Der Regierungspräsident
Dezernat 45

Köln
Düsseldorf

Unterregionalisierte Lehrerfortbildung
Mathematik 31.475.14

Einführung in die Stochastik

Jahrgangstufe 9 - 10

HANDREICHUNGEN ZUR UMSETZUNG DES NEUEN LEHRPLANS MATHEMATIK FÜR DIE SEKUNDARSTUFE I IN ANLEHNUNG AN DAS KONZEPT VON DR. WOLFGANG RIEMER, KÖLN

Erstellt von der Arbeitsgruppe **Stochastik**:

Hans Beinghaus, Gummersbach
Norbert Billstein, Jülich
Wolfgang van Briel, Kleve
Alexandra Dreiseidler, Bonn
Rolf Mantyk, Mettmann
Günter Seebach, Siegburg

Januar 1994

INHALTSVERZEICHNIS

Vorbemerkungen

Die Erfahrungen der Schülerinnen und Schüler im Umgang mit dem *Wahrscheinlichkeitsbegriff* während der Jahrgangsstufen 7 und 8 sollten durchaus als Basis für die im folgenden vorgestellten Überlegungen zur Einführung in *Das Rechnen mit bedingten Wahrscheinlichkeiten* verwendet werden.
Es empfiehlt sich jedoch, die Pfadregel zu wiederholen; und zwar unter Bezug auf absolute Häufigkeiten. Bei dieser Gelegenheit kann dann zusätzlich verdeutlich werden, daß es sich (in der 2. Stufe) um bedingte Wahrscheinlichkeiten handelt. Die Frage nach einer Änderung der Reihenfolge der Teilexperimente führt dann inhaltlich zur BAYESschen Regel. Diese kann mit den nun zur Verfügung stehenden Mitteln ohne zusätzlichen Begriffsaufwand entwickelt werden. Eine kurze Wiederholung zum Thema Prozentrechnung ist ebenfalls sehr nützlich.

Als Ausgangsexperiment, welches zunächst nur zur Motivation dienen soll, werden rote bzw. weiße Glasmurmeln aus drei gleichfarbigen Socken gezogen. In Socke1 befinden sich 4 **w** und keine **r**. In Socke2 hat man 3 **w** und 1 **r** und in Socke3 schließlich 1 **w** und 3 **r**. Zuerst wird eine Socke zufällig ausgewählt. Die Wahrscheinlichkeit Socke1, -2 oder -3 zu ziehen beträgt dann 1/3 bzw. 33,33% (auf 4 signifikante Stellen gerundet). Anschließend wird aus dieser Socke nacheinander mit Zurücklegen jeweils eine Murmel gezogen. Entsprechend dieser Versuchsausfälle soll dann die Wahrscheinlichkeit für das Vorliegen einer der 3 gegebenen Socken geschätzt werden.

Nachdem die Schülerinnen und Schüler über den Inhalt der Socken informiert worden sind, wählt man selbst eine Socke aus und läßt anschließend Schülerinnen bzw. Schüler hieraus mit Zurücklegen jeweils eine Kugel ziehen. Es ist dabei sehr zweckdienlich, mit Socke2 zu beginnen, da das Experiment von der Spannung lebt, durch Ziehen von weißen Murmeln die Wahrscheinlichkeit für Socke2 und Socke3 immer weiter zu reduzieren. Je später die rote Kugel gezogen wird, als desto dramatischer wird der Einbruch empfunden, der mit dem Auftauchen einer roten Kugel entsteht.

Schätzen von Wahrscheinlichkeiten

Im einzelnen ergeben sich folgende Ziehungen und Schätzungen der Schülerinnen und Schüler für die Wahrscheinlichkeiten.

Nr.	Ausfall	P für Socke1	P für Socke2	P für Socke3
1.	w	25%	20%	10%
2.	w	60%	25%	15%
3.	w	70%	20%	10%
4.	w	80%	15%	5%
5.	r	0%	80%	20%
6.	w	0%	90%	10%

Nach dem 1. Zug muß nochmals erörtert werden, daß die Summe der 3 Wahrscheinlichkeiten 100% ergeben muß. Die Enttäuschung nach dem 5. Zug ist deutlich spürbar. Die Klasse hatte sich intuitiv auf Socke1 festgelegt.

> ***Die Wahrscheinlichkeit für die vorliegende Socke muß in diesem Experiment aufgrund fortschreitender neuer Erkenntnisse jeweils intuitiv geschätzt werden. Sie läßt sich beim momentanen Erkenntnisstand nicht berechnen.***

Die Schülerinnen und Schüler können sich nicht vorstellen, daß dieser Prozeß des Schätzens von Wahrscheinlichkeiten im wesentlichen durch eine entsprechende, noch unbekannte Rechenmethode nachvollzogen werden kann. Das bedeutet aber außerdem:

