

»Würfeln« mit Quadern – die Gibbs-Verteilung

WOLFGANG RIEMER – DIETRICH STOYAN

Das Würfeln mit den »Riemer-Quadern« ist seit 25 Jahren fester Bestandteil des Stochastikunterrichts. Die Wahrscheinlichkeiten der Gegenseiten sind nämlich exakt gleich, für die relativen Häufigkeiten gilt das nur näherungsweise. Quader gestatten also (anders als Reißzwecken), bei der Begriffsbildung eine klare Abgrenzung der Modellebene (Wahrscheinlichkeiten) von der Realitätsebene (relative Häufigkeiten). Und die Tatsache, dass die nahe liegende Hypothese einer Proportionalität zwischen Größe der Seitenfläche und Wahrscheinlichkeit schon nach wenigen Versuchen verworfen werden muss, lässt Grundvorstellungen der beurteilenden Statistik schon in Klasse 7 lebendig werden. (Wenn man nur Laplacesche Objekte verwendet, entstehen diese Grundvorstellungen erst gar nicht.)

Den Autoren ist es nun gelungen, das seit NEWTON ungelöste Problem (!) einer Bestimmung der Quaderwahrscheinlichkeiten zu »knacken«. Äußerst hilfreich war neben unzähligen Realexperimenten ein frei verfügbares Simulationsprogramm, das am Physikalischen Institut in Oxford entwickelt wurde und von jedem Schüler ab Klasse 7 mit Vergnügen genutzt werden kann.

1 Einleitung

Jeder weiß, welche Ergebnisse zu erwarten sind, wenn man mit »idealen« oder Laplace-Würfeln (Abb. 1) würfelt. Was aber passiert, wenn man stattdessen einen homogenen oder inhomogenen Quader (Abb. 2 und 3) verwendet? (Die Quader sind – genau wie Spielwürfel – so beschriftet, dass die Augensumme der Gegenseiten 7 ergibt.)

Da steht man überraschenderweise vor einem schwierigen Problem. Wie bei INEICHEN 1988 nachzulesen ist, gelang es NEWTON im Jahre 1665 nicht, die Wahrscheinlichkeiten der Seiten aus den Quaderabmessungen zu berechnen. Auch SIMPSON scheiterte 1740 mit der Hypothese einer Proportionalität zwischen den Wahrscheinlichkeiten der Quaderseiten und den Inhalten der zugehörigen sphärischen Vierecke auf der dem Quader umschriebenen Kugel.

Soweit wir wissen, ist das Problem bis heute nicht gelöst. Es ist offenbar nicht wichtig genug für die Menschheit, aber auch so komplex, dass einfache mathematische oder physikalische Ansätze kaum zum Ziel führen können.

Das Ziel dieses Aufsatzes besteht darin, die Schwierigkeit des Problems zu schildern, über statistische Experimente zu berichten und schließlich einen stochastischen Ansatz vorzuschlagen, der zu sehr guten Näherungen für die Wahrscheinlichkeiten beim »Würfeln« mit Quadern führt: Wir benutzen dazu die Gibbs-Verteilung.

2 Die Quaderwahrscheinlichkeiten aus den Abmessungen bestimmen?

Niemand bezweifelt, dass beim »Würfeln« mit Quadern die größten Quaderseiten auch die größten Wahrscheinlichkeiten



Abb. 1. Sieben »Laplace-Würfel«

besitzen. Leider ist es aber nicht so, dass die Wahrscheinlichkeiten proportional zur Größe der Flächen sind; das zeigt Tabelle 1 für ein Beispiel. Der Quader wurde 2700-mal mit einem Würfelbecher auf einem Holztisch gewürfelt (Zeile 5) und 1000-mal aus 1 m Höhe auf einen Stahlboden fallen gelassen.

Ebenso wenig sind sie proportional zu den Flächengrößen der zugehörigen sphärischen Vierecke auf der dem Quader umschriebenen Kugel. Wenn man die Grundkantenlängen eines Quaders mit a, b und die Höhe mit c bezeichnet, ist der Anteil des Flächeninhalts des zur Grundseite gehörenden »sphärischen Vierecks« an der Kugelfläche gegeben durch

$$\frac{1}{\pi} \cdot \arcsin \left(\frac{ab}{\sqrt{(a^2 + c^2)(b^2 + c^2)}} \right)$$

(INEICHEN, 1988).

Damit erhält man die vierte Zeile. Die letzten beiden Spalten werden in Abschnitt 4 erläutert.

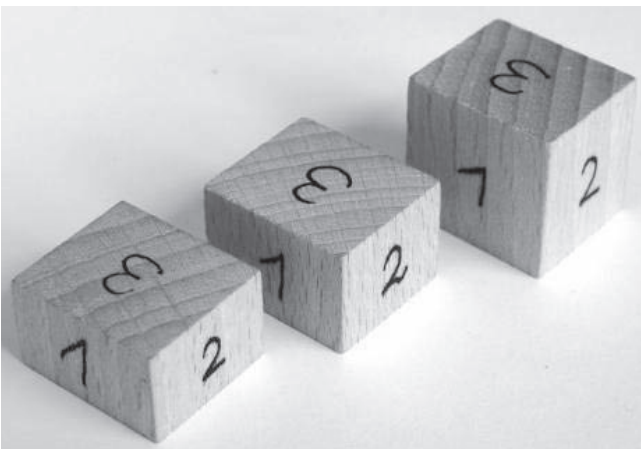


Abb. 2. Homogene Quader mit Grundfläche $2,3 \times 2,0 \text{ cm}^2$, Höhen $1,3 \text{ cm}$; $1,5 \text{ cm}$; $2,1 \text{ cm}$

Verschiedene Autoren suchten in den letzten Jahrzehnten nach einer Lösung des »Quaderwürfelproblems«. BUDDEN (1980) und HEILBRONNER (1984–85) untersuchten in den 1980er Jahren Serien von Quadern mit quadratischer Grundfläche und variabler Höhe h . Sie veröffentlichten ihre Versuchsergebnisse, konnten aber keinen formelmäßig fassbaren Zusammenhang zwischen h und den Würfelwahrscheinlichkeiten finden. OBRESCHKOW (2010) programmierte daraufhin 2006 am Institut für Theoretische Physik in Oxford eine Simulation, die Quader in einer vom Rechner zufällig gewählten Ausgangslage nach den Newton'schen Gesetzen »auf den Boden fallen lässt«. Diese Simulation war Kern des internet-basierten »Cuboid« Forschungsprojektes, in dem man hoffte, durch Variation genau definierbarer Versuchsbedingungen (Lageenergie, Translationsenergie, Rotation, Material-Elastizität, Energieabsorption) Fragestellungen der folgenden Art beantworten zu können:

