationen dem Zufall auf der Spur

Wenn man Münzwurfserien durchführt, beobachtet man manchmal Phasen, in denen die relative Häufigkeit (der Seite Zahl) von der Wahrscheinlichkeit 0,5 wegdriftet. Unser Gefühl sagt trotzdem, dass relative Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit bei langen Versuchsserien selten weit auseinanderliegen und dass wir Schätzungen von Wahrscheinlichkeiten umso mehr trauen dürfen, je mehr Versuche ihnen zugrunde liegen. Dahinter steckt das Gesetz der großen Zahlen, das hier erforscht werden soll.

1 Eine Laplacemünze sehr oft werfen

Simon hat im Kalkulationsblatt von Fig. 1 nach jedem von insgesamt 400 Münzwürfen in Spalte **B** notiert, ob Wappen (0) oder Zahl (1) erschien. In Spalte **C** wurden die absoluten, in Spalte **D** die relativen Häufigkeiten der Seite „Zahl" berechnet.
Lina und Dorit haben ebenfalls ihre relativen Häufigkeiten eingetragen (Spalten **E** und **F**). Alle drei Serien wurden daneben als Punktdiagramm dargestellt.

a) Überprüfe im Kopf, dass die Zahlen in Spalte **D** zu denen aus den Spalten **B** und **C** passen.
b) Beschreibe, wo man die Zahlen aus dem Bereich **D27 : F402** in der Grafik wiederfindet.
c) Fasse die Informationen, die du der Grafik entnimmst, in Worte.

	A	B	C	D	E	F
1				Simon	Lina	Dorit
2	n	Ergebnis	absolute Häufigkeit	relative Häufigkeit	relative Häufigkeit	relative Häufigkeit
3	1	1	1	100,0%	0,0%	100,0%
4	2	1	2	100,0%	50,0%	50,0%
5	3	0	2	66,7%	33,3%	66,7%
6	4	0	2	50,0%	50,0%	75,0%
7	5	0	2	40,0%	40,0%	80,0%
8	6	1	3	50,0%	33,3%	83,3%
9	7	0	3	42,9%	28,6%	85,7%
10	8	1	4	50,0%	37,5%	75,0%
27	25	0	17	48,0%	36,0%	60,0%
102	100	0	56	56,0%	39,0%	46,0%
402	400	0	191	47,8%	52,3%	45,0%

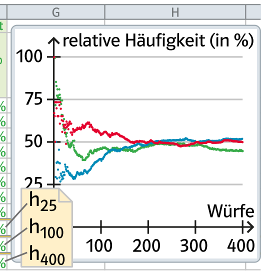


Fig. 1

Protokoll von drei Münzwurfserien mit je 400 Würfen.

Interaktives Forschen
Simulation Münzwurf
4z83ga

2 Viermal so viel – doppelt so genau

a) Führt in Fünfergruppen 100-mal die Simulationen aus Fig. 1 durch.
Je ein Gruppenmitglied protokolliert wie in Fig. 2 in den Spalten **B** bis **D** die relativen Häufigkeiten für Zahl
– h_{25} nach 25 Würfen (Fig. 1, Zelle **D27**),
– h_{100} nach 100 Würfen, (Fig. 1, **D102**),
– h_{400} nach 400 Würfen, (Fig. 1, **D402**).
Zwei weitere Mitglieder halten wie in Fig. 2 in den Spalten **E** und **F** fest,
– ob h_{100} näher bei 0,5 lag als h_{25} (1 in Spalte **E** eintragen),
– ob h_{400} näher bei 0,5 lag als h_{100} (1 in Spalte **F** eintragen).

b) Veranschaulicht die Schwankungen der relativen Häufigkeiten h_{25}, h_{100} und h_{400} (Werte in den Spalten **B**, **C** und **D**) durch Boxplots wie in Fig. 3. Bestätigt, dass sich die Länge der Box ungefähr halbiert, wenn man den Versuchsumfang vervierfacht. Erläutert, warum dadurch begründet wird, dass man Wahrscheinlichkeitsschätzungen umso mehr vertrauen darf, je mehr Versuche der Schätzung zugrunde liegen.