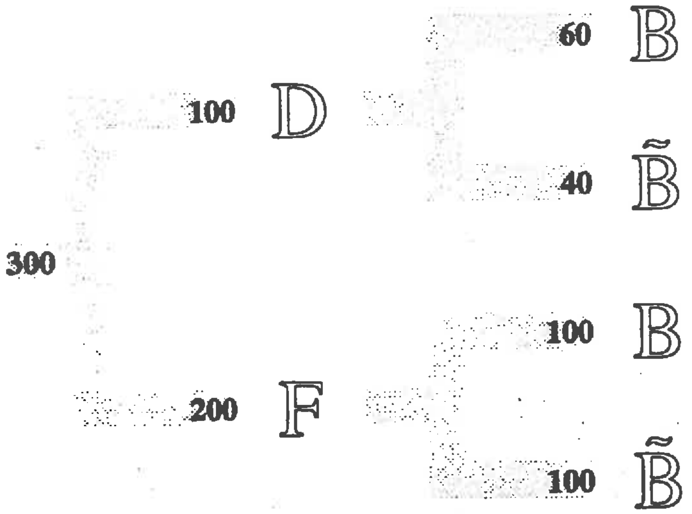
> ***Unsere Intuition ist in der Lage, bestimmte mathematische Probleme, für die keine Rechenmethode bekannt ist, sehr zufriedenstellend zu lösen.***

2x2-Baumdiagramm, Beschreiben und Berechnen von Ausfällen

Folgende Aufgabe wird vorgestellt:

> ***Im Rahmen des deutsch-französischen Jugendwerkes befinden sich in einem Zeltlager in Südfrankreich 300 Jugendliche; und zwar 100 Deutsche und 200 Franzosen. Unter den Deutschen befinden sich 60 Blonde, bei den Franzosen gibt es 100 mit blonder Haarfarbe. Verdeutliche den gegebenen Sachverhalt in einem entsprechenden Baum!***

Die Schülerinnen und Schüler erhalten den Auftrag, einen 2x2-Baum mit 4 jeweils 2cm breiten Spalten ins Heft zu zeichnen (DIN A4, Querformat) und die Informationen aus der Aufgabe einzutragen. Die Ergebnisse werden in einem Tafelbild festgehalten. Hier ein Auszug: (Die Anzahlen werden direkt an den Knoten der Äste notiert!)



Ausfall	Anzahl	P
DB	60	$\frac{60}{300}$
D$\tilde{B}$	40	$\frac{40}{300}$
FB	100	$\frac{100}{300}$
F$\tilde{B}$	100	$\frac{100}{300}$
Summe:	300	$\frac{300}{300}$

Beim Ausfüllen der 1. Spalte des Baumes wird nachdrücklich auf die Bedeutung von **DB**, **D$\bar{B}$**, **FB** und **F$\bar{B}$** als „deutsch und blond", „deutsch und nicht blond", „französisch und blond" und „französisch und nicht blond" hingewiesen. Der Inhalt der 2. Spalte ergibt sich leicht.

Aus der Menge aller Jugendlichen wird zum Beispiel ein nichtblonder Franzose ausgewählt. Dafür gibt es 100 günstige Fälle bzw. 300 Fälle insgesamt, was eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{100}{300}$ *liefert.*

Die verbleibenden Fälle werden ebenfalls verbalisiert und danach als Ergebnis in die 3. Spalte des Baumes eingetragen. Parallel hierzu wird zum Beispiel auf die Schreibweise P(DB) = 60/300 hingewiesen.

Die Frage nach einer Wahrscheinlichkeit unter bestimmten Bedingungen wird in der folgenden Form zum 1. Mal gestellt:

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit einen Nichtblonden zu treffen, wenn ich einen Deutschen vor mir habe; d.h. wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für »Nichtblond« unter der Voraussetzung, daß die Bedingung »Deutsch« gegeben ist? $P_D(\bar{B})$

Wieder kommt der Ansatz *Anzahl der günstigen Fälle / Anzahl aller möglichen Fälle* zum Tragen, und es ist möglich, die Äste für den 2. Zug mit ihren Auftrittswahrscheinlichkeiten zu versehen. Die Wahrscheinlichkeiten für den 1. Zug ergeben sich leicht.

Offenbar besteht die Möglichkeit, die Fragestellung sinnvollerweise umzukehren, das bedeutet auf den Baum bezogen, **„im Baum rückwärts zu lesen"**:

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit einen Deutschen zu treffen, wenn ich einen Nichtblonden vor mir habe; d.h. wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für »Deutsch« unter der Voraussetzung, daß die Bedingung »Nichtblond« gegeben ist? $P_{\bar{B}}(D)$

Das Verhältnis der Anzahl der günstigen zur Anzahl aller Fälle liefert in diesem Zusammenhang u.a.:

$P_B(D) = \frac{60}{60+100} = \frac{60}{160}$	$P_B(F) = \frac{100}{60+100} = \frac{100}{160}$	$P_{\bar{B}}(F) = \frac{100}{40+100} = \frac{100}{140}$

Diese Ergebnisse lassen sich im vorliegenden Baum nicht notieren. Später werden Möglichkeiten vorgestellt, um auch diese Rechnung graphisch zu unterstützen.