»You roll a six-sided die with parallel faces but non-equal edge lengths. What is the probability to land on each surface? By simulating an exhaustive number of tosses, we address the following questions:

- How do probabilities scale with edge ratios?
- How do probabilities depend on elasticity and friction?
- How do final states depend on initial conditions?«

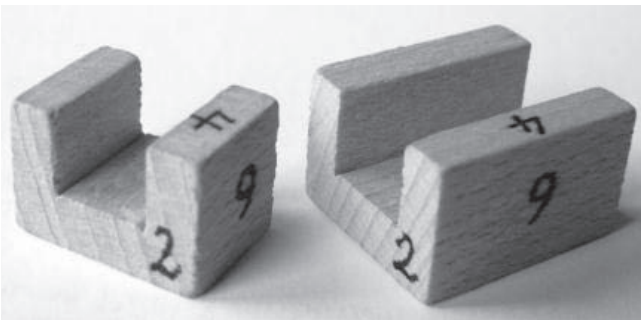


Abb. 3. Inhomogene »gezinkte« Quader (»U-Würfel«) $2,3 \times 2,0 \times 1,3 \text{ cm}^3$ bzw. $1,4 \times 2,0 \times 1,3 \text{ cm}^3$; »Wandstärke« $0,5 \text{ cm}$

Als ein Ergebnis dieses Projekts, das ohne eine Veröffentlichung beendet wurde, präsentiert STANICZENKO 2010 auf seiner Website ein Phasendiagramm, das die Abhängigkeit der Quaderwahrscheinlichkeiten von der horizontalen Anfangsgeschwindigkeit zeigt. Das Simulationsprogramm kann man nutzen, um selber solche Phasendiagramme zu erzeugen, aber auch um Quader beliebiger Abmessungen unter definierten Anfangsbedingungen – auch in Zeitlupe – »fallen zu lassen« und die Ergebnisse statistisch auszuwerten. Man kann die Modellparameter problemlos so wählen, dass sich ähnliche Ergebnisse wie beim Würfeln mit einem Becher ergeben.

Quader ($1,3 \times 2,0 \times 2,3 \text{ cm}^3$)	1	2	3	4	5	6		
Seitenfläche (in cm^2)	2,99	2,6	4,6	4,6	2,6	2,99		
Flächenanteil	14,7 %	12,8 %	22,6 %	22,6 %	12,8 %	14,7 %		
Anteil der sphärischen Fläche	13,5 %	10,5 %	26,0 %	26,0 %	10,5 %	13,5 %	β	t
Würfelbecher auf Holztisch $n = 2700$	10,3 %	7,7 %	30,9 %	32,7 %	7,6 %	10,9 %	2,96	4,99
freier Fall (1 m) auf Stahlboden $n = 1000$	5,5 %	1,5 %	43,5 %	42,5 %	2,6 %	4,4 %	6,09	4,35

Tab. 1. Flächeninhalte und relative Häufigkeiten

Eine Simulation mit diesem Programm zeigt Abbildung 4. Die Quader haben in der Simulation stets die Masse 1 kg (Gewicht ca. 10 N). Wenn man die Lageenergie mit 70 J einstellt, entspricht das der Fallhöhe 7 m bzw. der Fallhöhe 7 cm bei einem Quader mit den Abmessungen $1,3 \times 2,0 \times 2,3 \text{ cm}^3$. Die Bedeutung des Elastizitätskoeffizienten (»beta«) und des Reibungskoeffizienten (»mu«) wird in dem Programm erläutert. Wir haben stets die Voreinstellungen 0,5 bzw. 0,2 verwendet. Tabelle 2 vergleicht diese Simulation mit dem Realexperiment aus Tabelle 1.

3 Einfluss der Versuchsbedingungen

Ein Grund für die großen Schwierigkeiten, eine analytische Theorie für das Würfeln mit Quadern zu entwickeln, ist die Tatsache, dass die Wahrscheinlichkeiten erheblich von der Wurftechnik, der Fallhöhe, der Unterlage, der Kantenform und der Elastizität des Würfelmaterials abhängen. Das belegt ein Vergleich der letzten beiden Zeilen von Tabelle 1 ebenso eindrucksvoll wie ein Blick auf Tabelle 3, in der mit dem »langen U« (Abb. 3) gewürfelt wurde. Lässt man es (a) aus einer festen Höhe (0,5 m) auf einen Wollteppich fallen und würfelt man (b) mit einem Würfelbecher auf einem Holztisch, ergeben sich auch hier sehr unterschiedliche Verteilungen (RIEMER, 1988). Das Verwenden eines weichen Teppichs oder einer federnden Stahlunterlage beim freien Fall aus »großer Höhe«, aber auch das fehlende Stützen durch die Wände eines Würfelbechers machen instabile Lagen bei gleichen äußeren Abmessungen wesentlich unwahrscheinlicher. Diese Abhängigkeit der Würfelergebnisse von den Würfelbedingungen wird auch in FELDBERG (1990) sichtbar. Er studierte den Einfluss der »Startparameter« beim Werfen eines (allerdings) zweidimensionalen »Würfels«.

4 Die Gibbs-Verteilung

Die Gibbs-Verteilung (mitunter auch als Gibbs-Boltzmann-Verteilung bezeichnet) beschreibt in der Thermodynamik die Statistik von Vielteilchensystemen (DINGES & ROST, 1982, 159 f.). Wenn in einem solchen System, das sich im thermodynamischen Gleichgewicht befindet, den Zuständen $i = 1, 2, \dots$ die Energien E_1, E_2, \dots zugeordnet sind, dann beobachtet man den Zustand i mit der Wahrscheinlichkeit

$$p_i = \frac{1}{Z(\beta)} \cdot e^{-\beta E_i}$$

Dabei sorgt der Faktor $c = 1/Z(\beta)$ dafür, dass sich die Wahrscheinlichkeiten zu 1 aufsummieren. $Z(\beta)$ heißt nach Boltzmann »Zustandssumme«, β nennen wir Gibbs-Parameter, man könnte ihn entsprechend der thermodynamischen Literatur auch als »inverse Temperatur« bezeichnen.

Natürlich kann man jede diskrete Verteilung als Gibbs-Verteilung schreiben, die nötigen Energien E_i kann man durch Logarithmieren bestimmen. Interessant werden solche Verteilungen erst dann, wenn die Energien eine inhaltliche Bedeutung haben, wie im Folgenden bei den Quadern.

Auch die Exponentialverteilung kann übrigens als Gibbs-Verteilung aufgefasst werden. Die zugehörige Dichtefunktion tritt in der barometrischen Höhenformel

$$\rho(h) = c \cdot e^{-\frac{m \cdot g \cdot h}{kT}}$$

auf, die die Dichte $\rho(h)$ eines idealen Gases unter dem Einfluss der Schwerkraft bei konstanter Temperatur T beschreibt. Dabei ist h die Höhe über dem Grundniveau, m die Masse eines Moleküls, g die Erdbeschleunigung, k die Boltzmann-Konstante, T die absolute Temperatur und $E = m \cdot g \cdot h$ die Lageenergie.