	A	B	C	D	E	F
1		25	100	400	25 → 100	100 → 400
2	1	48%	56%	47,8%		1
3	2	36%	39%	52,3%	1	1
4	3	60%	46%	45,0%	1	1
99	98	48%	49%	48,3%	1	
100	99	48%	56%	53,8%		1
101	100	52%	55%	50,8%		1
102					68	70

Fig. 2

Protokoll zu 100 Simulationen wie in Fig. 1

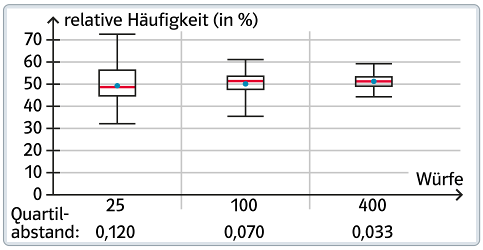


Fig. 3

Die relativen Häufigkeiten für „Zahl" nach 25, 100 und 400 Würfen wurden für je 100 Durchführungen zeilenweise in einer Tabelle mit drei Spalten B-D protokolliert und anschließend durch drei Boxplots veranschaulicht.

3 Die „Widerspenstigkeit" einzelner Versuchsserien

Bestimmt einen Schätzwert der Wahrscheinlichkeit dafür, dass die relative Häufigkeit der Seite „Zahl" von der Wahrscheinlichkeit 0,5 im Verlauf einer einzigen Versuchsserie wegdriftet, wenn man den Versuchsumfang von 25 auf 100 bzw. von 100 auf 400 vervierfacht.

Schokoladentest

In dieser Exkursion wird ein Zufallsexperiment vorgestellt, das zeigt, wie man mithilfe der Mathematik spannende Alltagsfragen beantworten kann.

Auf dem Pult stehen vier mit A, B, C und D beschriftete Gläser, die mit geraspelter Vollmilchschokolade gefüllt sind. Es gibt eine Nobelmarke (Linda), eine Trendmarke (Molka), eine Standardmarke (Ritta) und eine Billigmarke (No).

Im Folgenden soll geprüft werden, ob ihr die Marken herausschmecken könnt.

Durch das Raspeln kann man die Sorten nicht mehr an der Kästchengröße bzw. Form erkennen. Statt Schokolade kann man auch Colasorten, Weingummis oder Fruchtbonbons zur Verkostung anbieten.

Die Nullschmeckerhypothese: Welche Testergebnisse wären zu erwarten, wenn ... ?

Wenn niemand aus eurer Klasse Unterschiede schmecken könnte, würde man euch als Nullschmecker bezeichnen – und das Ausfüllen der Fragebögen (s. rechts) in einer Klasse mit 30 Schülerinnen und Schülern liefe auf ein 30-maliges zufälliges Ausfüllen hinaus. Welche Ergebnisse in diesem Fall zu erwarten wären, kann man mit der folgenden Simulation ermitteln.

Ausgefüllter und geprüfter Fragebogen

Glas	vermutet	tatsächlich	
A	Ritta	Linda	f
B	Linda	Molka	f
C	Molka	Ritta	f
D	No	No	r

Fragebogen mit einem Treffer

1 **Simulation mit Spielkarten**
Ein Simulationsschritt: Ein Partner legt vier Spielkarten mit den Symbolen ♠, ♣, ♥ und ♦ verdeckt nebeneinander (auf die Plätze A, B, C und D). Das entspricht dem zufälligen Befüllen der Gläser mit den vier Schokoladensorten. Der zweite Partner legt seine Spielkarten ebenfalls zufällig auf die ersten. Dann wird aufgedeckt. Die Anzahl der Übereinstimmungen liegt zwischen 0 und 4. Sie steht für die Anzahl zufällig richtig geschmeckter Schokoladensorten.

Simulation

Glas	Partner 2	Partner 1	
A	♠	♣	f
B	♣	♥	f
C	♥	♠	f
D	♦	♦	r

Simulierter Fragebogen mit einem Treffer

a) Jedes Paar führt so viele Simulationsschritte durch, wie Schülerinnen und Schüler in der Klasse sind, und notiert jedes Mal die Anzahl der Treffer und anschließend die mittlere Trefferzahl (Gesamtzahl aller Treffer geteilt durch die Schülerzahl). Dann tauscht ihr die Rollen, sodass jeder Mitschüler eure ganze Klasse einmal simuliert hat.

b) Fasst die Ergebnisse der gesamten Klasse in einer großen Tabelle zusammen.

