Handzettel für einen Kompakkurs Stochastik Klasse 7/8
Grundlage LS 7 NRW (in LS 8 abgedruckt)
Auch in SII-Kursen mit wenig Stochastik-Vorkenntnissen hat sich dieser Einstieg bewährt

Man kann sich eng an die Lehrbuchvorlage halten, hier wird eine Abkürzung skizziert:
Man startet nach einem einleitenden Experiment zum Zusammenhang Wahrscheinlichkeit – relative Häufigkeit direkt mit mehrstufigen Experimenten ohne einen separaten Vorspann „Laplace-Wahrscheinlichkeiten". Das ist im Kontext einer experimentellen Situation sehr motivierend - und wie man mit Laplace-Wahrscheinlichkeiten umgeht, ist Schülern intuitiv absolut klar. Auch die Summenregel ergibt sich wenig formal aus einem Anwendungskontext. Die Binomialverteilung für Stufenzahl n=4 ist mit Baumdiagramm und Pfgadregel leicht zu verstehen. Spannend wird es, wenn man sie nutzt, um eine kleine Briese „beurteilender Statistik" durchs Klassenzummenzimmer wehen zu lassen....

Übrigens: Die „Merkkästen" auf LS 7 S. 79, S. 83, S. 86 sind für Schüler selbstverständlich, es entsteht i. d. R. kein Schaden, wenn man sie „überschlägt". Der Terminus „Ereignis" wird nicht erwähnt, wir sprechen stets von Ergebnissen.

1 Quaderexperiment: Wahrscheinlichkeit – relative Häufigkeit
a) Schätzen der Wahrscheinlichkleiten beim Quader – mit Bewerten der Schätzungen
b) Quaderexperiment (jeder quadert 100-mal)
Zusammenfassen der rel. Häufigkeiten in 5er-Teilgruppen und im Klassenverband,
Nachgebesserte Schätzung der Quaderwahrscheinlichkeiten fürs Kommende fixieren.
„Damit arbeiten wir im Kommenden weiter..."

c) Merksatz:

- Die Wahrscheinlichkeiten gegenüberliegender Quaderseiten sind gleich
  - je größer die Fläche, desto größer die Wahrscheinlichkeit
  - die Wahrscheinlichkeiten sind nicht proportional zu den Flächen
  - die Wahrscheinlichkeiten hängen von der „Wurftechnik ... Unterlage" ab
- Die relativen Häufigkeiten gegenüberliegender Quaderseiten sind meist nur ungefähr gleich, sie schwanken von Versuch zu Versuch
- Die Wahrscheinlichkeiten sind gut gewählt, wenn die relativen Häufigkeiten bei vielen Versuchen in der Nähe der Wahrscheinlichkeiten liegen

Wenn man keinen Quader hat, tut´s auch der „Lego-Achter" (S. 196 Experiment 1)
Auch den Vierfach-Münzwurf hat sich als Start-Experiment bestens bewährt (S. 196 Experiment 2, hier kommt man durch Nachdenken und Abzählen der 16 Möglichkeiten auf den „genauen Wert der Wahrscheinlichkeiten" vgl. auch den ml-Basisartikel von Herget)