In den 1980er Jahren vermutete RIEMER (1985, 105 f.; 1991, 110 f.) nach Experimenten mit Modellgasen in verschiedenen Kraftfeldern (simuliert durch »Stahlkugelwolken« auf verschieden geformten Höhenprofilen), dass auch die Wahrscheinlichkeiten der Quaderseiten Gibbs-Verteilungen folgen. Er benutzte dabei die »Schwerpunktenergie«, d. h. die »Lageenergie«, die zu der Höhe h_i des Schwerpunkts proportional ist, wenn der Quader auf der Seite i liegt. Er nahm also an, dass gilt:

$$p_i = c \cdot e^{-\beta h_i}, i = 1, \dots, 6. \tag{1}$$

Anschaulich bedeutet das: Je instabiler die Lage des Quaders ist, d. h. je höher sein Schwerpunkt über der Grundfläche liegt, desto kleiner ist die Wahrscheinlichkeit dieser Lage. Bei dem Ansatz (1) hat die Verteilung der Würfelseiten einen unbekanntes Gibbs-Parameter β . Für $\beta \rightarrow 0$ erhält man eine ausgeartete Verteilung, bei der die ganze Wahrscheinlichkeitsmasse auf denjenigen i liegt, für die h_i minimal ist. Für $\beta \rightarrow \infty$ ergibt sich die Gleichverteilung.

Der Gibbs-Parameter β hängt von den Versuchsbedingungen ab. Wir wissen nicht, wie er theoretisch vorhergesagt werden könnte und schätzen ihn aus den experimentellen Daten mithilfe der Maximum-Likelihood-Methode. Die Idee dabei ist, den unbekanntes Parameter β so zu wählen, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man die im Experiment beobachteten absoluten Häufigkeiten a_1, \dots, a_6 erhält, maximal wird. Da die Würfe beim »Würfeln« voneinander unabhängig sind, können die Einzelwahrscheinlichkeiten multipliziert werden, und die Wahrscheinlichkeit der beobachteten Häufigkeitsverteilung ergibt sich zu

$$L(\beta) = \prod_{i=1}^6 (c(\beta) \cdot e^{-\beta h_i})^{a_i}.$$

Quader ($1,3 \times 2,0 \times 2,3 \text{ cm}^3$)	1	2	3	4	5	6	β	t
Realexperiment $n = 2700$	10.3 %	7.7 %	30.9 %	32.7 %	7.6 %	10.9 %	2.96	4.99
Simulation $n = 3000$	11.1 %	7.6 %	32.2 %	31.5 %	7.4 %	10.2 %	2.98	4.02

Tab. 2. Vergleich einer Simulation aus Abb. 4 mit dem Realexperiment aus Tab. 1

Langes U ($1,3 \times 2,0 \times 2,3 \text{ cm}^3$)	1	2	3	4	5	6	β	t
(a) Würfelbecher auf Holztisch $n = 481$	8.7 %	6.9 %	23.1 %	41.0 %	7.9 %	12.5 %	2.84	3.93
(b) freier Fall auf Wollteppich $n = 150$	4.7 %	2.0 %	28.0 %	57.3 %	1.3 %	6.7 %	4.94	7.10

Tab. 3. Abhängigkeit der Ergebnisse von den Würfelbedingungen

3D Simulation of a rigid cuboid (Version 3.9 by Danail Obreschkow)

Simulation control

Single run (current) [Save] [Print]

Single run (random) [Refresh] [Home]

Statistical sampling [Bar chart] [Edit]

Systematic sampling [Star] [Edit]

Memorize image in steps of [s] ?

Precision factor (standard = 1) ?

Model

System, Frames, Variables

Current state and replay

Current step: Animation speed relative to real time

General | Intrinsic properties | Translation | Rotation | Energy

Side lengths (sx, sy, sz) [m]

Mass (m) [kg]:

Bouncing coefficient (beta) [-] ?

Kinetic coefficient of friction (mu) [-] ?

Live: Image rate scales with processor activity. Use replay for smooth animation.

Entire field Zoom Show image during simulation [Graphics options]

Statistics

Total number of rolls = 5992 Total number of rows = 2

Epot	Etra	Erot	dis	dim	Pre.	sx	sy	sz	beta	mu	# of rolls	Face1	Face2	Face3	Face4	Face5	Face6
70	1	1	0	3	1	1.3	2.0	2.3	0.5	0.2	2995	333	227	965	943	222	305
70	1	1	0	3	1	1.3	2.0	2.3	0.5	0.2	2997	324	243	934	970	226	300

Add new row

Potential energy [J] sx [m]

Translation energy [J] sy [m]

Rotation energy [J] sz [m]

Relative energy dispersion ? beta (v) ?

Dimensions (2 / 3) ? mu (v) ?

Simulation precision factor ?

The cuboid dynamics is independent of the mass. For energies, the mass is taken equal to 1.

Delete

Examples

P1 P2 P3 P4

Server Link

Abb. 4. Simulation des Würfels mit einem Quader mit den Abmessungen 1,3 x 2,0 x 2,3 m³

In der Statistik heißt diese Wahrscheinlichkeit Likelihood-Funktion, als Funktion von β aufgefasst. Für das Rechnen ist es bequemer, den zugehörigen Logarithmus zu maximieren:

$$\ln(L(\beta)) = \sum_{i=1}^6 a_i \cdot (\ln(c(\beta)) - \beta \cdot h_i). \quad (2)$$

Abbildung 5 zeigt, wie man im Fall des $1,3 \times 2,0 \times 2,3 \text{ cm}^3$ -Quaders aus Tabelle 1 vorgeht.

Zeile 4 von Abbildung 5 enthält die Schwerpunkthöhen h_i , die zu den Augenzahlen i aus Zeile 3 gehören. In Zeile 6 steht die Gibbs-Verteilung (1), wobei der Parameter β mit 2,96 in Zelle B2 so gewählt wurde, dass der Wert $\ln(L(\beta))$ in Zelle H9 mit -1873 maximal wird.

Die Chi-Quadrat-Testgröße

$$t = \sum_{i=1}^6 \frac{(a_i - n \cdot p_i)^2}{n p_i},$$

die die Abweichungen zwischen den experimentell bestimmten Häufigkeiten a_i und den Gibbs-Wahrscheinlichkeiten p_i »misst«, wird in H10 berechnet. Dabei ist $n = 2700$ der Versuchsumfang. Für das Beispiel ergibt sich $t = 4,990$. Der kritische Wert zum 5 %-Signifikanzniveau ist 9,5, also werden die kleinen Abweichungen der Häufigkeiten a_i von den Wahrscheinlichkeiten p_i als nicht signifikant angesehen. Damit ist im Sinne der Statistik »bewiesen«, dass der Gibbs-Ansatz für den betrachteten Quader akzeptabel ist.