Klasse mit 30 Schülern	0 Treffer	1 Treffer	2 Treffer	3 Treffer	4 Treffer	Mittlere Trefferzahl
André	11	8	11	0	0	1
Ivan	11	10	5	0	4	1,2
Aishe	14	9	5	0	2	0,9
...	...	...	...	...	...	...
Summe						

c) Stellt mit den summierten Daten der letzten Tabellenzeile die relativen Häufigkeiten dar, mit denen die simulierten Nullschmecker 0, 1, ... 4 Treffer erzielten (siehe Fig. 1 auf Seite 227). Zeichnet zu den mittleren Trefferzahlen einen Boxplot (siehe Fig. 2 auf Seite 227). Vergleicht eure Karten-Simulation mit Computersimulationen aus dem Online-Code.

Interaktives Forschen
Simulation Schokotest
4z83ga

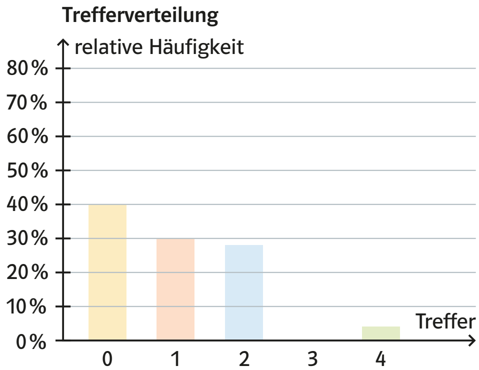


Fig. 1

relative Häufigkeit der Trefferzahlen 0 … 4 bei 30 · 30 = 900 Nullschmeckern

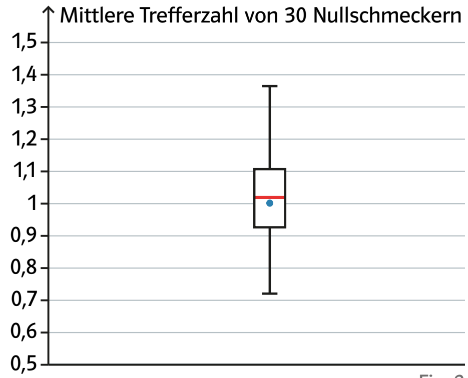


Fig. 2

Schwankungen der mittleren Trefferzahlen in 30 Klassen mit je 30 Nullschmeckern

3 Treffer sind unmöglich. Da alle vier Sorten genau einmal angekreuzt werden, ergibt sich, dass man bei drei Treffern automatisch auch die vierte Sorte richtig angekreuzt hat.

d) Entscheidungskriterium aufstellen – Untergrenze der Trefferquote festlegen
Der Boxplot aus Fig. 2 zeigt, in welchem Bereich die mittlere Trefferzahl – nur aufgrund von Zufallstreffern – liegen würde, auch wenn niemand einen Unterschied schmeckt. Legt auf der Grundlage des Boxplots gemeinsam fest, wie hoch eurer Einschätzung nach die mittlere Trefferquote in eurer Klasse mindestens sein sollte, damit man guten Gewissens bezweifeln kann, dass die Klasse nur aus Nullschmeckern besteht. Die Untergrenze der mittleren Trefferquote ist dann euer Entscheidungskriterium.

e) Durchführung des Schokoladentests
Führt den Schokoladentest in eurer Klasse durch. Der Versuchsleiter (das muss nicht euer Lehrer sein) bringt vier Gläser mit geraspelter Schokolade mit, damit man aus der Form oder dem Aufdruck auf den Kästchen keine Rückschlüsse auf die Marke ziehen kann. Jeder versucht nach einer Geschmacksprobe mit einem kleinen Löffel die vier Sorten den vier Gläsern zuzuordnen und füllt seinen Testbogen aus. Der Versuchsleiter gibt anschließend die wahren Sorten bekannt. Jeder zählt seine Treffer und die gesamte Gruppe ermittelt die mittlere Trefferquote. Wenn eure Trefferquote deutlich über den Trefferquoten von Nullschmeckergruppen liegt, also höher als die in Teilaufgabe d) festgelegte „Untergrenze", dürft ihr die Aussage: „Eure Klasse besteht aus lauter ‚Nullschmeckern' guten Gewissens bezweifeln.