Übergang zum Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten

Die Produkte entlang eines Pfades werden berechnet. Der Vergleich mit den Ergebnissen aus der 3. Spalte bestätigt die Gültigkeit der 1. Pfadregel. So ergibt sich zum Beispiel für die 1. und 3. Zeile:

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}=\frac{3}{15}=\frac{6}{30} \quad \text{und} \quad \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{2}{6}=\frac{10}{30}\,.$$

Schließlich wird zur selben Aufgabe ein neuer Baum gezeichnet bzw. der gegebene ergänzt. Der Baum enthält nun 3 bzw. 5 Spalten und an den Ästen stehen zusätzlich die Wahrscheinlichkeiten als gekürzte Brüche. Mit Hilfe der 1. Pfadregel werden die Wahrscheinlichkeiten für die 2. bzw. 4. Spalte berechnet und notiert. Die letzte Spalte bietet dasselbe, jedoch mit gemeinsamem Nenner:

							Ausfall	P	P
300	1/3	100	D	3/5	60	B	DB	$\frac{3}{15}$	$\frac{6}{30}$
				2/5	40	$\tilde{B}$	D$\tilde{B}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{30}$
	2/3	200	F	1/2	100	B	FB	$\frac{2}{6}$	$\frac{10}{30}$
				1/2	100	$\tilde{B}$	F$\tilde{B}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{10}{30}$
							Summe:	$\frac{30}{30}$	$\frac{30}{30}$

Die mit Hilfe der Anzahlen berechneten bedingten Wahrscheinlichkeiten beim **„Rückwärts-Lesen-im-Baum"** sollen nun mit Hilfe von Wahrscheinlichkeiten ausgedrückt werden. Hierzu überlegt man sich, daß die jeweiligen Anzahlen als Produkt der Grundanzahl mit der Wahrscheinlichkeit für den betreffenden Pfad ermittelt werden können und erhält z.B.:

$$\boxed{P_B(D)=\frac{60}{60+100}=\frac{300\cdot\frac{6}{30}}{300\cdot\frac{6}{30}+300\cdot\frac{10}{30}}=\frac{300\cdot\frac{6}{30}}{300\cdot\left(\frac{6}{30}+\frac{10}{30}\right)}=\frac{\frac{6}{30}}{\frac{6}{30}+\frac{10}{30}}=\frac{6}{16}}$$

Somit können im gegebenen Baum auch ohne Kenntnis der Anzahlen die gesuchten Wahrscheinlichkeiten berechnet werden. Bei den bedingten Wahrscheinlichkeiten, wo der Baum rückwärts gelesen werden muß, ist folgender Merksatz sehr hilfreich:

> *Der Zähler besteht aus der Wahrscheinlichkeit für einen <u>speziellen</u> Weg zum »Indiz«. Der Nenner ergibt sich aus der Summe der Wahrscheinlichkeiten <u>sämtlicher</u> Wege zum »Indiz«.*

Der bis hierher vorgestellte Zugang für das „**Rückwärts-Lesen-im Baum**" hat sich für die Schülerinnen und Schüler als eine durchaus brauchbare Basis für das weitere Vorgehen erwiesen. Inwieweit die nachfolgende Darstellung eines **neuen Baumes** den Schülerinnen und Schülern zusätzlich zur Verfügung gestellt wird, sollte deshalb im Einzelfall entschieden werden. Ansonsten kann direkt mit dem Kapitel *Vertiefen der neuen Erkenntnisse* fortgefahren werden.

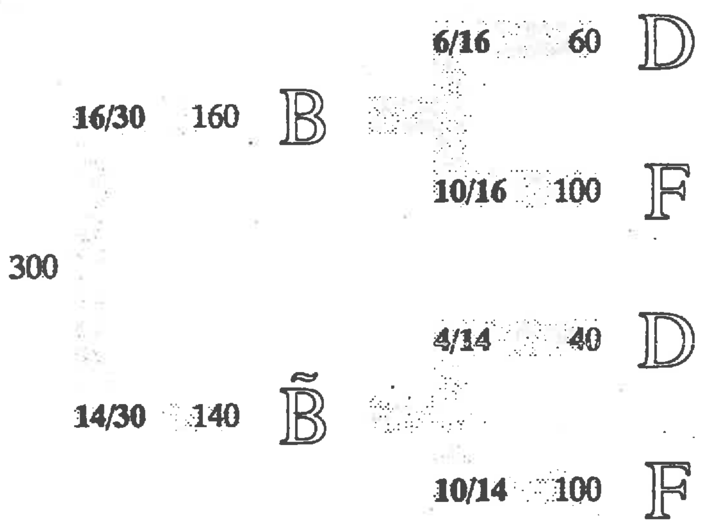
Das „**Rückwärts-Lesen-im Baum**" kann auch durch die Zeichnung eines **neuen Baumes** verdeutlicht werden. Man kann sich z.B. vorstellen, daß hier ein 2stufiger Zufallsversuch vorliegt:

1. *Auswählen der Nation*
2. *Unterscheiden eines Teilnehmers nach der Haarfarbe*

Es besteht nun die Möglichkeit, die Reihenfolge dieser Teilversuche umzukehren:

1. *Unterscheiden eines Teilnehmers nach der Haarfarbe*
2. *Zuordnen der Nation.*

In diesem Falle ändert sich dann auch das Baumdiagramm:



Ausfall	Anzahl	P
BD	60	$\frac{60}{300}$
BF	100	$\frac{100}{300}$
$\tilde{B}$D	40	$\frac{40}{300}$
$\tilde{B}$F	100	$\frac{100}{300}$
Summe:	300	$\frac{300}{300}$

Die (bedingten) Wahrscheinlichkeiten für den 2. Zug entsprechen nun den zuvor durch

„Rückwärts-Lesen" berechneten Wahrscheinlichkeiten. An den Knoten stehen wie üblich die jeweiligen Anzahlen. Eine mögliche Vertiefung dieser Darstellung findet sich im Kapitel *Alternative Rechenwege* auf Seite 13.