Würfeln mit Quadern		Klasse:	7f	Datum:	13.2.03		
0,2 l Würfelbecher							
Die Ergebnisse in 5er-Gruppen:							
Name	1	2	3	4	5	6	
Patrick	10	6	28	41	4	11	100
Daniel	6	7	35	45	4	3	100
Binoy	7	4	37	34	1	17	100
Tobias	3	6	48	33	6	4	100
Michael	12	0	28	42	7	11	100
absolute H.	38	23	176	195	22	46	500
relative Häufigkeit in %	7,6	4,6	35,2	39,0	4,4	9,2	100,00
geschätzte Wahrscheinlichkeiten Gruppe 1	8	4	37	37	4	8	
Paula	11	6	34	32	7	10	100
Elaine	14	10	28	24	9	15	100
Marie	4	6	41	32	11	6	100
Marga	10	6	34	29	7	14	100
Sandra	7	4	30	37	4	18	100
absolute H.	46	32	167	154	38	63	500
relative Häufigkeit in %	9,2	6,4	33,4	30,8	7,6	12,6	100,00
geschätzte Wahrscheinlichkeiten Gruppe 2 in %	10	8	32	32	8	10	
Hares	8	5	38	35	5	9	100
Edris	8	7	26	41	8	10	100
Christian	11	7	30	30	7	15	100
Sineat	8	12	36	29	7	8	100
Alice	13	5	34	31	9	8	100
absolute H.	48	36	164	166	36	50	500
relative Häufigkeit in %	9,6	7,2	32,8	33,2	7,2	10,0	100,00
geschätzte Wahrscheinlichkeiten Gruppe 3 in %	10	7	33	33	7	10	100,00
Cararsten	10	12	32	29	5	12	100
Franca	9	12	34	25	10	10	100
Anka	12	9	21	38	13	7	100
Jenni	17	6	24	30	14	9	100
Kathi	11	8	23	34	11	13	100
absolute H.	59	47	134	156	53	51	500
relative Häufigkeit in %	11,8	9,4	26,8	31,2	10,6	10,2	100,00
geschätzte Wahrscheinlichkeiten Gruppe 4 in %	11	10	29	29	10	11	100,00
Ines	13	10	23	36	6	12	100
Jessi	12	8	27	38	7	8	100
absolute H.	25	18	50	74	13	20	200
relative Häufigkeit in %	12,5	9,0	25,0	37,0	6,5	10,0	100,00
geschätzte Wahrscheinlichkeiten Mini-Gruppe 5 in %	11	8	31	31	8	11	100,00
Ursula	11	7	29	31	11	11	100
Thomas	14	15	31	22	7	11	100
Björn	19	10	24	24	8	15	100
Ute	11	8	29	28	8	16	100
Annette	8	11	30	33	8	10	100
absolute H.	63	51	143	138	42	63	500
relative Häufigkeit in %	12,6	10,2	28,6	27,6	8,4	12,6	100,00
alle zusammen							
absolute H.	279	207	834	883	204	293	2700
%	10,33	7,67	30,89	32,70	7,56	10,85	100,00
Geschätzte Wahrscheinlichkeiten nennen Statistiker auch Wahrscheinlichkeitshypothesen, kurz Hypothesen							
brauchbare "Hypothese" A (Elaine)	11	8	31	31	8	11	100,00
brauchbare "Hypothese" B (Christian)	10,5	8	31,5	31,5	8	10,5	100,00

2 **Pfadregel und Abzählmethode** (im Vergleich)

Hier das paradigmatisches Laplace-Experiment („OMA“ S. 85 Aufg. 9 und „doppelte OMA“)

a) Eine Socke mit drei Klötzchen, die die Buchstaben „M“ bzw. „A“ bzw. „O“ tragen, wird durch die Klasse gereicht. Wer zuerst das Wort „O-M-A“ zieht (Ziehen ohne Rücklegen), erhält einen Euro (o. ä.). Zentrale Frage: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit („Chance“) für OMA?

Lösung (wird von Schülern - auch ohne Vorkenntnise stets selbst gefunden)

- Idee: Pfadregel:
  (die Pfadregel wird hier entdeckt/erarbeitet.)
  In einem Drittel aller Fälle erhält man das gewünschte O, in der Hälfte dieses Drittels kommt dann das ersehnte M – und dann hat man das A sicher.
  p(„O-M-A“)=$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{6}$
- Idee Abzählen:
  durch Aufschreiben aller 6 Permutationen kommt man zum gleichen Ergebnis.

c) Variation

Man legt nochmals drei Klötzchen „O-M-A“ (vielleicht mit einer anderen Farbe oder mit Kleinbuchstaben beschriftet) hinzu. Wird jetzt die Wahrscheinlichkeit für „O-M-A“ größer, kleiner oder bleibt sie gleich? (I. d. R. werden alle drei Positionen vehement vertreten).

