Bezirksregierung Köln
Dezernat 45 Düsseldorf

Unterregionalisierte Lehrerfortbildung
Mathematik 31.475.14

Einführung in die Stochastik

Jahrgangstufe 7 - 8

HANDREICHUNGEN ZUR UMSETZUNG DES NEUEN
LEHRPLANS MATHEMATIK FÜR DIE SEKUNDARSTUFE I
IN ANLEHNUNG AN DAS KONZEPT VON
DR. WOLFGANG RIEMER, KÖLN

Erstellt von der Arbeitsgruppe **Stochastik**:

Hans Beinghaus, Gummersbach
Norbert Billstein, Jülich
Wolfgang van Briel, Kleve
Alexandra Dreiseidler, Bonn
Rolf Mantyk, Mettmann
Günter Seebach, Siegburg

Januar 1994

INHALTSVERZEICHNIS: EINFÜHRUNG IN DIE STOCHASTIK

Vorwort zu der Unterrichtsreihe
Einführung in die Stochastik Jahrgangsstufe 7/8

In der 5-wöchigen Unterrichtsreihe zur Stoachstik in Klasse 7/8 werden der Wahrscheinlichkeitsbegriff, die Pfadregel und die Summenregel mit entsprechenden Anwendungen bis hin zum Bernoulliexperiment behandelt.
Durch die neuen Richtlinien wird davon ausgegangen, daß der Wahrscheinlichkeitsbegriff in den Klassen 5 und 6 noch nicht eingeführt worden ist.
Basierend auf dem Konzept von Herrn Dr. Riemer liegt der Schwerpunkt nicht auf dem aus Symmetrieeigenschaften ableitbarem Laplaceschen Wahrscheinlichkeitsbegriff, sondern

> *Wahrscheinlichkeit wird als optimale Prognose für eine zu erwartende relative Häufigkeit definiert.*

Diese Definition berücksichtigt, daß Wahrscheinlichkeiten
- Zahlen sind, wie Längen- und Flächenmaßzahl.
- subjektiv sind im Sinne von Vermutungen.
- objektiv sind im Sinne von Reproduzierbarkeit. (Gesetz der großen Zahl)
- frequentistisch sind im Sinne von Stabilisierung relativer Häufigkeiten.
- symmetrisch sind im Zusammenhang mit Laplaceexperimenten.

Die unterschiedlichen Aspekte des Wahrscheinlichkeitsbegriffes werden den Schülern durch Hypothesenbildungen und experimentelle Überprüfungen an einem nicht allseitig regelmäßigen Würfel vermittelt.
Die von den Schülern erstellten Wahrscheinlichkeitshypothesen für das Auftreten der einzelnen Zahlen bei einem vorgegebenen Würfel werden diskutiert und am Experiment widerlegt, bestätigt oder korrigiert, in dem je zwei Schüler 100-mal würfeln und die Ergebnisse protokollieren. Die Zusammenfassung zu Gruppenergebnissen zeigt, daß die Schwankungen der relativen Häufigkeiten mit größerem Umfang abnehen.
Eine relativ "gesicherte" Prognose p(i) mit $i \in \{1,2,3,4,5,6\}$ für das Auftreten der relativen Häufigkeiten wird möglich, wobei gewisse Symmetrieeigenschaften des Würfels berücksichtigt werden.
An geeigneter Stelle wird man bei diesem Unterrichtsgang die Begriffe *absolute und relative Häufigkeit* einführen und zum Schluß die Frage diskutieren, warum bei einem Laplaceschen Würfel die Wahrscheinlichkeiten sofort ohne experimentelle Überprüfung angegeben werden können.Die Beantwortung führt automatisch auf die obigen Aspekte des Wahrscheinlichkeitsbegriffes und dessen Definition.
Ausgehend von diesen Prognosen werden im weiteren Verlauf der Unterrichtsreihe Rechenmethoden entwickelt, um daraus weitere Vorhersagen ermitteln zu können.

Die Frage nach der Wahrscheinlichkeit p(1 | 1), mit der zwei Einsen hintereinander geworfen werden, wird bei den Schülern unterschiedliche Vermutungen aufkommen lassen, die durch Auswertung der Versuchsergebnisse widerlegt oder bestätigt werden.
Die auf diese Weise induktiv gefundenen Zusammenhänge lassen sich natürlich auch deduktiv begründen, was nicht Gegenstand des Unterrichts der Jahrgangsstufen 7/8 zu sein braucht.
Ausgehend von einem Umfang A_0 von Doppelwürfen ist die absolute Häufigkeit $A_1 = A_0 \cdot p(1)$.
Die erneute Multiplikation dieses Wertes mit p(1) liefert die absoluten Häufigkeit $A_{11} = A_1 \cdot p(1)$ auch beim zweiten Wurf eine 1 zu erhalten.
Die Wahrscheinlichkeit der Doppeleins ergibt sich dann über die relative Häufigkeit

$$p(1 \mid 1) = \frac{A_{11}}{A_0} = \frac{(A_0 p(1))p(1)}{A_0} = p(1) \cdot p(1) \qquad \text{(Pfadregel)}$$

Zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit, mit der bei einem Doppelwurf zwei gleiche Zahlen (Pasch) auftreten, wird man intuitiv die Einzelwahrscheinlichkeiten addieren. Die Auswertung der Versuchsergebnisse bestätigt die Vermutung, wobei der mathematische Nachweis wieder über die relative Häufigkeit erbracht wird:

$$\begin{aligned} P(Pasch) &= \frac{A_{11} + A_{22} + A_{33} + A_{44} + A_{55} + A_{66}}{A_0} \\ &= \frac{A_0 p(1|1) + A_0 p(2|2) + A_0 p(3|3) + A_0 p(4|4) + A_0 p(5|5) + A_0 p(6|6)}{A_0} \\ &= p(1|1) + p(2|2) + p(3|3) + p(4|4) + p(5|5) + p(6|6) \end{aligned}$$

Die Pfad- und Summenregel werden in einer umfangreichen Übungsphase gefestigt, die mit dem Bernoulliexperiment und der Binomialverteilung endet.

Durchführung des Unterrichts

Materialien: Benötigt werden mindestens 15 Quader mit den Maßen 2cm x 1,3cm x 2,6cm. Anlage 4, Folie 3 und Anlage 5, Folie 4 werden viermal benötigt.
Hilfreich ist es, wenn eine Urliste, wie sie auf dem ersten Arbeitsblatt von den Schülern erstellt wird, auf Folie vorliegt. Es können dann später Auswertungsvorgänge an diesem Beispiel demonstriert werden.

1. Stunde: Würfeln mit dem Holzquader

In dieser Stunde sollen die Schülerinnen und Schüler Hypothesen über zu erwartende relative Häufigkeiten aufstellen und diese dann experimentell bestätigen oder revidieren.

1.1 Um die Schülerinnen und Schüler für die Problematik zu interessieren, beginnen wir mit dem folgenden Einstiegsproblem:

Das Spiel "Mensch-ärgere-Dich-nicht" soll mit einer anderen Sorte Würfel gespielt werden. Es stehen 3 Würfel - besser: 3 Quader - zur Verfügung.

☛ **Anlage 1:** Folie 1

Bevor gewürfelt wird, darf sich der Spieler einen Quader aussuchen:

1. Situation:	*Der Spieler möchte eine Figur ins Spiel bringen.*
2. Situation:	*Der Spieler benötigt eine "5", um mit einem Satz den letzten Spielstein ins Haus zu bringen.*
3. Situation:	*Vor dem Spieler steht ein fremder Spielstein, der mit einer "3" hinausgeworfen werden kann.*

In allen drei Situationen werden sich die Schülerinnen und Schüler für einen Würfel entscheiden und begründen dies auch mit der rein intuitiven Vorstellung, daß der jeweils gewählte Würfel die erforderliche Augenzahl "höchstwahrscheinlich" zeigen wird. Es ist ihnen klar, daß es eine 100%-ige Sicherheit nicht gibt.

1.2 **Zusammenfassung:** Eine genaue Vorhersage ist nicht möglich. Der Spieler wird den Würfel wählen, der ihn mit relativ großer Sicherheit zum Ziel führt.

1.3 Im Folgenden soll nun das Würfelverhalten des ersten Quaders genauer untersucht werden.

Problemstellung: Stellt Euch vor, Ihr würfelt mit dem Quader sehr oft. Was schätzt ihr: in wieviel Prozent aller Fälle werdet Ihr auf lange Sicht die einzelnen Augenzahlen erhalten?

Bis zu 6 Vorschläge werden in die 1. Liste der Folie eingetragen.

☛ **Anlage** 2: Folie 2

Alle Schülerinnen und Schüler werden dann gefragt, für welche Hypothese sie sich entscheiden. Gute Schülerinnen und Schüler werden hier bei sehr auffälligen Schätzungen, z. B. bei asymmetrischen Verteilungen, ihre Bedenken anmelden. Die Abstimmungsergebnisse werden in die letzte Spalte der 1. Liste eingetragen.

☛ **Anlage** 2: Folie 2

1.4 Zur Problemlösung werden nun für jeweils 2 Schülerinnen und Schüler Quader der ersten Art und für alle Arbeitsblätter ausgeteilt.

☛ **Anlage** 3.1: Arbeitsblatt 1 – Seite 1 –

Alle Schülerinnen und Schüler schätzen noch einmal die zu erwartenden relativen Häufigkeiten (1.) und würfeln dann 100-mal und tragen die Ergebnisse in die Tabelle ein (2.). Unter 3. können die Ergebnisse ausgewertet und unter 4. kann eventuell eine Korrektur der Schätzung vorgenommen werden.
Nach der ersten Auswertung der Urliste werden die Begriffe absolute und relative Häufigkeit fachsprachlich gesichert.