Der erste Autor hat Schulklassen auch mit Quadern anderer Abmessungen (Abb. 2) und den gezinkten Quadern (Abb. 3) würfeln lassen. Wie die Tabelle 4 zeigt, sind auch hier die experimentellen Ergebnisse mit der Gibbs-Hypothese vereinbar.

Die ersten drei Spalten enthalten die Abmessungen in cm, n ist der Stichprobenumfang. Die Spalte β enthält die nach der Maximum-Likelihood-Methode geschätzten Gibbs-Parameter und die Spalte t enthält den Chi-Quadrat-Testwert, der bis auf die vorletzte Zeile unter der kritischen Grenze 9,5 liegt. Die letzte Spalte zeigt die (durch Simulationen der entsprechenden Gibbs-Verteilung geschätzte) Standardabweichung von β . Bei den inhomogenen »gezinkten« Quadern (»langes und kurzes U« aus Abb. 3) gilt für die Schwerpunkthöhen $h_3 = 0,761 \text{ cm}$, $h_4 = 0,539 \text{ cm}$. Bei dem in der letzten Zeile protokollierten Ver-

such fiel das lange U stets aus 70 cm Höhe auf einen harten Teppichboden (»Nadelfilz«), bei den in den anderen Zeilen protokollierten Versuchen wurde mit einem Würfelbecher auf Holztischen gearbeitet.

5 Einfluss der Anfangsbedingungen

Die letzten beiden Zeilen der Tabellen 1 und 4 belegen (ebenso wie die Tabelle 2) die beträchtliche Abhängigkeit der Quaderwahrscheinlichkeiten von den Versuchsbedingungen: Je größer die Energie (Fallhöhe) und je elastischer die Unterlage beim Würfeln ist, desto wahrscheinlicher werden stabile (niederenergetische) Endlagen, desto wahrscheinlicher landen die Quader also auf den großen Seiten 3 und 4 und desto größer wird der Gibbs-Parameter β . Diese Beobachtung spiegeln auch die Ergebnisse (Tab. 5a)–c) des Simulationsprogramms OBRESCHKOW (2010) wider, in dem man die Anfangsparameter E_{pot} (Lageenergie), E_{tra} (Translationsenergie, horizontale Wurfgeschwindigkeit) und die Rotationsenergie E_{rot} systematisch verändern kann. Für uns sind die Tabellen 5a)–c) wegen des sehr hohen Versuchsumfangs eine über die Realexperimente hinausgehende Absicherung der Gibbs-Hypothese.

6 Variables β oder normierte Energie?

6.1 Normierte Höhen

Der Ansatz (1) hat einen Nachteil: Die Höhen h_i gehen direkt ein. Wenn man sie in verschiedenen Skalen misst, ergeben sich verschiedene numerische Werte und folglich verschiedene Werte für den Gibbs-Parameter β . Wenn man z. B. bei »gleichen« Versuchsbedingungen alle Seitenlängen eines Quaders verzehnfacht, muss die Wahrscheinlichkeitsverteilung natürlich gleich bleiben, da es sich nur um eine Skalenänderung handelt. Wegen der verzehnfachten Schwerpunkthöhen muss sich aber β auf 1/10 des Anfangswertes verkleinern. Das stört, wenn man Versuche vergleicht, bei denen mit »Würfeln« verschiedener Form und Größe gewürfelt wird, bei denen man aber auf Grund gleicher Versuchsbedingungen ein gleiches β erwartet. Daher werden wir im Folgenden die Höhen normieren. Anstelle von h_i nehmen wir $h_i' = h_i/d$ wobei

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

	B9	fx =LOG(B6)*B8								
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	
1	Quader 1.3x2.0x2.3cm³	2700	Würfe							
2	β	2.960								
3	i	1	2	3	4	5	6			
4	h(i)	1	1.15	0.65	0.65	1.15	1	Summe		
5	$e^{-(\beta \cdot h(i))}$	0.052	0.033	0.146	0.146	0.033	0.052	2.164	<-c	
6	$p(i)=c \cdot e^{-(\beta \cdot h(i))}$	11.2%	7.2%	31.6%	31.6%	7.2%	11.2%	1		
7	h(i): rel. H.	10.3%	7.7%	30.9%	32.7%	7.6%	10.9%	1		
8	a(i): abs. H.	279	207	834	883	204	293	2700	<-n	
9	$\ln(p(i)) \cdot a(i)$	-265	-237	-417	-442	-233	-278	-1873	<-max	
10	chiquadrat-testgröße	1.860	0.845	0.427	1.050	0.495	0.313	4.990	<-t	

Abb. 5. Maximum-Likelihood-Schätzung von β und Chi-Quadrat-Anpassungstest auf die Gibbs-Verteilung

x	y	z											
Quader			n	1	2	3	4	5	6	β	t	sig(β)	
1.3	2	2.3	1800	11.7 %	5.6 %	33.6 %	32.7 %	6.1 %	10.4 %	3.3	4.8	0.12	
1.5	2	2.3	634	13.1 %	6.6 %	27.8 %	31.5 %	8.5 %	12.5 %	3.4	3.1	0.23	
1.7	2	2.3	661	13.9 %	5.4 %	28.9 %	30.3 %	6.8 %	14.7 %	5.1	1.7	0.38	
2.1	2	2.3	449	20.3 %	10.9 %	19.2 %	18.7 %	8.7 %	22.3 %	5.1	3.6	0.80	
kurzes U													
1.3	2	1.4	2310	6.6 %	19.7 %	16.3 %	30.5 %	19.5 %	7.5 %	3.1	4.3	0.14	
1.3	2	1.4	1000	6.7 %	16.7 %	15.9 %	33.6 %	21.2 %	5.9 %	3.6	6.2	0.21	
langes U													
1.3	2	2.3	1950	10.6 %	6.9 %	23.9 %	42.5 %	6.8 %	9.3 %	3.0	6.8	0.09	
1.3	2	2.3	600	9.5 %	9.2 %	20.0 %	39.3 %	10.0 %	12.0 %	2.4	7.1	0.19	
1.3	2	2.3	480	8.8 %	6.9 %	23.1 %	40.6 %	7.9 %	12.7 %	2.8	4.2	0.18	
1.3	2	2.3	600	11.5 %	9.0 %	20.5 %	36.0 %	11.3 %	11.7 %	2.2	4.8	0.17	
1.3	2	2.3	1000	9.2 %	9.0 %	20.8 %	41.1 %	9.0 %	10.9 %	2.7	10.4	0.13	
1.3	2	2.3	1700	10.2 %	4.9 %	20.6 %	50.8 %	5.5 %	7.9 %	3.7	6.9	0.10	