- Die Pfadregel liefert $\frac{2}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{15}$
- Wenn man eine Liste mit den 120 möglichen Dreierbuchstabenkombinationen aufschreibt, (fleissiger Schüler oder Vorgabe durch den Lehrer) erhält man OMA in 8 von 120 Fällen. 8/120=1/15.

1	o	m	a	m	o	a	a	o	m	O	o	m	M	o	m	A	o	m
2	o	m	O	m	o	O	a	o	O	O	o	a	M	o	a	A	o	a
3	o	m	M	m	o	M	a	o	M	O	o	M	M	o	O	A	o	O
4	o	m	A	m	o	A	a	o	A	O	o	A	M	o	A	A	o	M
5	o	a	m	m	a	o	a	m	o	O	m	o	M	m	o	A	m	o
6	o	a	O	m	a	O	a	m	O	O	m	a	M	m	a	A	m	a
7	o	a	M	m	a	M	a	m	M	O	m	M	M	m	O	A	m	O
8	o	a	A	m	a	A	a	m	A	O	m	A	M	m	A	A	m	M
9	o	O	m	m	O	o	a	O	o	O	a	o	M	a	o	A	a	o
10	o	O	a	m	O	a	a	O	m	O	a	m	M	a	m	A	a	m
11	o	O	M	m	O	M	a	O	M	O	a	M	M	a	O	A	a	O
12	o	O	A	m	O	A	a	O	A	O	a	A	M	a	A	A	a	M
13	o	M	m	m	M	o	a	M	o	O	M	o	M	O	o	A	O	o
14	o	M	a	m	M	a	a	M	m	O	M	m	M	O	m	A	O	m
15	o	M	O	m	M	O	a	M	O	O	M	a	M	O	a	A	O	a
16	o	M	A	m	M	A	a	M	A	O	M	A	M	O	A	A	O	M
17	o	A	m	m	A	o	a	A	o	O	A	o	M	A	o	A	M	o
18	o	A	A	m	A	a	a	A	m	O	A	m	M	A	m	A	M	m
19	o	A	O	m	A	O	a	A	O	O	A	a	M	A	a	A	M	a
20	o	A	M	m	A	M	a	A	M	O	A	M	M	A	O	A	M	O

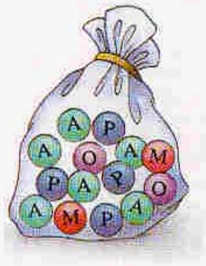
Merksatz:

Oft kann man Wahrscheinlichkeiten „durch Nachdenken“ genau bestimmen

- Mit der **Pfadregel**: Die Wahrscheinlichkeit eines Pfades erhält man, indem man alle Wahrscheinlichketen längs des Pfades miteinander multiplizert.
- Mit „**Kombinatorik**“ durch systematisches Aufschreiben aller gleichberechtigter „Kombinationen“ und durch Abzählen.
- **Kontrolle**: Wenn man ein Experiment durchführt und dabei die relativen Häufigkeiten in der Nähe der berechneten Wahrscheinlichkeiten liegen, ist man sicher, dass man beim Nachdenken keinen Fehler gemacht hat. Die Wahrscheinlichkeiten „stimmen“.

3 Summenregel

Entdeckung der Summenregel an einem kleinen Problem (LS 8 S. 208 Beispiele 3; 4)



Beispiel 3
In einem Beutel sind Kugeln mit Buchstaben gemischt. Man zieht nacheinander drei Kugeln und legt sie in der gezogenen Reihenfolge hintereinander. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dabei das Wort PAP entsteht?
Während des „Ziehens ohne Zurücklegen“ ändern sich die Anteile der einzelnen Buchstaben und damit die Wahrscheinlichkeiten längs des Pfades.
Lösung:
Wahrscheinlichkeit für PAP: $\frac{4}{14} \cdot \frac{6}{13} \cdot \frac{3}{12} \approx 3{,}3\,\%$