Vertiefung der neuen Erkenntnisse

Einige leistungsstärkere Schülerinnen und Schüler zeigen bereits nach diesem ersten Beispiel einen recht sicheren Umgang mit den terminologischen und logischen Besonderheiten. Ähnliche Beispiele und Aufgaben sollen nun den Umgang mit *bedingten Wahrscheinlichkeiten* auf eine breitere Basis stellen. Hierbei muß in jeder Aufgabe der Gesamtzusammenhang sprachlich beschrieben werden. Nur dadurch läßt sich verhindern, daß sich die leistungsschwächeren Schülerinnen und Schüler an einem puren Formalismus orientieren, was die gesamte Unterrichtssequenz ad absurdum führen würde; denn damit wäre das erreichte Lernziel nichts anderes als ein Anwenden der Bruchrechenregeln.

Im folgenden Beispiel wird völlig analog zur *Zeltlager*-Aufgabe vorgegangen. Die Schülerinnen und Schüler erhalten den Auftrag, den entsprechenden Baum inklusive der ersten 3 Spalten zu zeichnen. Anschließend trägt eine Schülerin das Ergebnis an der Tafel vor.

> *Es werden 4 Tüten mit schwarzen und weißen Kugeln gefüllt:*
> *Tüte 1: 3 schwarze und 9 weiße,*
> *Tüte 2: 5 schwarze und 7 weiße,*
> *Tüte 3: 8 schwarze und 4 weiße,*
> *Tüte 4: 12 schwarze und 0 weiße.*
> *Eine Tüte wird ausgewählt, hieraus eine Kugel entnommen und deren Farbe festgestellt.*

Beim 1. Zug für die Tüte wird jeweils 12 für die Anzahl aller Kugeln, beim 2. Zug für die Farbe wird jeweils 3 (für schwarz), 9 (für weiß), ... und 12 (für schwarz), 0 (für weiß) an den Knoten der ensprechenden Äste notiert.

In der 1. Spalte erhalten wir die Beschreibungen für die Ausfälle: **T1s**, **T1w**, ... , **T4s**, **T4w**. Diese Ausfälle werden insgesamt sprachlich beschrieben: *Die Kugel stammt aus Tüte 1 und ist schwarz ... usw.* In der 2. Spalte werden wie üblich die Anzahlen notiert: 3, 9, ..., 12, 0.

In der 3. Spalte werden anhand der vorliegenden Anzahlen die Auftrittswahrscheinlichkeiten notiert: 3/48, 9/48, ... , 12/48, 0/48.

Für den 2. Zug wird die Notation und Sprechweise für bedingte Wahrscheinlichkeiten geübt: *Die Wahrscheinlichkeit eine schwarze Kugel zu ziehen, unter der Voraussetzung, daß die Tüte 1 vorliegt, beträgt 3/12.* $P_{T1}(s) = 3/12$. Diese Wahrscheinlichkeiten werden jeweils an dem entprechenden Ast notiert.

Für den 1. Zug wird an den Ästen jeweils die Wahrscheinlichkeit 1/4 notiert. (Dabei muß sich diese Ausgangswahrscheinlichkeit nicht unbedingt ihm Rahmen eines Experimentes ergeben, vielmehr kann sie selbst bereits prognostischen Charakter besitzen und *subjektiven Voreinstellungen* entsprechen.)

Das Produkt entlang der jeweiligen Pfade liefert <u>ebenfalls</u> die bereits in der 3. Spalte notierten Auftrittswahrscheinlichkeiten.
Nachdem die ***konventionelle*** Blickrichtung von links nach rechts im vorliegenden Baum damit ausführlich analysiert worden ist, ändern wir abermals die Blickrichtung und beginnen **„im Baum rückwärts zu lesen"**:

> ***Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, Tüte1 in den Händen zu halten, unter der Voraussetzung, daß hier eine schwarze Kugel gezogen wurde? P_s (T1).***

$P_s(T1) = \dfrac{3}{3+5+8+12} = \dfrac{3}{28}$	$P_s(T1) = \dfrac{\frac{3}{48}}{\frac{3}{48}+\frac{5}{48}+\frac{8}{48}+\frac{12}{48}} = \dfrac{3}{28}$

Notationsschema für bedingte Wahrscheinlichkeiten

Wie oben bereits angedeutet, lassen sich die bedingten Wahrscheinlichkeiten bzgl. der umgekehrten Blickrichtung schlecht im vorliegenden Baum notieren. Um eine übersichtlichere Darstellung zu erhalten (und natürlich auch im Hinblick auf weitere Ziehungen), wird das folgende Schema vorgestellt und in fortwährendem Bezug zum vorliegenden Baum ausgefüllt.