1.5 Bei der anschließenden Diskussion der Ergebnisse und einer eventuell verbesserten Schätzung

☛ **Anlage** 2: Folie 2

wird sich herausstellen, daß die Anzahl von 100 Würfen für eine stichhaltige Aussage zu klein ist. Eine Erhöhung der Anzahl kann leicht erreicht werden, wenn die Ergebnisse von 3 Schülerpaaren, insgesamt 300 Würfe, beurteilt werden. Hierzu werden die Ergebnisse aller Paare in eine vorbereitete Liste eingetragen.

☛ **Anlage** 3.2: Arbeitsblatt 1 – Seite 2 –
☛ **Anlage** 4: Folie 3

1.6 Als Hausaufgabe fassen die Schülerinnen und Schüler jeweils 300 Würfe zusammen und tragen die Ergebnisse in Prozent in die Liste ein.
Um später die Zahlen vergleichen zu können, sollten die Zusammensetzungen der Dreiergruppen einheitlich sein.

☛ Anlage 3.2: Arbeitsblatt 1 – Seite 2 –

2. Stunde: Der Wahrscheinlichkeitsbegriff

In dieser Stunde sollen die Schülerinnen und Schüler den Wahrscheinlichkeitsbegriff beschreiben.

2.1 Zum Einstieg wird die in der voraufgegangenen Stunde behandelte Problematik wieder aufgenommen und das Ziel der Stunde, nämlich eine Aussage zu treffen über zu erwartende relative Häufigkeiten beim Würfeln mit einem Quader, angegeben.

2.2 Die Ergebnisse der Zusammenfassung zu je 300 Würfen werden verglichen und in die Liste eingetragen.

☛ **Anlage 5:** Folie 4

Die Diskussion führt zu dem Ergebnis, daß die relativen Häufigkeiten schwanken, allerdings bei 300 Würfen geringer als bei 100 Würfen.

2.3 Es schließt sich die 3. Schätzung an, der dann noch einmal die Zusammenfassung aller Ergebnisse der Klasse gegenübergestellt wird.

2.4 Eine Reflexion über den bisher verfolgten Weg ergibt folgende Schritte:

1. *Eine Schätzung führt zu einer Hypothese über die zu erwartenden relativen Häufigkeiten bei einem Experiment.*
2. *Das Experiment wird durchgeführt.*
3. *Die Beobachtungen ergeben, daß die relativen Häufigkeiten schwanken, wobei die Größe der Schwankungen mit der Erhöhung der Anzahl von Durchführungen abnimmt.*
4. *Eine eventuell verbesserte Hypothese für die zu erwartenden relativen Häufigkeiten wird vorgelegt; diese nennen wir* ***Wahrscheinlichkeit.***

Definition: ***Wahrscheinlichkeit*** ist die optimale Prognose für eine zu erwartende relative Häufigkeit.

Für den Quader werden die Wahrscheinlichkeiten P(1) bis P(6) festgelegt, dabei werden die Symmetrieeigenschaften des Quaders berücksichtigt. (Idealisierung)

2.5 **Ergebnis:** Wahrscheinlichkeiten für einen Versuchsausgang lassen sich nicht immer eindeutig bestimmen. Es lassen sich aus Versuchsreihen brauchbare Hypothesen entwickeln, die die zu erwartenden relativen Häufkgeiten beschreiben.

2.6 In den übungsaufgaben werden häufig Laplace-Objekte verwendet. Der Übergang vom teilsymmetrischen Quader zu einem z. B. vollsymmetrischen Würfel oder Glücksrad bereitet den Schülern im allgemeinen keine Schwierigkeiten.
Als Hausaufgaben oder für eine Vertiefung des Erlernten bieten sich folgende Aufgaben an:

1. *Es wird ein gewöhnlicher Würfel oder ein beliebiger anderer Riemer-Würfel genommen und das Vorgehen wiederholt.*
2. *Standardaufgaben zur Bestimmung von absoluten und relativen Häufigkeiten bei Statistiken aus den eingeführten Schulbüchern werden bearbeitet.*

3. Stunde: Berechnung von Hypothesen

In dieser Stunde sollen die Schülerinnen und Schüler versuchen, theoretisch Hypothesen für das Würfeln mit einem Quader aufzustellen und auf ihre Verträglichkeit mit dem Experiment zu überprüfen.

3.1 Schon relativ früh weisen gute Schülerinnen und Schüler daraufhin, man müsse die Wahrscheinlichkeiten doch berechnen können. Dieser Vermutung soll nun nachgegangen werden. Welche Hypothesen von den Schülerinnen und Schülern benannt werden, kann hier natürlich nicht vorausgesagt werden.
Die folgenden Hypothesen treten häufig auf (aus Riemer,W.: Zur Verknüpfung von Wahrscheinlichkeitsberechung und Statistik im Schulunterricht, S.5 ff):

3.2 *1. Hypothese:*
"Je größer die Fläche auf dem Quader, desto häufiger fallen die zugehörigen Augenzahlen."

Quader 1:
Seiten 1 und 6: 3,38 cm^2
Seiten 2 und 5: 2,60 cm^2
Seiten 3 und 4: 5,20 cm^2

Gesamte Oberfläche des Quaders: F = 22,36 cm^2 (=100%).
Unter der Annahme, daß die Wahrscheinlichkeiten proportional zu den Flächen sind, ergeben sich

P(1) = P(6) = 3,38/22,36 = 15,1% ;
P(2) = P(5) = 2,60/22,36 = 11,6% ;
P(3) = P(4) = 5,20/22,36 = 23,3% .

Vergleichen wir die Ergebnisse mit den experimentell bestimmten Wahrscheinlichkeiten, so bestätigt sich die erste Hypothese nicht.

3.3 *2. Hypothese:*
"Je weiter der Schwerpunkt in einer bestimmten Stellung von der Unterlage entfernt ist, desto kleiner ist die Wahrscheinlichkeit der in diesem Fall gezeigten Augenzahl."

	h	1/h
Seiten 1 und 6:	1	1
Seiten 2 und 5:	1,3	0,769
Seiten 3 und 4:	0,65	1,538

Aus Normierungsgründen ergibt sich mit S = 2 (1 + 0,769 + 1,538)

P(1) = P(6) = 1/S = 15,1% ;
P(2) = P(5) = 0,769/S = 11,6% ;
P(3) = P(4) = 1,538/S= 23,3% .

Die Werte sind, wie man leicht nachrechnet, notwendigerweise identisch mit denen aus 3.2 und führen zu einer Verwerfung.

Zwei weitere Hypothesen werden im oben erwähnten Aufsatz von Herrn Riemer ausführlich besprochen.

4. Stunde: Pfadregel am Beispiel der Wahrscheinlichkeit für einen Pasch

In dieser Stunde geht es nun darum, eine Regel für die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten zu formulieren und mit den experimentell bestimmten relativen Häufkigkeiten zu vergleichen.

4.1 Als Einstieg wird mit den Schülern folgendes Experiment durchgeführt:

In eine Socke werden 3 Kugeln gelegt, auf denen die Buchstaben A, M, O stehen. Der Schüler oder die Schülerin, die das Wort OMA zieht, erhält 50 Pf. Wieviel wird der Lehrer in dieser Klasse verlieren, wenn jeder mitspielen darf?

Die Schülerinnen und Schüler diskutieren das Problem folgerichtig, wenn sie argumentieren, daß die Wahrscheinlichkeit sehr klein ist, da nur in einem Drittel aller Fälle das O käme, und wiederum nur in der Hälfte von diesem Drittel der Buchstabe M, also einem Sechstel. Wenn man die Buchstaben O und M gezogen hat, kann man aufhören, da dann nur das A noch im Socken ist.

4.2 Problemstellung: Ob diese Art der Multiplikation der Einzelwahrscheinlichkeiten sinnvoll ist, soll nun an unserem Holzquader untersucht werden. Gefragt ist nach der Wahrscheinlichkeit für einen "3-er Pasch". Für eine experimentelle Auswertung werden die 100, in der ersten Stunde geworfenen Augenzahlen als 50 Doppelwürfe interpretiert und sämtliche, vorkommende Paschs in einer Liste notiert.
Es sollte ein konkretes Beispiel auf Folie vorliegen, um die Art der Auswertung genau zeigen zu können.

☞ **Anlage 6.1:** Arbeitsblatt 2 – Seite 1 –

4.3 Für eine bessere Entscheidung werden die Ergebnisse aller Schülerinnen und Schüler als absolute Häufigkeiten in eine Liste eingetragen.

☞ **Anlage 6.2:** Arbeitsblatt 2 – Seite 2 –
☞ **Anlage 4:** Folie 3

Für den 3-er Pasch sollen Ergebnisse in Gruppen zusammengefaßt werden und als relative Häufigkeiten in die Liste eingetragen werden. In der letzten Spalte wird das Ergebnis für die gesamte Klasse notiert.

☞ **Anlage 6.1:** Arbeitsblatt 2 – Seite 1 –
☞ **Anlage 5:** Folie 4

4.4 Um das Zustandekommen dieser Zahlen theoretisch zu ergründen, wird an dieser Stelle nun der Wahrscheinlichkeitsbaum eingeführt als Verdeutlichung eines zweistufigen Experiments und an der Tafel entwickelt.