Fig. 2

Beispiel 4
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit des Wortes PAP, wenn man die drei gezogenen Buchstaben noch umordnen darf?
Nun sind drei Pfade brauchbar: PAP, PPA, APP. Alle diese Pfade haben die gleiche Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{91}$.
Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergibt sich nach der Summenregel.
Lösung:
Wahrscheinlichkeit: $\frac{3}{91} + \frac{3}{91} + \frac{3}{91} = \frac{9}{91} \approx 9{,}9\,\%$

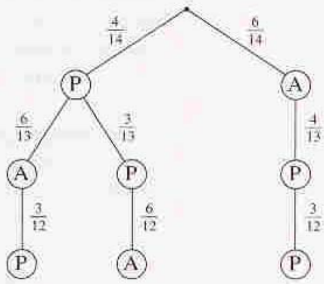


Fig. 3

oder LS 8 S. 210 Aufgabe 9

9 Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass beim Ziehen aus der Urne die Worte
a) HU, b) UHU, c) ULLA
entstehen, wenn man die gezogenen Buchstaben vor dem Zusammenlegen noch umsortieren darf (siehe Beispiel 4).

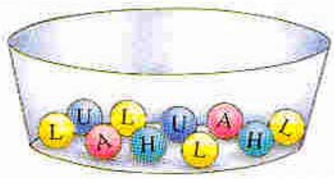


Fig. 1

Merksatz:
Wenn zu einem Ergebnis mehrere Pfade gehören, muss man deren Wahrscheinlichkeiten addieren

4 Übungen und Experimente

zur Festigung des Zusammenhanges zwischen Wahrscheinlichkeiten und relativen Häufigkeiten: LS S. 89-93. Hierbei werden auch nicht laplacesche Kontexte (Quader...) aufgegriffen.

Ergänzend zwei Beispiele für Arbeitsblätter zu mehrstufigen Experimenten

Gekochte Eier (Aufbereitung von LS S. 90 Beispiel 2)

Du hast 10 Eier (6 gekochte, 4 rohe). Nimm dafür 10 gleichartige Münzen, von denen du 4 als „roh“ markierst.

a) Stecke die Münzen in deine Hosentasche (oder deine Socke...)
Ziehe 3 Münzen ohne Zurücklegen und zähle, wie viele davon markiert („roh“) sind.
Wiederhole das Experiment 20 mal und trage deine Ergebnisse hier ein.

b) zähle aus

	Ich		Meine Gruppe		Ganze Klasse		
Ergebnis	abs. H.	rel. H. (%)	abs. H.	rel. H. (%)	abs. H. (%)	rel. H.	Wahrscheinl
0 x roh							
1 x roh							
2 x roh							
3 x roh							
Summe							

c) Fülle zusammen mit deiner Gruppe die letzte Spalte „Wahrscheinlichkeit“ aus (Hausaufgabe beachten).

d) Wie hängen Wahrscheinlichkeiten und relative Häufigkeiten zusammen? Formuliert in eurer Gruppe einige Sätze, hinter denen ihr alle steht.

Durchmarsch

Du „quaderst“ 6x hintereinander mit einen Becher (stülpen!)
Wenn du beim ersten Mal keine 1, beim 2ten Mal keine 2, beim 3ten Mal keine 3 .... und auch beim 6ten Mal keine 6 erhältst, ist dir ein „Durchmarsch“ (D) gelungen.

a) Du darfst 20 mal versuchen, einen Durchmarsch „zu schaffen“. Wie oft bist du „durchgekommen“?

b) Fasst die Ergebnisse in eurer Gruppe zusammen. Wie groß war in eurer Gruppe insgesamt die **relative Häufigkeit** für einen Durchmarsch?

c) Wie kann man mit der Pfadregel und unserem Wissen über den Quader die **Wahrscheinlichkeit** für einen Durchmarsch herausbekommen?
Passt dein Ergebnis zur relativen Häufigkeit?

d) Wie groß wäre die entsprechende Wahrscheinlichkeit, wenn man statt des Quaders einen normalen Würfel verwendet? Ist sie größer oder kleiner?