Merkmale		T1	T2	T3	T4
schwarze Kugel	s	3	5	8	12
weiße Kugel	w	9	7	4	0
Summe:		12	12	12	12

☞	25%	25%	25%	25%	1/4	1/4	1/4	1/4
	1. Weg	*2. Weg*	*3. Weg*	*4. Weg*	3/12	5/12	8/12	12/12
	Indiz				3/48	5/48	8/48	12/48
	S				**Summe:**	$\frac{28}{48}$		

☞	11%	18%	29%	43%	3/28	5/28	8/28	12/28

Die Ökonomie und Übersichtlichkeit des Schemas ist für die Schülerinnen und Schüler nachvollziehbar. Mit Hilfe einer Folie wird jeder Eintrag direkt notiert und ausführlich besprochen.

Der *Wechsel der Blickrichtung* war das erste Problem im Zusammenhang mit bedingten Wahrscheinlichkeiten. Der sich nun anschließende Übergang von den sogenannten *a-posteriori-Wahrscheinlichkeiten* zu erneuten *a-priori-Wahrscheinlichkeiten* ist ein weiteres. Hier erinnern wir an das Einführungsbeispiel mit den Murmeln in den Socken:

> *Jede Ziehung hatte unsere »gefühlsmäßige« Einstellung zu der Frage, aus welcher Socke die erneut gezogene Kugel nun stamme, verändert. Dabei wurde die bisherige (Ein-)Schätzung jeweils zum Ausgangspunkt für die darauf folgende.*

Dieser Ansatz läßt sich auf das Schema übertragen. Das Ergebnis der Berechung wird zum Ausgangspunkt für die anschließende Rechung gemacht.

> *Die berechnete Wahrscheinlichkeit ist jeweils die Arbeitsgrundlage (Hypothese) für die Berechung der neuen Wahrscheinlichkeit. Durch das jeweilige Experiment (1 Kugel ziehen), verändert sich die Wahrscheinlichkeit für eine bestimmte Tüte.*

Ablaufdiagramm für bedingte Wahrscheinlichkeiten

Wir machen die nach einer Ziehung berechneten Wahrscheinlichkeiten zur Grundlage für die Berechung weiterer Wahrscheinlichkeiten:

<table>
<tr><td>☞</td><td>11%</td><td>18%</td><td>29%</td><td>43%</td><td>3/28</td><td>5/28</td><td>8/28</td><td>12/28</td></tr>
<tr><td rowspan="3">2.</td><td>1. Weg</td><td>2. Weg</td><td>3. Weg</td><td>4. Weg</td><td>3/12</td><td>5/12</td><td>8/12</td><td>12/12</td></tr>
<tr><td colspan="4">Indiz</td><td>9/336</td><td>25/336</td><td>64/336</td><td>144/336</td></tr>
<tr><td colspan="4">S</td><td colspan="4">Summe: $\frac{242}{336}$</td></tr>
</table>

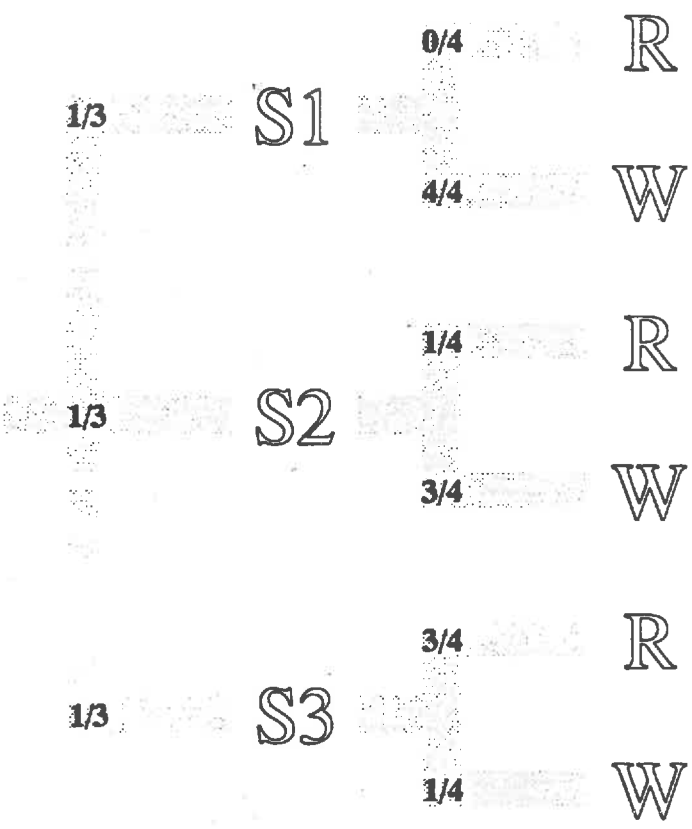
<table>
<tr><td>☞</td><td>4%</td><td>10%</td><td>26%</td><td>60%</td><td>9/242</td><td>25/242</td><td>64/242</td><td>144/242</td></tr>
<tr><td rowspan="3">3.</td><td>1. Weg</td><td>2. Weg</td><td>3. Weg</td><td>4. Weg</td><td>3/12</td><td>5/12</td><td>8/12</td><td>12/12</td></tr>
<tr><td colspan="4">Indiz</td><td>27/2904</td><td>125/2904</td><td>512/2904</td><td>1728/2904</td></tr>
<tr><td colspan="4">S</td><td colspan="4">Summe: $\frac{2392}{2904}$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>☞</td><td>1%</td><td>5%</td><td>21%</td><td>72%</td><td>27/2392</td><td>125/2392</td><td>512/2392</td><td>1728/2392</td></tr>
</table>

Das Schema wird bis zum 5. Zug durchgerechnet. Dabei ist der 4. Zug eine weiße bzw. der 5. Zug eine schwarze Kugel.