☞ **Anlage 6.3:** Arbeitsblatt 2 – Seite 3 –

Ausgegangen wird von der in der 2. Stunde ermittelten Wahrscheinlichkeit P(3). Diese und die Gegenwahrscheinlichkeit werden an die Teilpfade im Baum geschrieben. In die Kästen an den Knoten können die errechneten absoluten Zahlen eingetragen werden, wenn wir die in der Klasse insgesamt ausgewerteten Doppelwürfe als Ausgangswert in die Wurzel des Baumes eintragen.
Wir können nun die errechneten absoluten Zahlen vergleichen mit den absoluten Zahlen, die in der Klasse experimentell ermittelt wurden.
Die Frage nach dem Anteil der Anzahl der 3-er Paschs an allen Doppelwürfen, führt auf dem Hintergrund des selbst erstellten Zahlenmateriasl zu dem Ergebnis, daß P(3-er Pasch) = P(3)·P(3) ist.

4.5 **Zusammenfassung: *Pfadregel***

Wird eine Experiment mehrfach hintereinander ausgeführt, so ergibt sich die Wahrscheinlichkeit eines Pfades in einem Wahrscheinlichkeitsbaum als Produkt der Wahrscheinlichkeiten der Teilstrecken des Pfades.

4.6 Für eine Festigung werden die Überlegungen auf die anderen Paschs übertragen.

☛ **Anlage 6.3:** Arbeitsblatt 2 - Seite 3 -

4.7 Zur Vertiefung und als Hausaufgaben bieten sich aus den eingeführten Schulbüchern alle Aufgaben aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung an, bei denen Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe von Pfaden in Wahrscheinlichkeitsbäumen gelöst werden können.

☛ **Anlage 7.1:** Aufgabenblatt - Seite 1 -

5. Stunde: Warten auf die erste Drei

Bei dem Problem "Warten auf die erste Drei" gilt es nun, die Pfadregel anzuwenden und noch einmal berechnete Wahrscheinlichkeiten mit experimentell bestimmten Häufigkeiten zu vergleichen.
Es ist wichtig die Auswertung der Urliste an einem Beispiel vorzuführen.

5.1 <u>Einstiegsproblem</u>:

Zu Beginn des Spiels "Mensch ärgere Dich nicht" darf man dreimal würfeln, um ins Spiel zu kommen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß man bei den drei Würfen keine 6 hat?

Für eine Lösung des Problems sollen wieder der Quader und die mit ihm ermittelten Augenzahlen aus der ersten Stunde herangezogen werden.
Die Urliste wird folgendermaßen ausgewertet:
Es wird abgezählt, nach wie vielen Würfen zum ersten Mal eine Drei auftritt. Tritt sie bis zum fünften Wurf nicht auf, wird abgebrochen. Die gesamte Auswertung wird abgebrochen, wenn insgesamt 20 Einzelexperimente durchgeführt wurden. Der Stichprobenumfang beträgt auf jeden Fall 20.

5.3 Die Schülerinnen und Schüler erhalten nun das neue Arbeitsblatt und werten ihre eigene Versuchsreihe entsprechend aus. Anschließend werden die Ergebnisse aller Schülerinnen und Schüler als absolute Häufigkeiten in die vorbereitete Liste eingetragen.

☛ **Anlage** 8.1: Arbeitsblatt 3 – Seite 1 –
☛ **Anlage** 4: Folie 3

5.4 Um eine verbesserte Grundlage für die Angabe von Wahrscheinlichkeiten zu haben, werden auch hier die Ergebnisse gruppenweise zusammengefaßt und als relative Häufigkeiten notiert.

☛ **Anlage** 8.2: Arbeitsblatt 3 – Seite 2 –
☛ **Anlage** 5: Folie 4

Eine neue Schätzung und ein Vergleich mit dem Ergebnis der gesamten Klasse schließen sich an.

5.5 Wie in der voraufgegangenen Stunde verdeutlicht ein Wahrscheinlichkeitsbaum die Zusammenhänge (Tafel oder Folie). Die Wahrscheinlichkeit P(3) wird an die Teilpfade geschrieben, in die Knoten werden wieder die absoluten Häufigkeiten eingetragen, die sich ergeben, wenn 100% der Gesamtzahl der in der Klasse ausgewerteten 5-er Würfe entsprechen und für alle weiteren Stufen die eingetragenen Wahrscheinlichkeiten zur Berechnung zugrunde gelegt werden.

☛ **Anlage** 8.3: Arbeitsblatt 3 – Seite 3 –

Über die absoluten Häufigkeiten für die Versuchsreihen, bei denen die Drei erst beim n-ten Wurf auftrat, erkennen die Schülerinnen und Schüler , daß hier die Pfadregel angewendet werden darf.
Zum Schluß vergleichen die Schülerinnen und Schüler die theoretisch ermittelten absoluten Häufigkeiten mit den experimentell ermittelten Häufigkeiten.

5.6 Als Hausaufgaben und Vertiefung können Standardaufgaben aus dem eingeführten Schulbuch oder die Aufgaben des beiliegenden Arbeitsblattes bearbeitet werden.

☛ **Anlage 7.1 und 7.2:** Aufgabenblatt – Seite 1 und 2 –

6. Stunde: Augensumme bei 2 Würfen

Nun sollen die Schülerinnen und Schüler die Additionsregel aufstellen.

6.1 Zur Einführung wird folgende Aufgabe gestellt:

Welche Augensumme kommt beim Werfen mit 2 Quadern häufiger vor: 6 oder 7?

6.2 Zuerst sollen die Schülerinnen und Schüler die 100 Augenzahlen aus der ersten Stunde verwenden, diese als 50 Doppelwürfe interpretieren und die absoluten Häufigkeiten der Augensummen 6 und 7 ermitteln.

☛ **Anlage 9.1:** Arbeitsblatt 4 – Seite 1 –

Die Ergebnisse aller Schülerinnen und Schüler werden wieder zusammengestellt und das Ergebnis aller in der Klasse ausgewerteten Doppelwürfe bestimmt und daraus die zu erwartenden relativen Häufigkeiten, die Wahrscheinlichkeiten für die Augensummen 6 und 7 festgelegt.

☛ **Anlage 9.2:** Arbeitsblatt 4 – Seite 2 –
☛ **Anlage 4 und 5:** Folien 3 und 4

6.3 Es wird nun der Wahrscheinlichkeitsbaum für das Experiment des Wurfes von 2 Quadern ausgefüllt mit den in der 2. Stunde bestimmten Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Augenzahlen. Die absoluten Häufigkeiten werden ebenfalls eingetragen (100% entspricht der Gesamtzahl der in der Klasse insgesamt ausgewerteten Doppelwürfe).

☛ **Anlage 9.3:** Arbeitsblatt 4 – Seite 3 –

6.4 Die Frage nach den zu erwartenden absoluten Häufigkeiten für die Augensummen 6 und 7, führt die Schülerinnen und Schüler unmittelbar zu der Vorschrift, daß die Wahrscheinlichkeiten für die Würfe (1,5), (2,4), (3,3) und (4,2) und (5,1) addiert werden müssen, damit wir die Wahrscheinlichkeit für die Augensumme 6 erhalten.

6.5 **Zusammenfassung: *Summenregel***
Wird ein Ereignis durch mehrere Pfade eines Wahrscheinlichkeitsbaumes beschrieben, so ergibt sich die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis als Summe der Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Pfade.

6.6 Als Anwendung des Erlernten berechnen die Schüler und Schülerinnen die Wahrscheinlichkeiten für die übrigen Augensummen 2 bis 10 und vergleichen sie mit den experimentell ermittelten zu erwartenden relativen Häufigkeiten.

☛ **Anlage 9.2**: Arbeitsblatt 4 - Seite 2 -

6.7 Als Hausaufgaben und zur Vertiefung bieten sich außer den Standardaufgaben zur Additionsregel aus den eingeführten Schulbüchern folgende Aufgaben an:

1. Berechne die Wahrscheinlichkeiten für die Augensummen 2 bis 12 bei einem regulären Würfel.

2. Galilei wurde das Problem vorgelegt, wieso beim Werfen mit 3 Würfeln die Augensumme 10 leichter zu erreichen sei als die Augensumme 9.
   a) Berechne die Wahrscheinlichkeiten für einen regulären Würfel und den Quader.
   b) Überprüfe die Ergebnisse für den Holzquader, indem Du die 100 geworfenen Augenzahlen aus der ersten Stunde als Dreifachwürfe auswertest.

7. Stunde: Übungen zur Pfad- und Summenregel

In dieser Stunde sollen die Schülerinnen und Schüler an Beispielen üben, Wahrscheinlichkeitsbäume zu zeichnen, und mit Hilfe der beiden Regeln Wahrscheinlichkeiten zu berechnen. Hier kann insbesondere auf die verschiedenen Urnenmodelle eingegangen werden.

Da in den folgenden Stunden Inhalte unterrichtet werden, die so oder in ähnlicher Form auch bisher schon unterrichtet wurden, weisen wir nur auf die Passagen hin, bei denen der Bezug zwischen statistisch ermittelten relativen Häufigkeiten und den zu erwartenden relativen Häufigkeiten (Wahrscheinlichkeiten) deutlich wird.

8. Stunde: Binomialverteilung

In dieser Stunde sollen die Schülerinnen und Schüler die Begriffe *Treffer* und *Niete* bzw. *Erfolg* und *Mißerfolg* und ihre Bedeutung für Bernoulli-Experimente beschreiben. Für ein dreistufiges Bernoulli-Experiment wird die Wahrscheinlichkeitsverteilung berechnet.