5 Binomialverteilung für Stufenzahl 4
(als weiterführende Übung zur Pfad- und Summenregel
hier sind die Aufgabenblätter teilweise schon ausgefüllt)

1 Vier „faire“ Münzen (Gruppen Sandra und Daniel)
Du hast 4 Münzen, die du gleichzeitig oder nacheinander wirfst.
Zähle jedes Mal die Anzahl der Seite „Wappen“
Wiederhole das Experiment 20 mal und trage deine Ergebnisse hier ein.

b) zähle aus

	Ich		Gruppe Sandra		Gruppe Daniel		
Ergebnis	abs. H.	rel. H. (%)	abs. H.	rel. H. (%)	abs. H. (%)	rel. H.	Wahrscheinl
0 x Wappen			4	4%	1	1%	6,25%
1 x Wappen			30	30%	26	26%	25%
2 x Wappen			36	36%	35	35%	37,5%
3 x Wappen			32	32%	30	30%	35%
4 x Wappen			8	8%	8	8%	6,25%
Summe			100	100%	100	100%	100%

c) Berechne zusammen mit deiner Gruppe die letzte Spalte „Wahrscheinlichkeit“.
Zeichne dazu ein Baumdiagramm.
... Die berechneten Wahrscheinlichkeiten passen gut zu den beobachteten relativen Häufigkeiten ...

4. Vier „gezinkte“ Münzen (Gruppen Alice und Kathi)
Du hast 4 gezinkte Münzen, die mit Wahrscheinlichkeit 1/3 „Wappen“ und mit 2/3 Zahl liefern. (Nimm dazu einfach einen Würfel, bei dem du die Seiten „1“ oder „2“ als Wappen, die übrigen als „Zahl“ deutest.) Rolle den Würfel viermal hintereinander und zähle jedes Mal die Anzahl der Seite „Wappen“ .
Wiederhole das Experiment 20 mal und trage deine Ergebnisse hier ein.

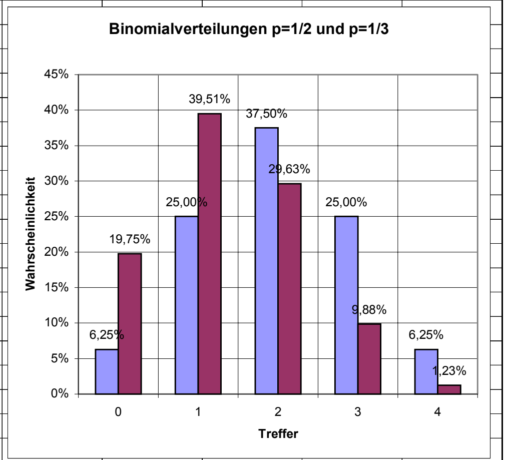
b) zähle aus

	Ich		Gruppe Alice		Gruppe Kati		
Ergebnis	abs. H.	rel. H. (%)	abs. H.	rel. H. (%)	abs. H.	rel. H. (%)	Wahrscheinl
0 x Wappen			19	15,93%	18	18%	19,75%
1 x Wappen			53	44,17%	34	34%	39,51%
2 x Wappen			31	25,83%	36	36%	29,63%
3 x Wappen			15	12,5%	10	10%	9,88%
4 x Wappen			2	1,67%	2	2%	1,23%
Summe			120	100%	100	100%	100%

c) Berechne zusammen mit deiner Gruppe die letzte Spalte „Wahrscheinlichkeit“.
Zeichne dazu ein Baumdiagramm.
... Die berechneten Wahrscheinlichkeiten passen gut zu den beobachteten relativen Häufigkeiten ...