Der Kreis schließt sich

Wir wenden uns erneut unserem Eingangsproblem zu: *12 Murmeln in 3 Socken*. Nach den bisherigen Übungen sind die Schülerinnen und Schüler nun in der Lage, dieses Problem weitgehend selbständig zu analysieren bzw. durch eine entsprechende Rechnung zu beschreiben. Zuerst wird der zugehörige Baum gezeichnet und beschriftet.



Ausfall	P
1R	$\frac{0}{12}$
1W	$\frac{4}{12}$
2R	$\frac{1}{12}$
2W	$\frac{3}{12}$
3R	$\frac{3}{12}$
3W	$\frac{1}{12}$
Summe:	$\frac{12}{12}$

Beim ***Rückwärts-lesen*** wird das vorgedruckte Schema verwendet. Daß es hier nun nur noch 3, anstatt 4 möglicher Wege gibt, ist sofort klar. Die Position für den 4. Weg wird überall durchgestrichen. Für jede der damaligen Ziehungen wird nun die Rechnung durchgeführt und mit den *intuitiven* Schätzungen verglichen:

Schließlich erhalten wir die folgende Übersicht:

Merkmale		**S1**	**S2**	**S3**	
rote Murmel	**r**	0	1	3	
weiße Murmel	**w**	4	3	1	
Summe:		4	4	4	

☞	**33,3%**	**33,3%**	**33,3%**		1/3	1/3	1/3	
1.	*1. Weg*	*2. Weg*	*3. Weg*		4/4	3/4	1/4	
	Indiz				4/12	3/12	1/12	
	W				**Summe:**	$\frac{8}{12}$		

☞	**50%**	**37,5%**	**12,5%**		4/8	3/8	1/8	
2.	*1. Weg*	*2. Weg*	*3. Weg*		4/4	3/4	1/4	
	Indiz				16/32	9/32	1/32	
	W				**Summe:**	$\frac{26}{32}$		

☞	**61,5%**	**34,6%**	**3,9%**		16/26	9/26	1/26	
3.	*1. Weg*	*2. Weg*	*3. Weg*		4/4	3/4	1/4	
	Indiz				64/104	27/104	1/104	
	W				**Summe:**	$\frac{92}{104}$		

☞	**69,6%**	**29,3%**	**1,1%**		64/92	27/92	1/92	
4.	*1. Weg*	*2. Weg*	*3. Weg*		0/4	1/4	3/4	
	Indiz				0/368	27/368	3/368	
	R				**Summe:**	$\frac{30}{368}$		

☞	**0%**	**90%**	**10%**		0/30	27/30	3/30	
5.	*1. Weg*	*2. Weg*	*3. Weg*		4/4	3/4	1/4	
	Indiz				0/120	81/120	3/120	
	W				**Summe:** $\frac{84}{120}$			

☞	**0%**	**96,4%**	**3,6%**		0/84	81/84	3/84	

Alternative Rechenwege

Bei der Verwendung des Schemas wird schnell deutlich, daß die gegebenen Nenner für die auftretenden Berechnungen eigentlich völlig irrelevant sind, falls man nur am Endergebnis interessiert ist. Im Zusammenhang mit dem Sockenexperiment ergibt sich damit folgender Ansatz (reduziertes Schema):