Tab. 4. Würfeln mit Quadern und gezinkten Quadern

Epot	Etra	Erot	s _x	s _y	s _z	n	1	2	3	4	5	6	β	t
1	0	0	1,3	2	2,4	10747	13,5 %	9,5 %	26,3 %	26,3 %	10,6 %	13,8 %	1,8	10,2
10	0	0	1,3	2	2,4	10747	13,2 %	9,1 %	27,5 %	27,4 %	9,7 %	13,0 %	2,0	7,9
100	0	0	1,3	2	2,4	10748	11,0 %	6,0 %	32,6 %	32,7 %	6,4 %	11,2 %	3,0	2,0
1000	0	0	1,3	2	2,4	10747	9,7 %	4,1 %	36,3 %	36,8 %	4,0 %	9,2 %	3,9	4,8

a) Je größer die Fallhöhe (E_{pot}), desto wahrscheinlicher werden die »großen« Seiten.

100	0	0	1,3	2	2,4	10747	10,9 %	6,4 %	32,4 %	32,6 %	6,2 %	11,5 %	3,0	2,7
100	10	0	1,3	2	2,4	10746	10,4 %	5,0 %	34,6 %	34,4 %	5,6 %	10,0 %	3,4	5,3
100	100	0	1,3	2	2,4	10747	9,5 %	4,4 %	36,6 %	36,1 %	4,3 %	9,1 %	3,9	1,4
100	1000	0	1,3	2	2,4	10747	9,1 %	3,5 %	38,0 %	37,5 %	3,4 %	8,5 %	4,3	6,6

b) Je größer die Rotationsenergie (E_{rot}), desto wahrscheinlicher werden die »großen« Seiten.

100	0	0	1,3	2	2,4	10749	10,5 %	6,3 %	33,9 %	32,4 %	6,4 %	10,6 %	3,1	14,4
100	0	10	1,3	2	2,4	10747	9,5 %	4,7 %	36,4 %	36,1 %	4,4 %	9,0 %	3,8	4,3
100	0	100	1,3	2	2,4	10746	6,3 %	1,9 %	42,2 %	41,4 %	1,7 %	6,5 %	5,5	9,3
100	0	1000	1,3	2	2,4	10746	2,8 %	0,8 %	47,2 %	45,7 %	0,7 %	2,8 %	7,8	9,3

c) Je mehr Schwung (E_{tra}), desto wahrscheinlicher werden die »großen« Seiten.

Tab. 5a)–c). Ergebnisse von Computersimulationen zur Abhängigkeit der Wahrscheinlichkeiten und des Gibbs-Parameters β von der Wurftechnik

die Länge der Quaderdiagonale ist. Um die Symbolik zu vereinfachen, ersetzen wir im Folgenden das Symbol h_i' durch h_i und benutzen weiter das Symbol β . So bleibt also (1) weiter gültig, nur die h_i sind als normierte Höhen aufzufassen.

6.2 Auswertung der Versuche von BUDDEN und HEILBRONNER

Wie oben erwähnt, experimentierten BUDDEN und HEILBRONNER mit »quadratischen Prismen«, also Quadern der Abmessungen $x \cdot x \cdot y$. Ihr Ziel war es, die Abhängigkeit der Wahrscheinlichkeiten von der variablen Seitenlänge y zu studieren. Wir nutzen ihre Ergebnisse, um zu untersuchen, wie sich der

Gibbs-Parameter β bei »gleichen Versuchsbedingungen« mit den Abmessungen ändert. Dabei ist zu bemerken, dass die Qualität der Daten beider Autoren nicht besonders gut ist. BUDDEN macht zu seinen Versuchsbedingungen keine Angaben, so ist nicht klar, ob seine Schüler alle mit der gleichen Wurftechnik (Würfelbecher, freies Rollen, Fallenlassen aus konstanter Höhe usw.) gearbeitet haben. HEILBRONNER gibt an, dass »die Quader wie gewöhnlich gewürfelt wurden, teils mit Würfelbecher, teils freihändig gerollt. Zu gleichen Teilen wurden ein Linoleumboden bzw. ein Tuch als Unterlage verwendet.«

Quadratische Prismen landen entweder auf einer der beiden quadratischen Seiten $x \cdot x$ (Ergebnis q) – die zugehörige Schwerpunkthöhe ist $h_q = y/2$ – oder auf einer der rechteckigen

Seiten $x \cdot y$ (Ergebnis r), davon gibt es vier – die zugehörige Schwerpunkthöhe ist $h_r = x/2$. Wenn man hier den Ansatz einer Gibbs-Verteilung macht, reduziert sich die Maximum-Likelihood-Schätzung von β auf die Lösung des folgenden Gleichungssystems

$$p_q = c \cdot e^{-\beta \cdot h_q} = \frac{1}{2} f_q \quad \text{und}$$

$$p_r = c \cdot e^{-\beta \cdot h_r} = \frac{1}{4} f_r.$$

Dabei sind f_q und f_r die relativen Häufigkeiten der beiden möglichen Lagen. Man erhält

$$\beta = - \frac{\ln\left(\frac{f_r}{2f_q}\right)}{f_q - f_r}. \tag{3}$$

Bei dieser Wahl von β stimmen die Wahrscheinlichkeiten mit den relativen Häufigkeiten überein. Tabelle 6 enthält die Versuchsergebnisse von BUDDEN und HEILBRONNER und die gemäß (3) geschätzten Gibbs-Parameter β . Das Ergebnis ist sehr befriedigend: Entsprechend der Annahme gleicher Versuchsbedingungen sind die β -Werte sehr ähnlich. Die beobachteten Schwankungen sind bei den benutzten Stichprobenumfängen nicht ungewöhnlich (Tab. 6).