Merkblatt Binomialverteilung (fürs Regelheft)

Binomialverteilung = Wahrscheinlichkeitsverteilung der "Trefferzahl" beim mehrfachen Münzwurf											
p=Wk eines Treffers (Wappen)			**q=1-p = Wk einer Niete (Zahl)**							**p=**	**p=**
							# Treffer	**# Pfade**	**Pfad-Wk.**	**0,5**	**1/3**
				Z	**ZZZZ**	**q^4**	**0**	**1**	**q^4**	**6,25%**	**19,75%**
			Z				**1**	**4**	**pq^3**	**25,00%**	**39,51%**
				W	**ZZZW**	**pq^3**	**2**	**6**	**p^2q^2**	**37,50%**	**29,63%**
		Z					**3**	**4**	**p^3q**	**25,00%**	**9,88%**
				Z	**ZZWZ**	**pq^3**	**4**	**1**	**p^4**	**6,25%**	**1,23%**
			W				**Summe**			**100,00%**	**100,00%**
				W	**ZZWW**	**p^2q^2**					
	Z										
				Z	**ZWZZ**	**pq^3**					
			Z								
				W	**ZWZW**	**p^2q^2**					
		W									
				Z	**ZWWZ**	**p^2q^2**					
			W								
				W	**ZWWW**	**p^3q**					
o											
				Z	**WZZZ**	**pq^3**					
			Z								
				W	**WZZW**	**p^2q^2**					
		Z									
				Z	**WZWZ**	**p^2q^2**					
			W								
				W	**WZWW**	**p^3q**					
	W										
				Z	**WWZZ**	**p^2q^2**					
			Z								
				W	**WWZW**	**p^3q**					
		W									
				Z	**WWWZ**	**p^3q**					
			W								
				W	**WWWW**	**p^4**					



6: Colatest - eine Briese beurteilender Statistik

Im Laufe einer Übungsstunde besuchen die Schüler (einzeln! nacheinander! Unabhängigkeit wahren!) zwei Tische mit je vier Cola-Bechern , an denen Sie mit einem Strohalm bewaffnet folgende Testblätter ausfüllen

Cola Test 1 (zwei Sorten) Name:

Kreuze für jeden Becher an, welche Sorte deiner Meinung nach „drin" ist.
Du darfst aus jedem Becher einmal schlürfen.

Becher A	Becher B	Becher C	Becher D
O Coke	O Coke X	O Coke X	O Coke
O Coke Light X	O Coke Light	O Coke Light	O Coke Light X

Cola Test 2 (drei Sorten) Name:

Kreuze für jeden Becher an, welche Sorte deiner Meinung nach „drin" ist.
Du darfst aus jedem Becher einmal schlürfen.

Becher A	Becher B	Becher C	Becher D
O Coke X	O Coke	O Coke	O Coke
O Coke Light	O Coke Light	O Coke Light X	O Coke Light
O Sinalco	O Sinalco X	O Sinalco	O Sinalco X

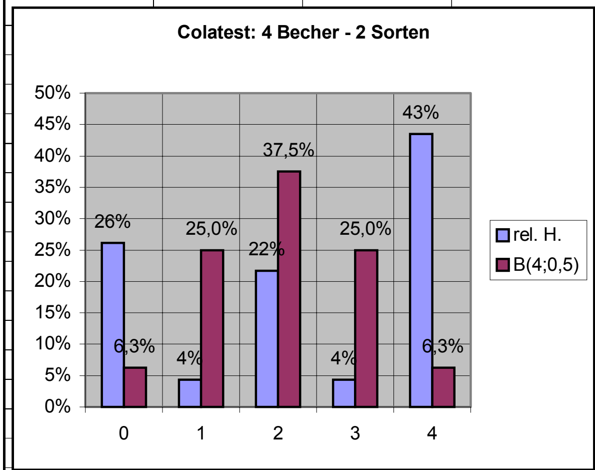
(Die tatsächliche Füllung ist (natürlich nicht für die Schüler) mit mit X markiert)

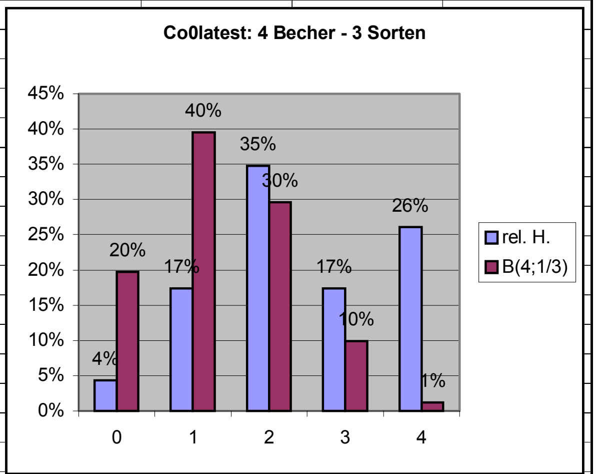
Auswertung:
Wenn man Schüler bittet, einen Zusammenhang zwischen den Münzwurf-Experimenten und dem Cola-Test herzustellen, werden sie meist bald „fündig“: Wenn jemand seine Kreuzchen zufällig setzen würde („Nullschmecker“) wäre bei jedem Becher