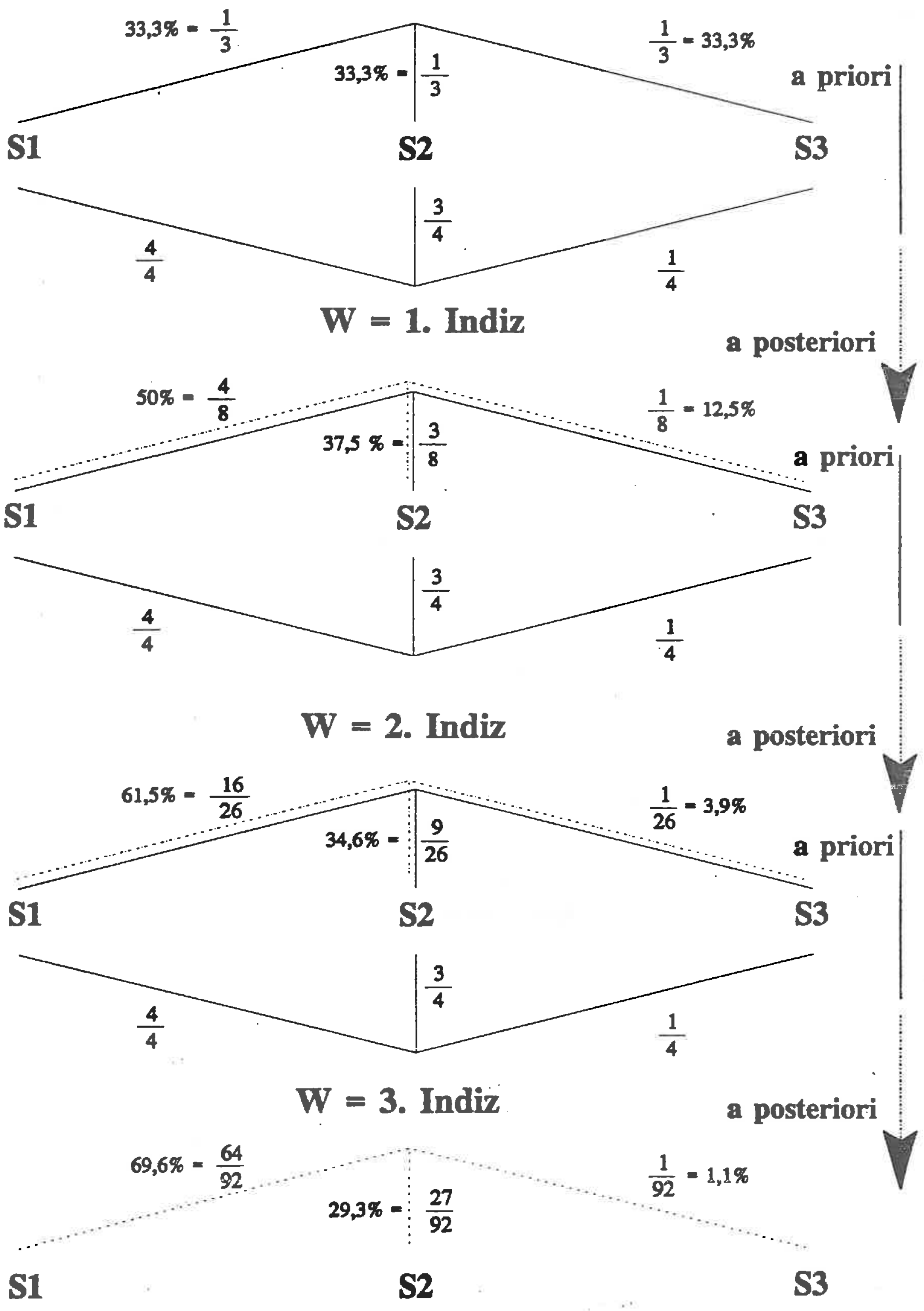
☞					1	1	1	
1.	*1. Weg*	*2. Weg*	*3. Weg*		4	3	1	
	Indiz				4	3	1	
	W				**Summe: 12**			

☞					4	3	1	
2.	*1. Weg*	*2. Weg*	*3. Weg*		4	3	1	
	Indiz				16	9	1	
	W				**Summe: 26**			

☞	**61,5%**	**34,6%**	**3,9%**		16/26	9/26	1/26	

Das Rechenverfahren ist weitgehend analog zum vorhergehenden und läßt sich hier z.B. für den 2. Zug wie folgt interpretieren:
Die a-priori-Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten einer bestimmten Socke verhalten sich wie 4 : 3 : 1. Je nachdem, welcher *Weg* vorliegt, verändert sich dieser Zustand in das Verhältnis von 16 : 9 : 1 der a-posteriori-Wahrscheinlichkeiten. Um schließlich (nach irgendeinem Zug) die gewünschten prozentualen Anteile zu berechnen, bildet man die Quotienten mit der entsprechende Summe (hier: 26) und erhält wie gewünscht: 16/26 = 61,5%, 9/26 = 34,6% und 1/26 = 3,9%.

Um im Baum die wechselden Blickrichtungen im Zusammenhang mit der BAYESschen Regel zu verdeutlichen, ist auch das nachfolgend notierte „erweiterte“ Baumdiagramm sehr hilfreich. Es sollte in jedem Fall bei verschiedenen Übungsaufgaben von den Schülerinnen und Schülern erstellt werden, nicht zuletzt um den schematischen Charakter der Tabellenschemata zu durchbrechen. Dabei sind auch hier grundsätzlich beide Notationsweisen möglich, d.h. einmal Berechnung der a-posteriori-Wahrscheinlichkeiten auf jeder Stufe bzw. zum anderen außer beim letzten Zug keine Beachtung der Nenner.


33,3% = 1/3
33,3% = 1/3
1/3 = 33,3%
a priori
S1
S2
S3
4/4
3/4
1/4
W = 1. Indiz
a posteriori
50% = 4/8
37,5 % = 3/8
1/8 = 12,5%
a priori
S1
S2
S3
4/4
3/4
1/4
W = 2. Indiz
a posteriori
61,5% = 16/26
34,6% = 9/26
1/26 = 3,9%
a priori
S1
S2
S3
4/4
3/4
1/4
W = 3. Indiz
a posteriori
69,6% = 64/92
29,3% = 27/92
1/92 = 1,1%
S1
S2
S3

Kleine abschließende Aufgabensammlung

1) Gegeben sind 4 Tüten mit jeweils 8 Kugeln. In der Tüte1 befinden sich 3 schwarze und 5 weiße Kugeln, in Tüte2 sind es 4 s und 4 w, in Tüte3 sind es 6 s und 2 w und in Tüte4 liegen nur 8 schwarze Kugeln.

   a) Zeichne den kompletten Baum für das Experiment: *Wir wählen eine Tüte aus und entnehmen daraus eine Kugel, deren Farbe festgestellt wird*!

   b) Notiere die folgenden Wahrscheinlichkeiten: P(T1w), P(T4s), P(T3w)!