Testbogen

Glas	Vermutung	
1	♠ Trend	✓
2	♣ nobel	
3	♥ standard	
4	♦ billig	✓

2 Treffer

2 Wahrscheinlichkeiten zur Entscheidung nutzen

a) Berechnet die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Nullschmecker nur durch zufälliges Ausfüllen des Testbogens 0, 1, … 4 Treffer erhält. Notiert dazu alle 24 möglichen Reihenfolgen, in denen man vier Gläser aufstellen kann. Dann wählt ihr eine Reihenfolge als „die richtige" und zählt bei jeder anderen die Anzahl der Treffer.

b) Vergleicht die Wahrscheinlichkeiten für 0, 1, …, 4 Treffer mit den in eurer Klasse erreichten relativen Häufigkeiten, die jetzt nicht wie in Fig. 1 von einer Simulation, sondern von eurem Schokoladentest stammen. Wenn beim Test hohe Trefferzahlen tatsächlich viel häufiger auftreten, als die Wahrscheinlichkeiten für Nullschmecker vermuten lassen, dürft ihr die Behauptung, dass ihr eine Gruppe aus lauter Nullschmeckern seid, bezweifeln.

richtig
♣ ♠ ♥ ♦

Muster	Treffer
1) ♣ ♠ ♥ ♦	4
2) ♣ ♠ ♦ ♥	2
3) ♣ ♥ ♠ ♦	2
…	

Nachgehakt und quergedacht

Die folgenden Kärtchen enthalten Denkanstöße zu zentralen Themen der zurückliegenden Jahrgangsstufe. Sie eignen sich, auf Gelerntes zurückzuschauen. So können übergreifende Zusammenhänge entdeckt und gesichert werden. Man kann über die Anstöße alleine nachdenken, um sie dann in kleinen Gruppen miteinander zu diskutieren. Erklärungen werden im Plenum über Vorträge und Diskussionen oder schön gestaltete Plakate miteinander verglichen und gegebenenfalls ergänzt. Auch ein Erklärwettbewerb mit einer Jury kann spannend sein.

Natürlich darfst du beim Argumentieren und Erklären alle Regeln und Beispiele aus diesem Buch nutzen. Durch Nachschlagen im Inhaltsverzeichnis oder im Register kann man herausfinden, wo sich passende Regeln finden könnten.

Zuordnungen

1 Simon & Anne

Simon: Ich habe mir das so gemerkt: Je-mehr-desto-mehr-Zuordnungen sind proportional, je-mehr-desto-weniger-Zuordnungen sind antiproportional. Beide rechnet man mit dem Dreisatz.

Anne: Ich glaube, du hast ein bisschen recht, aber nicht ganz!

Erläutere an selbst gewählten Beispielen, was Simon meinen könnte, und weshalb Annes Bedenken aber berechtigt sind.

2 Sandro & Aylin

Sandro: In der Chokolateria zahlt man die Pralinen nach Gewicht, aber man muss die Geschenkverpackung immer noch extra bezahlen, das macht die Proportionalität kaputt und man kann nicht mehr mit dem Dreisatz rechnen.

Aylin: Du hast recht, aber man kann trotzdem mit dem Dreisatz rechnen.

Erläutere an einem selbst gewählten Zahlenbeispiel, was Sandro meinen könnte und wie sich das mit Aylins Aussage vereinbaren lässt.

3 Sina

Das Teilen von Brüchen durch Brüche kann man mit Proportionalität und Antiproportionalität prima verstehen:

- Wenn du 120 (△) durch 4 (□) teilst, kommt 30 (○) heraus, das ist ja leicht.
- Wenn du □ verdoppelst, kommt bei der gleichen Rechnung die Hälfte, wenn du □ halbierst, das Doppelte heraus.
- Deswegen hängt das Ergebnis antiproportional von □ ab und es hängt sowieso proportional von △ ab.
- Deswegen ist $\frac{120}{7}$ durch $\frac{4}{11}$ der siebente Teil vom Elffachen von 30,
- also allgemein $\frac{\triangle}{7}$ durch $\frac{\square}{11} = \frac{\triangle}{\square} \cdot \left(\frac{11}{7}\right)$,
- also noch allgemeiner $\left(\frac{\triangle}{\triangleright}\right)$ durch $\left(\frac{\square}{\triangledown}\right) = \left(\frac{\triangle}{\square}\right) \cdot \left(\frac{\triangledown}{\triangleright}\right)$!

a) Versuche den Gedankengang von Sina mit anderen Zahlen noch einmal aufzuschreiben.

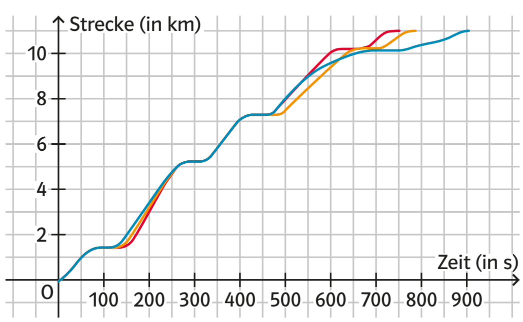
b) Untersuche, ob man das Multiplizieren von Brüchen ähnlich über Proportionalität und Antiproportionalität erklären kann.