8.1 Wie Herr Dr. Riemer in seinen Vorträgen und Aufsätzen zeigt, eignet sich zur Einführung von Versuchen mit nur zwei möglichen Ausgängen eine Geschmacksprobe (denkbar sind auch Riech- oder Tastproben).

Eingstiegsversuch: Drei Becher werden vor den Schülern mit Cola, Cola light und Cola coffeinfrei gefüllt. Die Schülerinnen und Schüler wissen nicht, welches Getränk in den einzelnen Bechern ist. Jede Schülerin und jeder Schüler darf an jedem Becher probieren und muß dann das Probierte identifizieren.

☞ **Anlage 10:** Arbeitsblatt 5

8.2 Bei jeder Probe gibt es nur die Möglichkeiten

"Inhalt richtig zugeordnet" → Erfolg oder
"Inhalt falsch zugeordnet" → Mißerfolg.

Jede Schülerin und jeder Schüler kann also 0, 1, 2 oder 3 Erfolge haben. Zum Schluß wird ausgezählt, wie viele Schülerinnen und Schüler 0, 1, 2 oder 3 Erfolge haben.

☞ **Anlage 10:** Arbeitsblatt 5

8.3 Die Frage ist nun *"Kennen sich die Schülerinnen und Schüler mit den verschiedenen Cola-Sorten aus?"*
Um dies beantworten zu können, gehen wir von der Annahme aus, alle Schülerinnen und Schüler hätten geraten, d.h.

$$P(\text{"Erfolg"}) = \frac{1}{3}\ ;\ P(\text{"Mißerfolg"}) = \frac{2}{3}\ .$$

Interpretieren wir den Geschmackstest als dreistufiges Bernoulli-Experiment, so läßt sich folgender Wahrscheinlichkeitsbaum zeichnen (s. nächste Seite).
Es werden nun die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Pfade berechnet und im Baum alle die Pfade in unterschiedlichen Farben markiert, die zu keinem, 1, 2 oder 3 Erfolgen führen. Stellen wir nun die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung auf, so stellt sich heraus, daß zu i Erfolgen

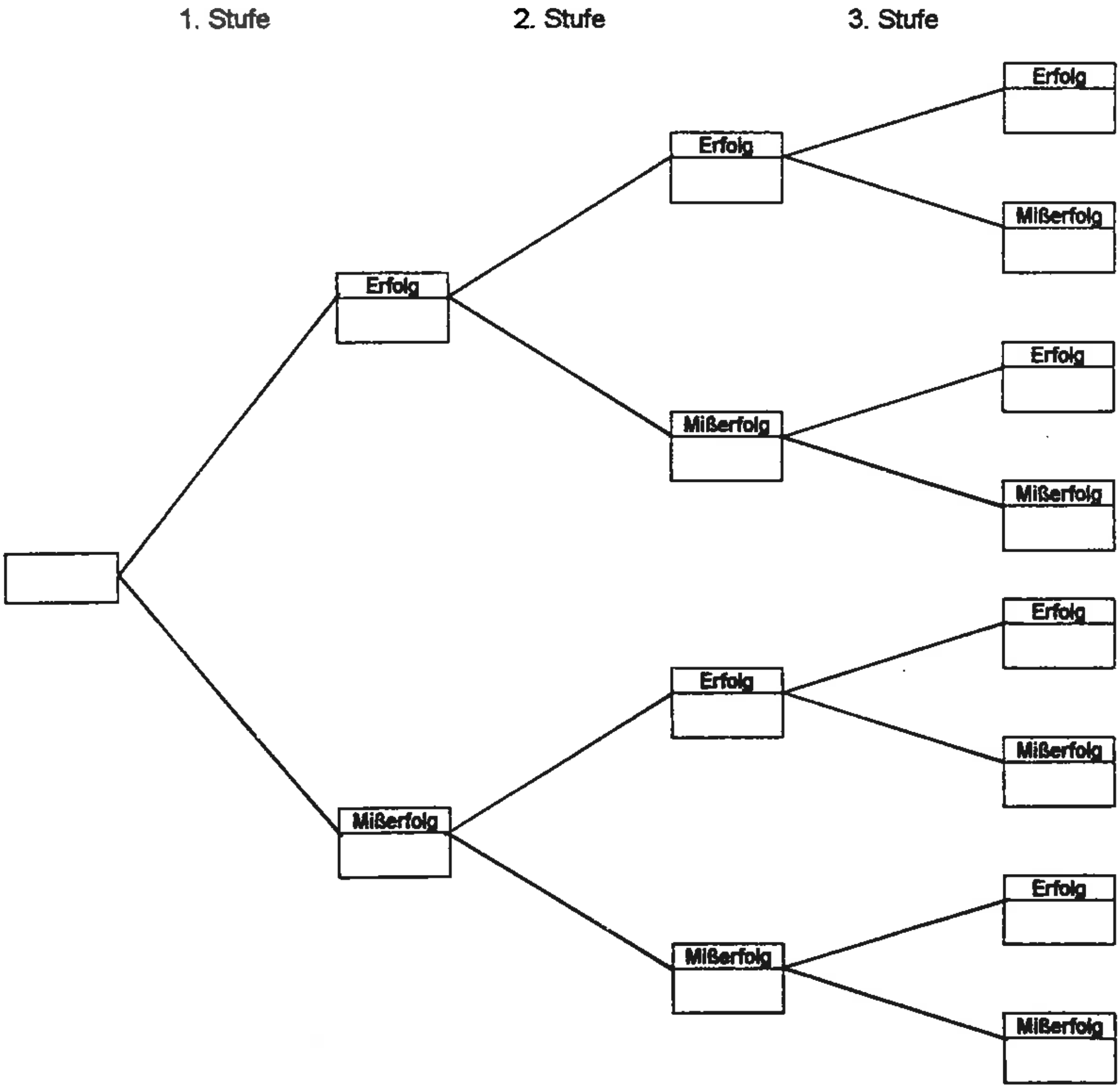
(i = 0, 1, 2, 3) immer die gleiche Pfadwahrscheinlichkeit gehört. Es ergibt sich also

$$P(0) = \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

$$P(1) = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} = 3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{3}$$

$$P(2) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = 3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{2}{3}$$

$$P(3) = \left(\frac{1}{3}\right)^3$$



8.4 Es werden nun die theoretischen mit den experimentell ermittelten Häufigkeiten verglichen:
Bei deutlicher Abweichung haben wir eine quantitative Begründung dafür, daß unsere ursprüngliche Annahme nicht richtig gewesen sein kann. (propädeutisch beurteilende Statistik)

8.5 An dieser Stelle können nun die Begriffe *Bernoulli-Experiment, Erfolgswahrscheinlichkeit und Binomialkoeffizienten* eingeführt werden, wenn dies in der voraufgegangenen Besprechung nicht schon geschehen ist.

8.6 Als Vertiefung und Hausaufgaben können die Schülerinnen und Schüler noch die Wahrscheinlichkeitsbäume für ein zwei- und ein vierstufiges Bernoulli-Experiment zeichnen, die zugehörigen Binomialkoeffizienten und Wahrscheinlichkeitsverteilung berechnen.

9. Stunde: Pascalsches Dreieck

In dieser Stunde wird den Schülerinnen und Schülern das Pascalsche Dreieck vorgestellt, und es werden die Begriffe und Zusammenhänge der 8. Stunde vertieft.

9.1 Als Einstieg können wir hier das Problemfeld Jungen- und Mädchengeburt wählen. Begonnen wird mit einer Statistik aus der Klasse: Verteilung der Geschlechter der Kinder in den Familien der Schülerinnen und Schüler.

9.2 Die theoretischen Überlegungen können mit $p = 0{,}5$ oder $p = 0{,}514$ durchgeführt werden.

9.3 In einer Zusammenfassung sollten die aufgetretenen Binomialkoeffizienten im Pascalschen Dreieck zusammengestellt und der Zusammenhang über die Addition von entsprechenden Gliedern der Vorreihe aufgezeigt werden.

10. Stunde: Übungen zur Binomialverteilung

Zur Festigung werden nun Aufgaben gerechnet und dabei die Kenntnis der Binomialkoeffizienten eingesetzt, so daß wir weitgehend auf Wahrscheinlichkeitsbäume verzichten können.

11./12. Stunde: Wiederholung und Klassenarbeit

Zur integrierenden Wiederholung können wieder übergreifende Aufgaben aus dem eingeführten Schulbuch gerechnet werden.
Eine Zusammenstellung von Übungsmaterial findet sich bei den Anlagen.

☛ **Anlage 11**: Übungen zur Klassenarbeit

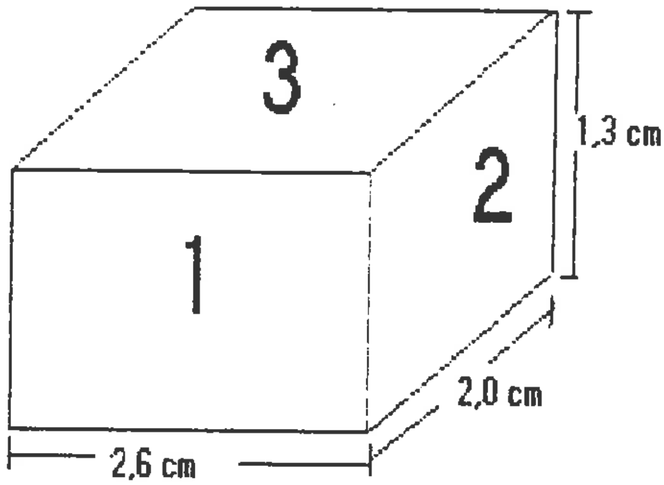
Zwei Beispiele für Klassenarbeiten finden sich ebenfalls bei den Anlagen, wobei die aus Anlage 12 zu dem Übungsblatt (Anlage 11) gehört.