   c) Erkläre den Unterschied zwischen $P_{T1}(w)$, P(T1w) und $P_w(T1)$ bzw. berechne jeweils diese Wahrscheinlichkeiten!

   d) Berechne im Schema die korrigierten Wahrscheinlichkeiten für folgendes Experiment: *Aus einer zufällig ausgewählten Tüte entnehmen wir eine Kugel und stellen ihre Farbe fest. Mit welcher Wahrscheinlichkeit handelt es sich dabei um Tüte1, Tüte2, Tüte3 oder Tüte4?*
   Dabei werden nacheinander (jeweils mit Zurücklegen) die folgenden Kugeln aus der gewählten Tüte entnommen: **s s s w**

---

2) Von den 20 Schülerinnen und Schülern der Klasse 8C sind 16 Mädchen und der Rest Jungen. Von den Jungen haben 25% als Mathematik-Note mindestens eine 2, von den Mädchen sind es 12,5%. Auf einem Tisch im Lehrerzimmer liegen die gerade geschriebenen Zeugnisse. Damit sie nicht durcheinandergeraten, wurden sie mit einem Buch beschwert, welches den oberen Teil mit den Namen verdeckt. Das erste Zeugnis im Stapel enthält für Mathematik die Note *gut*.

   a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist dies das Zeugnis eines Mädchens? Zeichne den zugehörigen Baum!

   b) Erkläre den Unterschied zwischen $P_J(2)$, P(J2) und $P_2(J)$!

---

3) Die berufstätigen Einwohner einer Stadt sind zu 30% am Ort und zu 70% außerhalb beschäftigt. 25% der Berufstätigen am Ort bzw. 10% der außerhalb Berufstätigen benutzen öffentliche Verkehrsmittel, um ihren Arbeitsplatz zu erreichen. Bei einem leichten Verkehrsunfall wird morgens der Wagen eines Berufstätigen beschädigt, der auf dem Weg zu seinem Arbeitsplatz war. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß dieser Mensch außerhalb arbeitet? Zeichne den Baum!

---

4) Beim gemeinsamen Schulausflug aller Schülerinnen und Schüler des KHG haben insgesamt 35% den Drachenfels besucht. Von diesen Gipfelstürmern kamen 20% aus Richtung Linz. Bei denjenigen, welche vorzogen, den Drachenfels nicht zu erklimmen, betrug der Anteil der Linzfahrer nur 15%. Abends auf der Rückfahrt im Zug erzählt ein Schüler, daß er morgens auf der Hinfahrt bis Linz gefahren sei. Mit welcher Wahrscheinlichkeit war er auf dem Drachenfels?

5) Von den Schülerinnen und Schülern des KHG sind 52% Mädchen und der Rest Jungen. Von den Jungen kommen 26% mit dem Fahrrad zur Schule, von den Mädchen nur 22%. 63% der Jungen und 70% der Mädchen kommen zu Fuß. Der Rest benutzt jeweils andere Verkehrsmittel.

a) Nachdem die 1. Stunde bereits begonnen hat, hört man auf der Straße die Klingel eines Fahrrads. Eine Schülerin oder ein Schüler kommt mit dem Rad verspätet zur Schule. Mit welcher Wahrscheinlichkeit handelt es sich um einen Jungen bzw. um ein Mädchen? Zeichne den kompletten Baum und zusätzlich den erweiterten Baum!

b) Der Schüler bzw. die Schülerin ist heute nur ausnahmsweise wegen der Verspätung mit dem Fahrrad gekommen. Normalerweise handelt es sich um eine(n) Fußgänger(in). Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist dies ein Junge oder ein Mädchen? Verwende den oben gegebenen Baum und notiere außerdem das Schema!

Rechnen mit umgekehrten W-Bäumen

Merkmale					
Summe:					

☞	%	%	%	%				
1.	*1. Weg*	*2. Weg*	*3. Weg*	*4. Weg*				
	Indiz							
					Summe:			

☞	%	%	%	%				
2.	*1. Weg*	*2. Weg*	*3. Weg*	*4. Weg*				
	Indiz							
					Summe:			

☞	%	%	%	%				
3.	*1. Weg*	*2. Weg*	*3. Weg*	*4. Weg*				
	Indiz							
					Summe:			

☞	%	%	%	%				
4.	*1. Weg*	*2. Weg*	*3. Weg*	*4. Weg*				
	Indiz							
					Summe:			

☞	%	%	%	%				

☞	%	%	%	%				
5.	*1. Weg*	*2. Weg*	*3. Weg*	*4. Weg*				
	Indiz							
					Summe:			

☞	%	%	%	%				
6.	*1. Weg*	*2. Weg*	*3. Weg*	*4. Weg*				
	Indiz							
					Summe:			

☞	%	%	%	%				
7.	*1. Weg*	*2. Weg*	*3. Weg*	*4. Weg*				
	Indiz							
					Summe:			

☞	%	%	%	%				
8.	*1. Weg*	*2. Weg*	*3. Weg*	*4. Weg*				
	Indiz							
					Summe:			

☞	%	%	%	%				
9.	*1. Weg*	*2. Weg*	*3. Weg*	*4. Weg*				
	Indiz							
					Summe:			

☞	%	%	%	%				