y	x	hq	hr	n	fr	fq	β	σ
budden-non-cubical-dice (1980)								
0.71	1.4	0.355	0.75	332	8 %	92 %	8.7	0.9
0.95	1.4	0.475	0.75	840	26 %	74 %	7.7	0.6
1.12	1.4	0.56	0.75	799	45 %	55 %	6.1	1.0
1.215	1.4	0.6075	0.75	740	50 %	50 %	6.3	1.2
1.395	1.4	0.6975	0.75	516	60 %	40 %	7.6	4.2
1.45	1.4	0.725	0.75	530	62 %	38 %	12.7	8.8
1.74	1.4	0.87	0.75	1011	85 %	15 %	13.2	2.1
1.845	1.4	0.9225	0.75	532	85 %	15 %	9.0	2.2
2.16	1.4	1.08	0.75	654	95 %	5 %	10.8	1.7
2.325	1.4	1.1625	0.75	606	96 %	4 %	10.0	1.9
2.4	1.4	1.2	0.75	702	98 %	2 %	12.5	1.9
2.56	1.4	1.28	0.75	609	97 %	3 %	8.9	1.6
2.8	1.4	1.4	0.75	680	99 %	1 %	10.9	2.4
3.175	1.4	1.5875	0.75	275	99 %	1 %	9.3	2.7
3.97	1.4	1.985	0.75	503	99 %	1 %	7.1	1.9
heilbronner-crooked-dice (1985)								
0.5	2.5	0.25	1.25	2145	3 %	97 %	6.30	0.4
1	2.5	0.5	1.25	2184	12 %	88 %	6.67	0.3
1.5	2.5	0.75	1.25	2103	26 %	74 %	7.36	0.4
2	2.5	1	1.25	2238	44 %	56 %	8.52	0.7
2.5	2.5	1.25	1.25					
3	2.5	1.5	1.25	2202	81 %	19 %	7.96	0.9
3.5	2.5	1.75	1.25	2259	89 %	11 %	8.06	0.7
4	2.5	2	1.25	2250	93 %	7 %	7.26	0.5

Tab. 6. Die Ergebnisse der Würfelversuche von BUDDEN und HEILBRONNER

Die erste Spalte enthält die variable Höhe y des Quaders, die zweite Spalte die (jeweils konstante) Seitenlänge x der quadratischen Grundfläche. Es folgen die Schwerpunkthöhen der beiden Lagen, der Stichprobenumfang, die relativen Häufigkeiten, die geschätzten Gibbs-Parameter β und die (in einer Simulation ermittelte) Standardabweichung σ der Schätzungen.

Um diese Aussage für jedermann überprüfbar zu machen und auf Quader zu übertragen, »würfelten« wir mit OBRESCHKOWs Simulationsprogramm 14 Quader mit der Grundfläche $2,0 \times 2,3 \text{ cm}^2$ und variabler Höhe zwischen $0,5 \text{ cm}$ und 7 cm jeweils ca. 2500-mal mit den in Tabelle 7 angegebenen Energieparametern. Wenn man diese 14 Versuche zu einem Gesamtversuch (mit $n = 34.652$ Würfeln) zusammenfasst, kann man ein Gesamt- β schätzen. Es hat den Wert $19,4$. Um diesen Wert schwanken die β -Werte von Tabelle 7, ohne dass eine Tendenz zu erkennen wäre. Nach unserer Theorie wäre ein einheitlicher Wert zu erwarten gewesen. Wir sehen diese näherungsweise Konstanz als sehr befriedigende Bestätigung des Gibbs-Ansatzes an.

In Abbildung 6 sind die Wahrscheinlichkeiten (durchgezogene Linien) nach dem Gibbs-Ansatz mit $\beta = 19,4$ und die relativen Häufigkeiten (Punkte) für die drei Seitenpaare der Quader aus Tabelle 7 dargestellt.

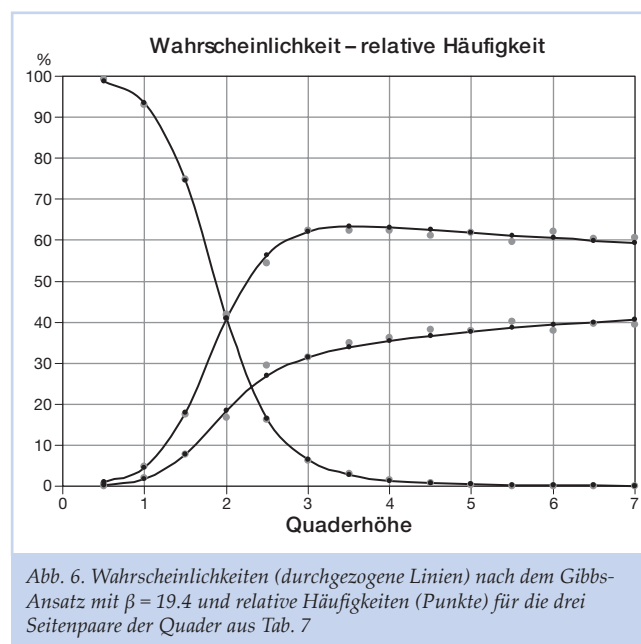


Abb. 6. Wahrscheinlichkeiten (durchgezogene Linien) nach dem Gibbs-Ansatz mit $\beta = 19,4$ und relative Häufigkeiten (Punkte) für die drei Seitenpaare der Quader aus Tab. 7

7 Anwendungen

7.1 Warum man in der Schule mit Quadern würfelt

Oft werden in der Schule Wahrscheinlichkeiten nur im Zusammenhang mit dem Laplace-Modell eingeführt. Man diskutiert nur ideale Würfel, Münzen oder Glücksräder, wobei viele Lehrer dabei gar nicht experimentieren lassen. So entsteht bei den Schülern schnell der Eindruck, man könne Wahrscheinlichkeiten durch geschickte Abzählverfahren stets genau berechnen. Es verschwindet der Gedanke, dass viele Wahrscheinlichkeiten nur statistisch, durch relative Häufigkeiten geschätzt werden können und hypothetischen Charakter haben. Experimente mit Reißzwecken, Schweinewürfeln oder Asragali laden dazu ein, Wahrscheinlichkeiten so zu schätzen, dass sie mit den relativen Häufigkeiten numerisch zusammen-

Epot	Etra	Erot	x	y	z	n	1	2	3	4	5	6	β	σ	t
1000	100	100	0,5	2	2,3	2477	6	0	1223	1238	1	9	21,6	0,9	4,1
1000	100	100	1	2	2,3	2475	58	28	1188	1116	24	61	18,9	0,5	2,8
1000	100	100	1,5	2	2,3	2475	227	101	924	925	93	205	19,4	0,4	1,9
1000	100	100	2	2	2,3	2475	521	202	528	507	210	507	22,3	1,1	0,8
1000	100	100	2,5	2	2,3	2476	696	331	199	204	397	649	18,1	0,8	13,1
1000	100	100	3	2	2,3	2476	789	378	82	72	402	753	19,6	0,6	2,3
1000	100	100	3,5	2	2,3	2475	766	420	42	30	442	775	18,7	0,7	3,0
1000	100	100	4	2	2,3	2475	785	444	16	20	454	756	18,7	0,7	1,3
1000	100	100	4,5	2	2,3	2475	767	474	12	6	468	748	18,5	0,8	3,3
1000	100	100	5	2	2,3	2475	742	488	0	6	452	787	19,7	0,9	8,1
1000	100	100	5,5	2	2,3	2474	751	494	2	1	502	724	19,0	1,1	5,7
1000	100	100	6	2	2,3	2475	820	476	0	1	461	717	22,7	1,5	8,1
1000	100	100	6,5	2	2,3	2475	758	505	0	0	479	733	21,1	1,3	3,5
1000	100	100	7	2	2,3	2475	757	493	1	0	483	741	21,6	1,7	1,1