☛ **Anlage 12**: Klassenarbeit 9d
☛ **Anlage 13**: Klassenarbeit 8c/d

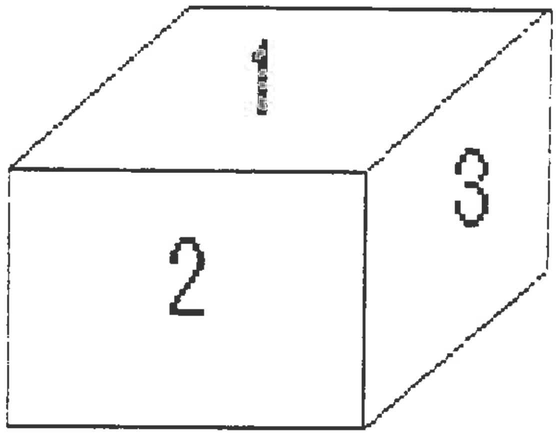
Die Musterlösung der Klassenarbeit aus Anlage 13 findet sich bei den Anlagen.

☛ **Anlage 14**: Musterlösung zur Klassenarbeit 8c/d

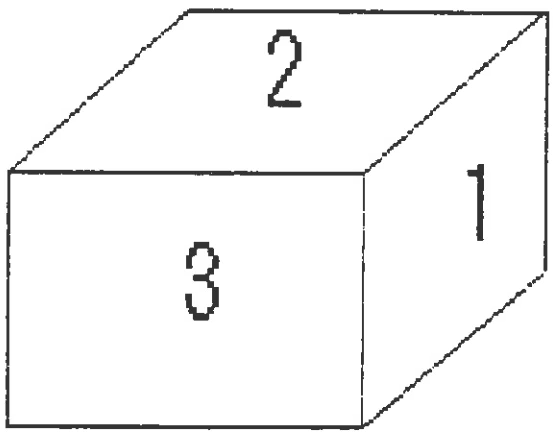
QUADER 1



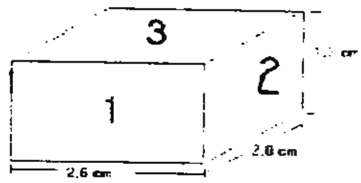
QUADER 2



QUADER 3



Quader 1:



1. Schätzung

1	2	3	4	5	6	Name	Abst.

2. Schätzung

1	2	3	4	5	6	Name	Abst.

Name:............................ Klasse:......

Stochastik

Arbeitsblatt 1 - Würfeln mit einem Holzquader Seite 1

1. Schätze, wie oft der Quader auf lange Sicht bei sehr, sehr vielen Würfen die Augenzahlen 1 bis 6 liefert.
   Trage Deine Schätzung mit Prozentangaben in die Liste ein:

1	2	3	4	5	6

2. Würfele jetzt 100mal und trage die einzelnen Ergebnisse in die Liste ein:

3. Zähle nun aus, wie oft die einzelnen Augenzahlen kamen:

	1	2	3	4	5	6
Strichliste						
abs.Häufigk.						
rel.Häufigk.						

Prüfe, ob die Summe der absoluten Häufigkeiten 100 ist!

4. Wenn du möchtest, kannst Du Deine Schätzung aus Aufgabe 1 korrigieren:

1	2	3	4	5	6

Name:............................ Klasse:......

Stochastik

Arbeitsblatt 1 - Würfeln mit einem Holzquader

5. Übersicht über die Ergebnisse der Klasse:

	Name	1	2	3	4	5	6
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							
9							
10							
11							
12							
13							
14							
15							
16							
17							
18							
19							
20							

6. Fasse die Ergebnisse der Klasse in Gruppen zusammen und trage sie in Prozent in die folgende Liste ein:

1	2	3	4	5	6	

1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							
9							
10							
11							
12							
13							
14							
15							
16							
17							
18							
19							
20							

Thema:

Ergebnisse der Klasse, gruppenweise zusammengefaßt:

Neue Schätzung

Ergebnis der Klasse

Name:.......................... Klasse:......

Stochastik

Arbeitsblatt 2 - Wahrscheinlichkeit für einen Pasch Seite 1

1. Schätze, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein 3-er Pasch (2 Dreier hintereinander) mit dem Quader geworfen wird:

   P ("3-er Pasch") = ____________________

2. Werte Deine Liste von Arbeitsblatt 1 so aus, daß Du die 100 Würfe als 50 Doppelwürfe interpretierst. Zähle, wie oft die verschiedenen Paschs geworfen wurden:

	1-er Pasch	2-er Pasch	3-er Pasch	4-er Pasch	5-er Pasch	6-er Pasch
Strichliste						
abs.Häufigk.						
rel.Häufigk.						

3. Übersicht über die Ergebnisse der Klasse auf der nächsten Seite.

4. Fasse die Ergebnisse der Klasse für einen 3-er Pasch in Gruppen zusammen und trage sie absolut in die 1. Zeile der folgenden Liste ein, prozentual in die 2. Zeile. Trage in die letzte Spalte das Ergebnis für die gesamte Klasse absolut und prozentual ein:

3-er Pasch absolut							
3-er Pasch prozentual							

Name:............................ Klasse:......

Stochastik

Arbeitsblatt 2 - Wahrscheinlichkeit für einen Pasch Seite 2

3. Übersicht über die Ergebnisse der Klasse:

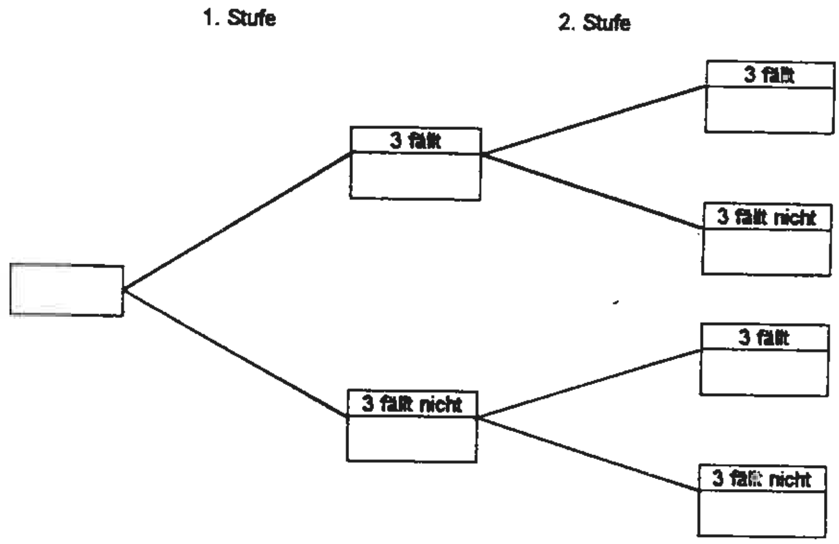
	Name	1-er Pasch	2-er Pasch	3-er Pasch	4-er Pasch	5-er Pasch	6-er Pasch
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							
9							
10							
11							
12							
13							
14							
15							
16							
17							
18							
19							
20							

Name:......................... Klasse:......

Stochastik

Arbeitsblatt 2 - Wahrscheinlichkeit für einen Pasch

5. Versuche, das Ergebnis anhand des folgenden Baumes nachzuvollziehen. Als Wahrscheinlichkeit für den Wurf "3" wird der in Arbeitsblatt 1 ermittelte Werte zugrunde gelegt. Schreibe an die Teilpfade die Wahrscheinlichkeiten dafür, daß eine "3" fällt bzw. nicht fällt.
Trage an der Wurzel des Baumes ein, wie viele Doppelwürfe in der Klasse insgesamt ausgewertet wurden.
Berechne nun für die einzelnen Stufen die absoluten Zahlen und trage sie an den Knoten ein.



6. Verfahre nun wie bei 5. und berechne die Wahrscheinlichkeiten für die anderen Paschs:

P ("1-er Pasch") = ________ P ("2-er Pasch") = ________
P ("4-er Pasch") = ________ P ("5-er Pasch") = ________
P ("6-er Pasch") = ________

7. Vergleiche die errechneten Ergebnisse mit den tatsächlich gewürfelten Ergebnissen, indem Du die Tabelle aus 3. für jeden Pasch jeweils für die Klasse insgesamt auswertest (Angaben in Prozent):

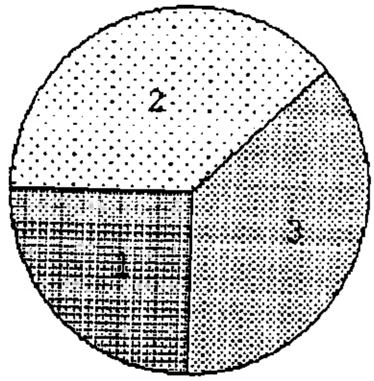
P ("1-er Pasch") = ________ P ("2-er Pasch") = ________
P ("4-er Pasch") = ________ P ("5-er Pasch") = ________
P ("6-er Pasch") = ________

Name:............................ Klasse:......

Stochastik

Aufgabenblatt - Pfadregel

1. Wenn das rechts abgebildete Glücksrad einmal gedreht wird, so ist die Wahrscheinlichkeit für Feld 1 25%, für Feld 2 und Feld 3 je 37,5%. Das Glücksrad wird zweimal gedreht.
   a) Zeichne den zugehörigen Baum.
   b) Welche Zahlenkombinationen können auftreten?
   c) Gib die Wahrscheinlichkeiten an, mit denen die verschiedenen Zahlenfolgen auftreten können.