- im Test 1 die Trefferwahrscheinlichkeit 1/2
- im Test 2 die Trefferwahrscheinlichkeit 1/3

Wären alle Kursteilnehmer Nullschmecker, so müsste die relative Häufigkeitsverteilung der Treffer also binomialverteilt sein mit p=1/2 bzw. mit p=1/3. Natürlich hoffen wir, dass unsere relativen Häufigkeiten bei den hohen Trefferzahlen viel größer sind als die Wahrscheinlichkeiten der Binomialverteilung vorhersagen würden. Hier das Ergebnis:

Colatest: 4 Becher - 2 Sorten					Colatest: 4 Becher - 3 Sorten			
Treffer	abs. H.	rel. H.	B(4;0,5)		abs. H.	rel. H.	B(4;1/3)	
0	6	26%	6,3%		1	4%	20%	
1	1	4%	25,0%		4	17%	40%	
2	5	22%	37,5%		8	35%	30%	
3	1	4%	25,0%		4	17%	10%	
4	10	43%	6,3%		6	26%	1%	
Mittelwert		2,35	2,00			2,435	1,333	





Ergebnis:
Die relativen Häufigkeiten passen („glücklicherweise“) nicht zur Binomialverteilung, also nicht zu der Annahme (Hypothese), dass die Testteilnehmer „Nullschmecker“ sind...
Es ist sinnvoll, zu einer Bewertung der Testergebnisse auch die Mittelwerte und Erwartungswerte (= „theoretische Mittelwerte“) heranzuziehen.

6 Rückblick zur Begriffsbildung – Eintrage im Regelheft

- Wahrscheinlichkeiten und relative Häufigkeiten liegen zwischen 0 und 1 (100%)
- Die Summer „aller Wahrscheinlichkeiten“ ist 100 %
  Die Summer „aller relativen Häufigkeiten“ ist 100 % *„axiomatischer Aspekt“*
- Wahrscheinlichkeiten stehen fest, relative Häufigkeiten schwanken „zufällig“
  Beim Quader sind die Wahrscheinlichkeiten der Gegenseiten gleich, die relativen Häufigkeiten der Gegenseiten sind meist nur ungefähr gleich.
- Wahrscheinlichkeit: Modellvorstellung im Kopf (vor Experiment)
  relative Häufigkeit: Wirklichkeit (nach Experiment) *„prognostischer Aspekt“*
- Wahrscheinlichkeiten sind gut gewählt (gut berechnet), wenn die relativen Häufigkeiten in der Nähe der Wahrscheinlichkeiten liegen.

- Je mehr Versuche man macht, desto näher liegen die relativen Häufigkeiten bei den Wahrscheinlichkeiten. *„frequentistischer Aspekt“*
- Manchmal muss man Wahrscheinlichkeiten „nachbessern“, manchmal kann (muss) man Annahmen über Wahrscheinlichkeiten ganz verwerfen, z. B:
  - Quader: Wahrscheinlichkeiten und Flächeninhalte sind nicht proportional
  - Cola-Test: Unsere Trefferzahlen sind nicht binomialverteilt mit p=1/2 bzw. 1/3.