4 Mario & Anna

Mario ist mit der S-Bahn dreimal die gleiche Strecke gefahren und hat mit dem GPS-Handy untenstehende Grafiken aufgezeichnet.

Anna: Dein Handy ist kaputt, so viele Kurven fährt die S-Bahn nicht! Die Strecke ist gerade!

Schau dir die Graphen genau an und überzeuge Anna davon, dass sie unrecht hat. Entnimm dazu der Grafik möglichst viele Informationen über die Geschwindigkeit und die Haltestellen.



5 Heike

Meine Mutter meint, dass Ampeln beim Radeln und Haltestellen beim Straßenbahnfahren die ganze Proportionalität zerstören.

Erläutere an einem selbst gewählten Beispiel, was damit gemeint sein könnte.

6 Laura

Wir haben gelernt, dass man Zuordnungen durch Tabellen, Graphen und durch Terme beschreiben kann. Ich finde Terme aber besonders nützlich, weil man damit nicht nur beschreiben, sondern auch Vorhersagen machen kann.

Erläutere Lauras Aussagen an einem eigenen Beispiel.

Rechnen mit Termen

7 Jonas

Bei negativen Zahlen kann man manche Rechenregeln einsehen, andere nicht! Die wurden nur so festgelegt, damit Rechengesetze weiter gelten.

Finde für die Zeilen mit ☺ Beispiele, die die Rechnung erklären. Nutze für die Erklärung der Zeilen mit ☹ deine Kenntnisse über Rechenregeln.

Multiplikat**or** tut etwas (aktiv)	·	Multiplik**and** wird verändert (passiv)	=	Produkt	
3	·	(−2)	=	−6	☺
(−2)	·	3	=	−6	☹
(−2)	·	(−3)	=	6	☹

Divide**nd** wird verändert (passiv)	:	Divis**or** tut etwas (aktiv)	=	Quotient	
(−6)	:	(−2)	=	3	☺ *enthalten sein*
(−6)	:	2	=	−3	☺ *aufteilen*
6	:	(−2)	=	−3	☹

Stochastik und Geometrie

8 Nora, Ciara & Omar

Nora: Wahrscheinlichkeiten kann man aus vielen Versuchen schätzen. Sie kommen also zeitlich NACH dem Experimentieren

Ciara: Nein, Wahrscheinlichkeiten sagen Häufigkeiten vorher. Sie liegen zeitlich VOR dem Experimentieren.

Omar: Erinnert euch an den Spruch: „Aus Erfahrung wird Erwartung!" Löst das nicht euer Problem?

Formuliere einen Text, der erläutert, was Omar meint – und der zeigt, dass du die Zusammenhänge zwischen Wahrscheinlichkeit und Häufigkeit verstanden hast.

9 Heiner

Laplacewürfel gibt es in der Wirklichkeit genauso wenig wie echte Punkte. Echte Würfel sind nämlich immer ein bisschen schief und echte Punkte sind in Wirklichkeit Flächen, sonst könnte man sie ja gar nicht sehen.

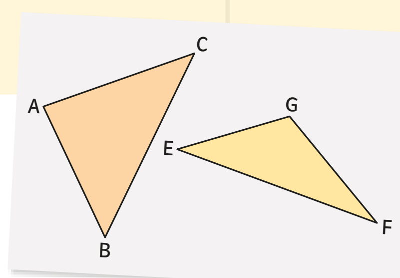
Nimm Stellung zu Heiners Aussage.

10 Ines

Längen kann man ganz genau messen, Gewichte ganz genau wiegen. Nur Wahrscheinlichkeiten kann man nicht genau bestimmen, die sind immer ungenau.

Nimm Stellung zu Ines' Aussage. Erläutere deine Gedanken.
Du kannst die Begriffe „gedankliches Modell" und „Wirklichkeit" verwenden.

11 Markus



Das Dreieck ABC ist schön, da kann ich drei Höhen einzeichnen und den Flächeninhalt auf drei verschiedene Weisen ausrechnen, auch wenn da bei mir nicht ganz genau das Gleiche herauskommt. Das Dreieck DEF ist nicht schön, weil es da nur eine Höhe gibt. Das hat den Vorteil, dass ich da keine drei verschiedenen Flächen herausbekomme.

Notiere, was Markus' Mathelehrerin antworten könnte.