2. Aus einer Urne mit den Buchstabenkärtchen T, R, O wird ein Kärtchen gezogen; dann wird das nächste gezogen und schließlich das letzte entnommen.
   Das Ergebnis des Versuches ist das enstandene "Wort".
   a) Zeichne den zugehörigen Baum.
   b) Welche Worte können auftreten?
   c) Berechne die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Wörter.
3. Wie in Aufgabe 4 wird aus einer Urne mit den Buchstabenkärtchen T, R, O ein Kärtchen gezogen, der Buchstabe dann aber notiert und das Kärtchen in die Urne zurückgelegt. Dies wird noch zweimal wiederholt.
   Das Ergebnis des Versuches ist das enstandene "Wort".
   a) Zeichne den zugehörigen Baum.
   b) Welche Worte können auftreten?
   c) Berechne die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Wörter.

4. Eine Firma stellt Meßgeräte her. Bevor sie ausgeliefert werden, werden sie zweimal kontrolliert. Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Fehler bei der ersten Kontrolle nicht entdeckt wird, ist 0,03. Bei der zweiten Kontrolle ist diese Wahrscheinlichkeit 0,05.
   a) Fasse die Kontrolle als Zufallsversuch auf und zeichne den zugehörigen Baum.
   b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein defektes Gerät ausgeliefert wird?
   b) Angenommen, die Jahresproduktion der Firma enthält 10000 defekte Meßgeräte. Wie viele davon werden vermutlich ausgeliefert?

5. Tongefäße werden nach Form, Ornamenten und Glasur beurteilt. Diese drei Merkmale werden in getrennten Arbeitsgängen und in der Reihenfolge Form, Ornament, Glasur geprüft. Eine Firma, die Tongefäße herstellt, weiß aus Erfahrung: *Die Wahrscheinlichkeit, daß die Form gut ist, ist 0,60. Die Wahrscheinlichkeit, daß die Ornamente gut sind, ist 0,70. Die Wahrscheinlichkeit, daß die Glasur gut ist, ist 0,80.* Sind Form, Ornamente und Glasur gut, so gehört das Gefäß zur 1. Wahl. Sind nur 2 der 3 Merkmale gut, so gehört das Gefäß zur 2. Wahl.
   a) Fasse die Qualitätsprüfung als Zufallsversuch auf und zeichne den zugehörigen Baum.
   b) In einer Woche werden 18000 Gefäße hergestellt. Wie viele davon sind 1. Wahl, wie viele 2. Wahl?

6. a) Gib die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Augenzahlen bei einem regulären Würfel an.
   b) Ein regulärer Würfel wird so lange geworfen, bis zum ersten Mal eine Sechs erscheint. Zeichne den zugehörigen Baum und berechne die Wahrscheinlichkeiten, daß die Sechs beim 1., 2., 3., 4. oder beim 5. Wurf zum ersten Mal geworfen wird. Berechne die Wahrscheinlichkeit, daß mehr als 5 Würfe benötigt werden, bis die erste Sechs erscheint.

7. Ein Schmuggler muß zwei Kontrollstationen passieren. An der 1. Station wird erfahrungsgemäß etwa ein Drittel der Schmuggler erwischt und an der 2. Station 40% der Schmuggler.
   a) Zeichne einen Baum, aus dem die möglichen Wege für einen Schmuggler ersichtlich sind.
   b) Nimm an, 600 Schmuggler unternehmen den Versuch zu entkommen. Wie viele gelangen zur 2. Station? Wie viele gelangen zur 2. Station und werden dann gefaßt? Wie viele können entkommen?
   c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein Schmuggler beide Stationen unbehelligt passiert?

8. Ein Herrscher ist mit seinem Astrologen unzufrieden. Bevor er ihn hinrichten läßt, gibt er ihm eine letzte Chance:
   Der Astrologe darf 3 schwarze und 3 weiße Kugeln auf zwei gleiche Urnen nach Belieben verteilen. Dann muß er aus einer zufällig gewählten Urne eine Kugel ziehen. Eine weiße Kugel gibt ihm die Freiheit, eine schwarze kostet ihm das Leben.
   Wie sollte der Astrologe die Kugeln auf die beiden Urnen verteilen, um möglichst in Freiheit zu kommen?

Name:............................ Klasse:......

Stochastik

Arbeitsblatt 3 - Warten auf die erste Drei

1. Schätze, in wie vielen von 100 Versuchsreihen Du genau n Würfe benötigst, bis die erste Drei fällt.
   Trage Deine Schätzung mit Prozentangaben in die Liste ein:

Zahl der benötigten Würfe	1	2	3	4	5	>5
von 100 werden vermutlich Versuchsreihen benötigt						

2. Nimm wieder die Urliste von Arbeitsblatt 1 zur Hand. Zähle, nach wie vielen Würfen zum ersten Mal eine Drei auftritt. Tritt sie bis zum 5. Wurf nicht auf, wird abgebrochen. Die gesamte Auswertung wird abgebrochen, wenn insgesamt 20 Einzelexperimente durchgeführt wurden. Der Stichprobenumfang beträgt auf jeden Fall 20.

Zahl der benötigten Würfe	1	2	3	4	5	>5
Strichliste						
Anzahl der Versuchsreihen						

3. Übersicht über die Ergebnisse der Klasse auf der nächsten Seite.

4. Fasse die Ergebnisse der Klasse in Gruppen zusammen und trage sie in Prozent in die folgende Liste ein:

1	2	3	4	5	>5	

Name:.......................... Klasse:......

Stochastik

Arbeitsblatt 3 - Warten auf die erste Drei Seite 2

5. Gib noch einmal eine Schätzung an, in wie vielen von 100 Versuchsreihen Du genau n Würfe benötigst, bis die erste Drei fällt:

Zahl der benötigten Würfe	1	2	3	4	5	>5
von 100 werden vermutlich Versuchsreihen benötigt						

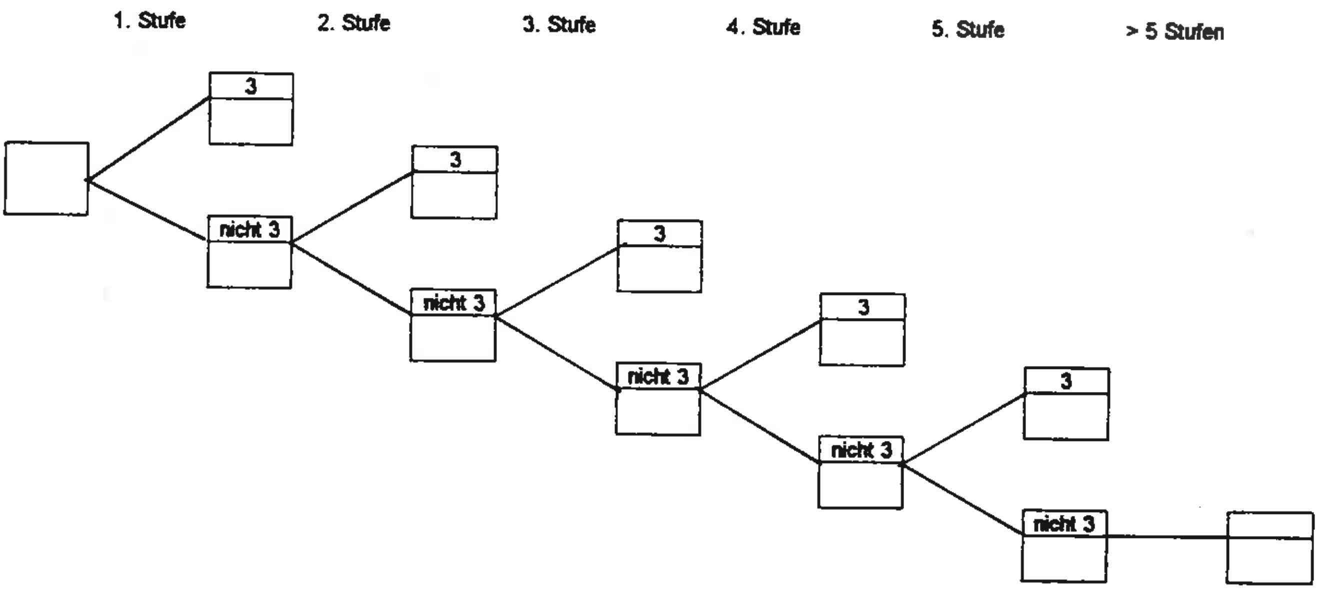
3. Übersicht über die Ergebnisse der Klasse:

	Name	1	2	3	4	5	>5
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							
9							
10							
11							
12							
13							
14							
15							
16							
17							
18							
19							
20							

Name:............................ Klasse:......

Stochastik

Arbeitsblatt 3 - Warten auf die erste Drei



Anlage 9.1

Name:............................ Klasse:......

Stochastik

Arbeitsblatt 4 - Augensumme bei 2 Würfen Seite 1

1. Wenn Du mit dem Holzquader sehr oft würfelst, mit welcher Wahrscheinlichkeit werden die Augensummen 6 und 7 auftreten? Gib eine Schätzung ab:

   P("Augensumme 6") = ...
   P("Augensumme 7") = ...

2. Interpretiere die 100 Würfe mit dem Quader vom Arbeitsblatt 1 als 50 Doppelwürfe und zähle, wie oft die Augensumme 11 und 12 auftraten:

Augensumme	6	7
Strichliste		
absolute Häufigkeit		
relative Häufigkeit		

3. Übersicht über die Ergebnisse der Klasse auf der nächsten Seite.