  „hypothetischer Aspekt“

Und wie sich diese Art der (exemplarisch / operativen) Begriffsbildung in didaktischer Sicht darstellt liest man z. B. nach bei H. J. Claus: Einführung in die Didaktik der Mathematik, Darmstadt 1995 S. 111 ff:

Die *Definition von Begriffen* (Begriffsbestimmung) steht nicht am Anfang, sondern am Ende eines Einführungsprozesses, der von einem Problem oder einer Anwendung ausgeht, in dem sich der Begriff als zwingend notwendig, als wertvoll oder wenigstens als brauchbar erweist. Während Ausubel entdeckendes Lernen von Begriffen auf das Kindesalter beschränkt sieht (D. P. Ausubel, 1974, S. 121) – Jugendliche und Erwachsene lernten Begriffe am besten durch verbale Belehrung –, stellt Winter dem die These entgegen: „Begriffe müssen entdeckt, Definitionen nacherfunden werden." Man lernt einen Begriff nicht, indem man sich die vom Lehrer gegebene Definition anhört, sondern indem man ihn bei der Arbeit an einem mathematischen Problem im Zusammenhang mit anderen Begriffen als Werkzeug erfährt (H. Winter, 1983b, S. 197).

Für unterrichtliche Einführung von Begriffen sind die in der Mathematik auftretenden Definitionen wichtig, von denen wir nach Winter (a. a. O., S. 187) die folgenden behandeln:

(1) exemplarische,
(2) operative (konstruktive, operationale),
(3) abstraktive,
(4) ideative,
(5) explizite,
(6) implizit-axiomatische.

Damit der Schüler den Begriff sicher erfaßt, soll er ihn an möglichst verschiedenen Beispielen kennenlernen, in denen die nicht relevanten Merkmale stark unterschieden auftreten. Man spricht vom *Prinzip der Variation*. Beispiele: Quadrate sind nach Größe, dann nach Lage, schließlich nach Größe und Lage unterschieden darzubieten. Kinder neigen dazu, ein auf der Spitze stehendes Quadrat als „Karo“ und nicht als Quadrat zu bezeichnen. Bei der Einführung des Funktionsbegriffs sollte man Beispiele mit verschiedenen Definitions- und Zielmengen, mit und ohne Funktionsterm, monoton steigende und fallende, stetige und unstetige bringen. (Man sollte hier nicht verschweigen, daß der Abbildungsbegriff und der Funktionsbegriff identisch sind.) Zum Prinzip der Variation gehört auch die Erörterung der *Grenzfälle*. Schülern ist oft nicht klar, daß sowohl ein gerades Stück Draht als auch ein Bierdeckel die Form von Zylindern haben, daß ein Papierblatt quaderförmig ist. Ebenso unsicher reagieren sie auf die Fragen: „Ist die Null eine Zahl?“ „Sind 1 und a Teiler von a?“ „Ist die identische Abbildung eine Translation, eine Drehung, eine Geradenspiegelung?“ Der Grenzfall kann einen neuen Begriff konstituieren wie bei der ideativen Begriffsbestimmung. So existieren Geraden, Punkte, Ebenen nicht in der Realität, es sind Grenzfälle realer Begriffe, z. B. gezeichneter Punkte, Geraden, Kanten an Körpern, Oberflächen von Körpern. Eines der wichtigsten Beispiele für einen durch den Grenzfall erzeugten Begriff: der Grenzwert.

Beispielen zu einem Begriff sollen Gegenbeispiele folgen, damit die Schüler die Grenzen des Begriffs genau kennenlernen *(Kontrastprinzip)*. Dann mischt man Beispiele und Gegenbeispiele, um zu testen, ob die Schüler den Begriff sicher erworben haben. Auch hier legt man auf Grenzfälle Wert, „äußere Grenzfälle“, die sich nur wenig von Objekten unterscheiden, die unter den Begriff fallen, wie „Fastquadrate“, Vierecke mit fast rechten Winkeln, mit fast gleichlangen Seiten, und man bringt Gegenbeispiele, denen nur ein relevantes Merkmal fehlt, beim Quadrat z. B. Rauten und Rechtecke.

Tieferes Verständnis eines Begriffs ergibt sich erst, wenn man ihn in das vorhandene Wissen einordnet, indem man ihn in *Zusammenhang mit anderen Begriffen* bringt, indem man ein Begriffsgefüge