Tab. 7. Simulation von 14 Quadern mit gleicher Grundfläche und wachsender Höhe. Der Gibbs-Parameter β pendelt um 19,4

fallen. Das erschwert die Begriffsbildung. Viel besser sind Quader geeignet. Hier gibt es den idealen Würfel als Vergleichsobjekt, und es gibt Teilsymmetrien, die garantieren, dass gewisse Wahrscheinlichkeiten gleich sind. Die Schüler sind hier gern bereit, Hypothesen über die sechs Wahrscheinlichkeiten der Quaderseiten aufzustellen. Verschiedene Schüler schätzen ähnlich, aber dennoch unterschiedlich, und es ergeben sich Diskussionen, wie sie für die Genese eines tragfähigen Wahrscheinlichkeitsbegriffs fruchtbarer nicht sein könnten. Durch Experimente werden die Schüler gezwungen, ursprüngliche Hypothesen zu verwerfen, wie z. B. die der Proportionalität der Wahrscheinlichkeiten zu den Seitenflächen. Und schon ist man mitten in der beurteilenden Statistik, wo Hypothesen getestet werden.

Um diese Möglichkeiten auch im Unterricht schon in der Klasse 7 zu nutzen, sägte der erstgenannte Autor in den 1980er Jahren aus Bilderrahmenleisten Tausende der teilsymmetrischen Objekte aus den Abbildungen 1 und 2, die dann als »Riemerwürfel« (RIEMER, 1988) in die Didaktik der Stochastik eingingen und auch heute noch vertrieben werden (*www.riemer-koeln.de*; KOEPEL, 2008; HENN & BÜCHTER, 2008).

Dass man mit diesen Objekten auf experimentelle Weise hervorragend in die klassische beurteilende und sogar in die Bayes'sche Statistik einsteigen kann, wird in RIEMER (1991) ausgeführt.

7.2 Haufwerke

Noch viel komplizierter als das »Würfeln« mit normalen und gezinkten Quadern ist die Bildung und Struktur von Haufwerken. Die Abbildungen 7a), b) zeigen solche Haufwerke, wobei die aus Ziegelsteinen und Braunkohlenbriketts noch einigermaßen übersichtlich sind, dank der gleichen Größe und Form der aufgehäuften Objekte.

Man hat hier sogar den Eindruck, dass die Objekte etwa in derjenigen Häufigkeit ihre Breitseite zeigen, die sich auch bei einem Würfelexperiment ergeben würde. Aber eine mathematische Modellierung der hier auftretenden »Sedimentation« muss wohl heutzutage noch als kaum durchführbar angesehen werden, weil die Objekte in Schwärmen auftreten und sich beim Sedimentieren gegenseitig beeinflussen. Selbstverständlich spielt die Form der Objekte eine große Rolle, ebenso die



Abb. 7. Haufwerke aus Ziegelsteinen und Briketts

physikalischen Bedingungen beim Sedimentieren, angefangen mit dem Gewicht der Objekte.

Es gibt Computer-Programme, die das Sedimentieren von einzeln fallenden Kugeln simulieren und erste Ansätze für polyedrische Objekte. Dabei sind Sedimentationsprozesse mit Partikeln ungeheuer wichtig. Ein großer Teil der Energie, die der Menschheit zur Verfügung steht, wird zum Zerkleinern von Objekten und zum Klassieren der dabei entstehenden Partikel eingesetzt. Die mechanische Verfahrenstechnik und das Chemieingenieurwesen untersuchen intensiv solche Partikelprozesse, wobei die Partikelgrößen oft im Mikrometerbereich liegen. Ein gewaltiges Theoriegebäude existiert (SCHUBERT, 2003), aber man ist noch weit von einem vollständigen Verständnis der ingenieurmäßig recht gut beherrschten Prozesse entfernt. Natürlich weiß man, dass z. B. die Turbulenz eine große Rolle spielt und dass die Partikelform und -größe die Geschwindigkeit im Reaktionsraum beeinflusst.

Beispiele für Haufwerke in der Makroskala findet man z. B. in Steinbrüchen (Abb. 9). Durch eine Sprengung entsteht dort ein Haufwerk von Steinen, die offensichtlich zufällig aufgehäuft sind. Freiburger Wissenschaftler versuchten in der 1980er Jahren, aus fotogrammetrischen Aufnahmen solcher Haufwerke mittels digitaler Bildanalyse Korngrößenverteilungen im Sinne der Siebanalyse zu ermitteln (MENZ & OHSER, 1987). Das gelang in für die Praxis ausreichendem Maße, aber die zufällige Lagerung der Steine auf der sichtbaren Seite des Haufwerks



Abb. 8. Steinbruch

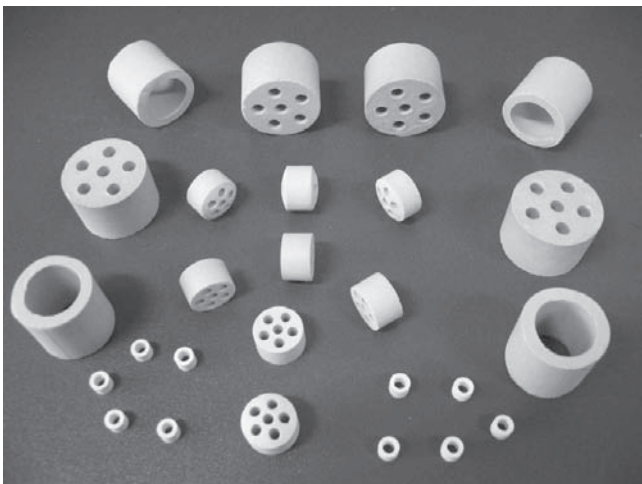


Abb. 9. Raschigringe (Dr. SOBOL)

blieb weitgehend unberücksichtigt. Es gibt moderne Software, die Ähnliches leistet, z. B. SPLIT.

Regellose Haufwerke findet man auch in zahlreichen industriellen Anlagen, z. B. in der chemischen Industrie und der Erdölverarbeitung. In zylinderförmige Apparate (Fachjargon Kolonnen), deren Höhe meist ein Vielfaches des Durchmessers beträgt, werden Hohlzylinder – so genannte Füllkörper – hinein geschüttet, die dort eine regellose Schüttung bilden. Das technologische Ziel besteht darin, eine Flüssigkeit und eine gas- bzw. dampfförmige Phase, die sich im Gegenstrom durch den Apparat bewegen (Flüssigkeit von oben nach unten, Gas bzw. Dampf von unten nach oben), an der Grenzfläche zwischen beiden Phasen in einen möglichst innigen Kontakt zu bringen und dadurch einen zwischen beiden Phasen angestrebten Stoff- oder Wärmetransport so effizient wie möglich zu gestalten.