4. Fasse die Ergebnisse der Klasse zusammen:

Augensumme	6	7	Gesamtzahl
absolute Häufigkeit			
relative Häufigkeit			

Name:............................ **Klasse:......**

Stochastik

Arbeitsblatt 4 - Augensumme bei 2 Würfen **Seite 2**

3. Übersicht über die Ergebnisse der Klasse:

	Name	6	7
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14			
15			
16			
17			
18			
19			
20			

5. Werte nun Deine 100 Würfe vom Arbeitsblatt noch einmal aus, indem Du sie als 50 Doppelwürfe intertpretierst und zählst, wie oft die Augensumme 2 bis 10 vorkamen:

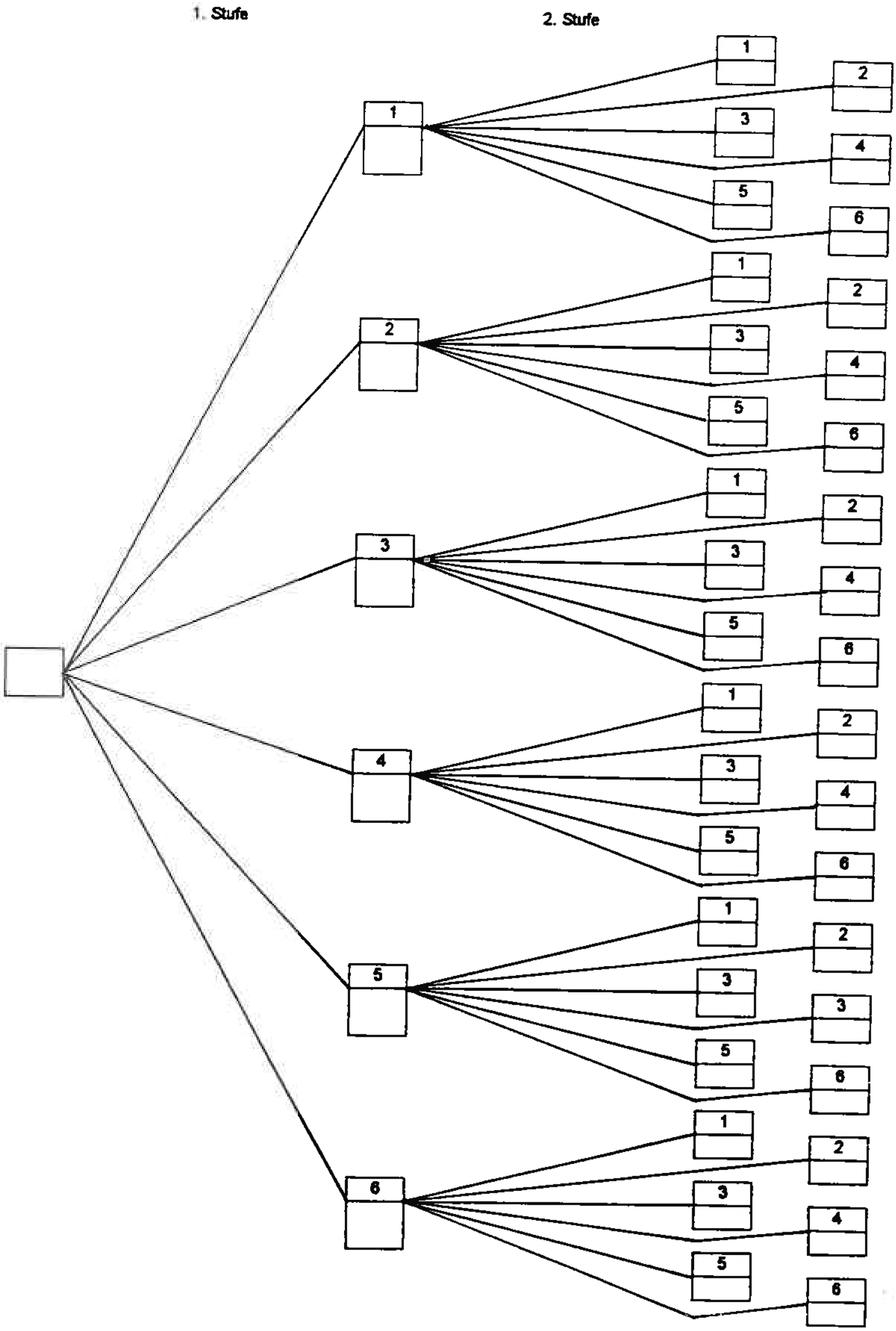
Augensumme	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Strichliste									
abs.Häufig.									
rel.Häufig.									

Anlage 9.3

Name:............................ Klasse:......

Stochastik

Arbeitsblatt 4 - Augensumme bei 2 Würfen



Name:............................ Klasse:......

Stochastik

Arbeitsblatt 5 - Geschmackstest

1. Dir werden jetzt 3 Becher mit den Getränken Cola, Cola light und Cola coffeinfrei vorgestellt. Entscheide bei jedem Becher direkt nach der Geschmacksprobe, um welches der drei Getränke es sich handelt und kreuze in der folgenden Tabelle an:

	Cola	Cola light	Cola coffeinfrei
1. Becher			
2. Becher			
3. Becher			

2. Ergebnis des Geschmackstest:

   Anzahl der Schülerinnen und Schüler , die an der

   Geschmacksprobe teilgenommen haben:________________

Anzahl d.richtig identifizierten Becher	0	1	2	3
Anzahl der Schüler mit entsprechender Anzahl richtige Becher				
relative Häufigkeit				

Anlage 11

Übungen zur Klassenarbeit

1.: Man wirft zweimal mit einem normalen Würfel. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ergibt der erste Wurf eine 4 und der zweite eine 6?

2.: Beantworte diegleiche Frage für unseren Quader !

3.: Verallgemeinere die Aufgaben 1 und 2 auf beliebige Augenzahlkombinationen und fülle die Tabellen aus!

2. Quader

1. Quader	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

2. Würfel

1. Würfel	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

4.: Wo ist die Wahrscheinlichkeit, in 2 Würfen genau die Augensumme 10 zu erreichen größer: Beim Quader oder beim Würfel ? Wie groß ist sie jeweils?

5.: In einem Spiel gewinnst Du, wenn Du im 1.Wurf <u>keine</u> '1' und im 2.Wurf <u>keine</u> '2' und ... und im 6. Wurf <u>keine</u> '6' würfelst.

a) Berechne die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn

- bei unserem Quader :
- beim normalen Würfel :

b) Fasse nun die ersten 96 Würfe mit dem Quader als 16 '6-er Serien' mit je 6 Würfen auf und zähle aus, wie oft Du gewonnen hättest.

c) Vergleiche
- Dein Ergebnis :
- das Gesamtergebnis der Klasse :

mit der 'berechneten Schätzung' zum Quader aus a).

6.. In einer Kiste sind 5 Bälle (3 rote und 2 weiße).

Du darfst dreimal ziehen ohne die gezogenen Bälle zurückzulegen.

Ermittle anhand eines Wahrscheinlichkeitsbaumes die Wahrscheinlichkeiten für

a) rot,rot,weiß

b) rot,weiß,rot

c) weiß,rot,rot

d) 2 von den drei Bällen sind rot.

7.: Löse die Aufgabe 6 erneut, jetzt aber unter der Voraussetzung, daß Du die Bälle jedesmal zurücklegst.

Anlage 12.1

1. Klassenarbeit 9d Gruppe A 25.9.1991

Ein Quader wurde 80 mal geworfen mit den folgenden Ergebnissen:

4	3	2	2	4	3	3	4	3	3	2	3	4	3	4	6	4	2	5	1	6	3	1	4	3	1	4	6	2	4
3	3	4	1	4	3	1	3	5	1	3	2	5	3	4	1	4	6	3	4	1	4	4	4	3	5	2	1	4	4
4	4	4	3	4	6	5	4	3	4	6	3	4	4	1	6	3	5	2	3										

Dabei wollen wir mit der folgenden Hypothese arbeiten:

1	2	3	4	5	6
11%	6%	33%	33%	6%	11%

1. Aufgabe:

a) Wie oft erwartest Du eine '1' nach obiger Hypothese ? Wie oft erwartest Du eine '4' nach obiger Hypothese ?

b) Bestimme die absolute und berechne die relative Häufigkeit (d.h. den Prozentsatz) aus der Tabelle (s.o.) und vergleiche !

2. Aufgabe:

a) Berechne mit der Hypothese die Wahrscheinlichkeit für eine 'Doppel 3'. Wieviele 'Doppel 3' Würfe erwartest Du bei 40 Versuchen ?

b) Bestimme die absolute und die relative Häufigkeit für eine 'Doppel 3' aus der Tabelle und vergleiche mit a) !

3. Aufgabe:

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für die Augensumme 6

a) bei obigem Quader b) bei einem normalen Würfel ?

4. Aufgabe:

Du wirfst einen Quader dreimal. Du gewinnst, wenn Du beim ersten Wurf <u>keine</u> '1', beim zweiten Wurf <u>keine</u> '2' und beim dritten Wurf <u>eine</u> '3' erhältst.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn ?

b) Wie oft erwartest Du einen Gewinn, wenn Du dieses 'Dreier-Experiment' 400 mal durchführst ? (Baum !)

c) Beantworte die Fragen zu a) und b) auch für einen normalen Würfel.