Ein Beispiel für einen solchen oben erwähnten Füllkörper ist der Raschig-Ring (Abb. 9), benannt nach seinem Erfinder FRIEDRICH AUGUST RASCHIG (1863–1918), Patentanmeldung 1914. Es ist ein Hohlzylinder, dessen Höhe gleich seinem Außendurchmesser ist und der, je nach Anforderungen, aus den unterschiedlichsten Materialien (verschiedene Kunststoffe, Metall, Steinzeug, Porzellan, Kohlenstoff) sehr wirtschaftlich hergestellt werden kann. In Abhängigkeit vom Material, dessen Auswahl im Wesentlichen nach wirtschaftlichen Aspekten und den Anforderungen an die Beständigkeit gegenüber den strömenden Phasen erfolgt, können Raschig-Ringe dünnwandig (Kunststoffe, Metall) oder dickwandig (Glas, Porzellan, Steinzeug) sein.

Als allererster Schritt für eine Modellierung von Füllkörperschüttungen, also Haufwerken aus solchen Raschig-Ringen, wurde durch KHOKHLOV (2001) die Häufigkeit untersucht, mit der bei Fallversuchen in Röhren mit Durchmessern von 10 cm und 50 cm Ringe (Raschig-Ringe aus Glas, Außendurchmesser/Höhe/Wanddicke: 20/20/2,5 mm) auf der flachen oder runden Seite landen. Dabei wurden die Fallhöhen variiert (50 cm und 100 cm), ebenso die Startpositionen (Ringachse parallel oder senkrecht zur Rohrachse, »Abwurf« in Wandnähe oder in der Rohrmitte) und schließlich auch das Medium, in welchem die Füllkörper ihre Fallstrecke zurücklegten (Wasser oder Luft). Neben einzelnen Raschig-Ringen wurden auch Fallversuche mit Kollektiven von 2 bis zu 10 Ringen durchgeführt.

Es ergaben sich für den Fall eines Abwurfs mit Ringachse senkrecht zur Rohrachse für alle Fälle relative Häufigkeiten um 0,75, die geringen Unterschiede sind nicht signifikant. Anders war es bei einem Start, wo Ring- und Rohrachse parallel waren. Hier ergaben sich starke Unterschiede zwischen Wasser und Luft. Beim Fall durch Luft ergaben sich wieder Werte um 0,75, während beim Fall durch Wasser offenbar Turbulenz zu wirken beginnt. Hier sind die relativen Häufigkeiten 0,04 bei einer Fallhöhe von 50 cm und 0,29 bei 1 m. Man erkennt, dass hier die Schwerpunktenergie, die bei Quadern so erfolgreich ist, nicht angemessen sein kann – denn beide Lagen der Ringe haben die gleiche Schwerpunkthöhe. Aber das Thema des vorliegenden Aufsatzes war ja »nur« das Würfel mit Quadern. ...

Danksagung

Wir danken DAGMAR JÄGER, KATRIN KIRCHNER, ANDREA CARDUCK und ihren Schülerinnen der Klasse 7, Ursulinen-Gymnasium Köln, für die Sorgfalt beim Würfel mit Quadern auf Stahlfußböden und Teppichen. Ferner danken wir Herrn Professor GERT GRABBERT (Freiberg) für seine Hilfe bei der Formulierung des verfahrenstechnischen Teils des Artikels.

Literatur¹

- BUDDEN, F. (1980). Throwing Non-Cubical Dice. – *The Mathematical Gazette*, 64(429), 196–198.
- DINGES, H. & ROST, H. (1982). *Prinzipien der Stochastik*. Stuttgart: Teubner.
- FELDBERG, R. et al. (1990). Iterated-map approach to die tossing. *Physical Review*, A 42, 4493–4502.
- HENN, W. & BÜCHTER A. (Hg) (2008). *Der Mathekoffer*. Seelze: Friedrich Verlag.
- HEILBRONNER, E. (1984-85). Crooked Dice. *J. Recreational Mathematics*, 17, 177.
- INEICHEN, R. (1988). Warten auf Erfolg. *Didaktik der Mathematik*, 4, 241–246.
- KOEPSSEL, A. (2008). *Die Wahrscheinlichkeitsbox*. Seelze: Friedrich Verlag.
- KHOKHLOV, M. (2001). *Die lokale Porositätsverteilung in Füllkörperschüttungen und ihre Auswirkung auf den Gegenstrom von Flüssigkeit und Gas*. Dissertation TU Bergakademie Freiberg.
- MENZ, J. & OHSER, J. (1987). Automatisierte fotografische Haufwerkanalyse. *Freiberger Forschungshefte*, A, 741.
- OBRESCHKOW, D. (2010). Broken Symmetry and the Magic of Irregular Dice. – Das Simulationsprogramm ist frei erhältlich unter <http://www.physics.ox.ac.uk/cm/cmt/cuboid/index.htm>. (08.12.2010)
- RIEMER, W. (1988). *Riemer-Würfel*. Stuttgart: Klett-Verlag, 1988. www.riemer-koeln.de.
- RIEMER, W. (1985). *Neue Ideen zur Stochastik*. Mannheim, Wien, Zürich: Bibliographisches Institut.
- RIEMER, W. (1991). *Stochastische Probleme aus elementarer Sicht*. Mannheim, Wien, Zürich: Bibliographisches Institut.
- SCHUBERT, H. (2003). *Handbuch der mechanischen Verfahrenstechnik*. Weinheim: Wiley-VCH.
- SINGMASTER, D. (1981): Theoretical Probabilities for a Cubical Die. *The Mathematical Gazette*, Vol. 65, No. 433, 208–210.
- STANICZENKO, P. (2010). Broken Symmetry and the Magic of Irregular Dice. http://www.physics.ox.ac.uk/Users/Staniczenko/Phillip_Staniczenko_Website/MPhys_-_Cuboid.html (08.12.2010)
- StD Dr. WOLFGANG RIEMER, w.riemer@arcor.de, August-Bebel-Str. 80, D-50259 Pulheim und Prof. Dr. DIETRICH STOYAN, stoyan@math.tu-freiberg.de, Institut für Stochastik TU Bergakademie Freiberg, D-09596 Freiberg.

¹ Kopien der Artikel, das Simulationsprogramm (OBRESCHKOW, 2010), die homogenen und gezinkten Quader und die Maximum-Likelihood/Chi-Quadrat-Minimum-Auswertungsvorlage können bei den Autoren angefordert werden. ■