5. Aufgabe:

Du wartest bei einem <u>normalen</u> Würfel auf die erste '6' (z.B. bei 'Mensch ärgere Dich nicht').

a) Berechne die Wartezeitverteilung mit Rechenweg oder Baum:

n	1	2	3	4	5	>5
in %						

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß man auch nach 15 Würfen noch keine 6 erhalten hat ?

6. Aufgabe:

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit finden sich unter drei Quaderwürfen mindestens zwei 'Vierer' ?

b) Fasse in der Tabelle die ersten 78 Würfe als 26 Dreierwürfe auf und bestimme die absolute und die relative Häufigkeit von 'Mindestens zweimal die 4' und vergleiche mit a).

7. Aufgabe:

Erläutere kurz und präzise, wie Wahrscheinlichkeiten, relative Häufigkeiten und absolute Häufigkeiten zusammenhängen.

1. Klassenarbeit 9d Gruppe B

25.9.1991

Ein Quader wurde 80 mal geworfen mit den folgenden Ergebnissen:

4	3	2	2	4	3	3	4	3	3	2	3	4	3	4	6	4	2	5	1	6	3	1	4	3	1	4	6	2	4
3	3	4	1	4	3	1	3	5	1	3	2	5	3	4	1	4	6	3	4	1	4	4	4	3	5	2	1	4	4
4	4	4	3	4	6	5	4	3	4	6	3	4	4	1	6	3	5	2	3										

Dabei wollen wir mit der folgenden Hypothese arbeiten:

1	2	3	4	5	6
11%	6%	33%	33%	6%	11%

1. Aufgabe:

a) Wie oft erwartest Du eine '6' nach obiger Hypothese ? Wie oft erwartest Du eine '3' nach obiger Hypothese ?

b) Bestimme die absolute und berechne die relative Häufigkeit (d.h. den Prozentsatz) aus der Tabelle (s.o.) und vergleiche !

2. Aufgabe:

a) Berechne mit der Hypothese die Wahrscheinlichkeit für eine 'Doppel 4'. Wieviele 'Doppel 4' Würfe erwartest Du bei 40 Versuchen ?

b) Bestimme die absolute und die relative Häufigkeit für eine 'Doppel 4' aus der Tabelle und vergleiche mit a) !

3. Aufgabe:

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für die Augensumme 5

a) bei obigem Quader   b) bei einem normalen Würfel ?

4. Aufgabe:

Du wirfst einen Quader dreimal. Du gewinnst, wenn Du beim ersten Wurf <u>keine</u> '1', beim zweiten Wurf <u>eine</u> '2' und beim dritten Wurf <u>keine</u> '3' erhältst.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn ?

b) Wie oft erwartest Du einen Gewinn, wenn Du dieses 'Dreier-Experiment' 600 mal durchführst ? (Baum !)

c) Beantworte die Fragen zu a) und b) auch für einen normalen Würfel.

5. Aufgabe:

Du wartest bei einem <u>normalen</u> Würfel auf die erste '1' .

a) Berechne die Wartezeitverteilung mit Rechenweg oder Baum:

n	1	2	3	4	5	>5
in %						

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß man auch nach 15 Würfen noch keine 1 erhalten hat ?

6. Aufgabe:

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit finden sich unter drei Quaderwürfen mindestens zwei 'Dreier' ?

b) Fasse in der Tabelle die ersten 78 Würfe als 26 Dreifachwürfe auf und bestimme die absolute und die relative Häufigkeit von 'Mindestens zweimal die 3' und vergleiche mit a).

7. Aufgabe:

Erläutere kurz und präzise, wie Wahrscheinlichkeiten, relative Häufigkeiten und absolute Häufigkeiten zusammenhängen.

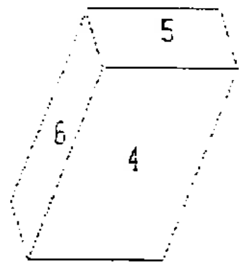
Anlage 13

Name:.................................. 8c/d A

5. Klassenarbeit

3.2.93

1. Mit dem rechts abgebildeten Spat wurde 100 mal gewürfelt und in der folgenden Tabelle wurden die Ergebnisse notiert:



1	1	6	3	1	6	3	6	3	2	6	3	1	3	3	4	3	5	1	3
6	4	2	4	4	3	6	3	1	3	5	4	1	4	6	3	6	1	3	6
1	3	1	4	1	3	1	6	4	4	3	6	6	2	5	1	6	6	6	5
6	1	3	6	1	2	6	6	4	6	5	4	6	6	2	6	6	6	1	6
2	2	6	3	1	1	6	4	6	1	6	1	2	6	3	3	1	6	3	3

a) Zähle aus, wie oft jede der Augenzahlen 1 bis 6 vorkam und trage die Ergebnisse in die Tabelle 1 des beiliegenden Blattes ein.

b) Führen wir das Experiment sehr oft aus, so erwarten wir Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Augenzahlen, die Du bitte in Tabelle 2 des Blattes einträgst.

c) Fasse nun jeweils 2 Würfe als Doppelwurf auf und zähle aus, bei wie vielen Doppelwürfen ein 1-erPasch, ein 2-er Pasch, ein 3-er Pasch, ein 4-erPasch, ein 5-er Pasch oder ein 6-erPasch auftrat. Trage die Ergebnisse in Tabelle 3 ein.

Arbeite nun mit den Wahrscheinlichkeiten aus Aufgabenteil b):

d) Zeichne den zum Doppelwurf gehörenden Baum in Dein Heft.

e) Berechne die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Paschs in Deinem Heft und vergleiche die Ergebnisse mit denen aus Aufgabenteil c).

Bei den folgenden Berechnungen sind alle Ergebnisse mit 3 gültigen Ziffern anzugeben.

2. Hans hat in seiner Hosentasche 7 rote, 8 grüne und 5 blaue gleich große Murmeln.
   a) Er zieht eine Murmel. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit,
      - eine rote,
      - eine grüne,
      - eine blaue

      Murmel aus der Hosentasche zu ziehen?
   b) Hans zieht nacheinander zwei Murmeln ohne Zurücklegen der ersten Murmel.
      Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht er
      - zwei rote,
      - zwei grüne,
      - zwei blaue,
      - zwei gleichfarbige

      Murmeln. Zeichne den zugehörigen Baum
   c) Beantworte die Fragen aus b), wenn Hans mit Zurücklegen zieht. Zeichne ebenfalls einen Baum.

3. In einem Gerät sind vier gleichartige Bauteile, die mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,2 ausfallen.
   Berechne die Wahrscheinlichkeit, daß
   - kein Bauteil ausfällt,
   - genau zwei der Bauteile ausfällt,
   - genau drei der Bauteile ausfallen.

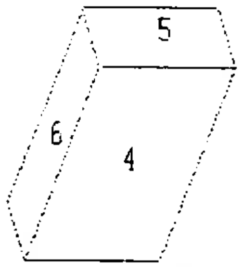
Viel Erfolg!

Anlage 13

Name:.................................... 8c/d B

5. Klassenarbeit 3.2.93

1. Mit dem rechts abgebildeten Spat wurde 100 mal gewürfelt und in der folgenden Tabelle wurden die Ergebnisse notiert:



4	6	5	1	1	6	4	2	6	5	6	3	4	1	3	4	1	6	6	2
1	1	1	6	6	4	1	1	4	3	6	4	4	1	4	4	3	3	4	6
1	3	1	4	1	3	1	6	4	4	3	6	6	2	5	1	6	6	6	5
6	1	3	6	1	2	6	6	4	6	5	4	6	6	2	6	6	6	1	6
2	2	6	3	1	1	6	4	6	1	6	1	2	6	3	3	1	6	3	3

a) Zähle aus, wie oft jede der Augenzahlen 1 bis 6 vorkam und trage die Ergebnisse in die Tabelle 1 des beiliegenden Blattes ein.

b) Führen wir das Experiment sehr oft aus, so erwarten wir Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Augenzahlen, die Du bitte in Tabelle 2 des Blattes einträgst.

c) Fasse nun jeweils 5 Würfe zu einem Experiment zusammen und zähle aus, beim wievielten Wurf die "3" zum ersten Mal auftrat. Trage die Ergebnisse in Tabelle 3 des Blattes ein.

Arbeite nun mit den Wahrscheinlichkeiten aus Aufgabenteil b):

d) Zeichne den zu dem Experiment -Warten auf die erste "3"- gehörenden Baum in Dein Heft.

e) Berechne die Wahrscheinlichkeiten, daß die "3" beim 1. Wurf, erst beim 2. Wurf, erst beim 3. Wurf, erst beim 4. Wurf oder erst beim 5. Wurf auftritt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die "3" bei 5 Würfen nicht auftritt?

Bei den folgenden Berechnungen sind alle Ergebnisse mit 3 gültigen Ziffern anzugeben.

2. Hans hat in seiner Hosentasche 4 rote, 5 grüne und 3 blaue gleich große Murmeln.
   a) Er zieht eine Murmel. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit,
      - eine rote,
      - eine grüne,
      - eine blaue

      Murmel aus der Hosentasche zu ziehen?
   b) Hans zieht nacheinander zwei Murmeln ohne Zurücklegen der ersten Murmel.
      Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht er
      - zwei rote,
      - zwei grüne,
      - zwei blaue,
      - zwei gleichfarbige

      Murmeln. Zeichne den zugehörigen Baum
   c) Beantworte die Fragen aus b), wenn Hans mit Zurücklegen zieht. Zeichne ebenfalls einen Baum.

3. In einem Gerät sind vier gleichartige Bauteile, die mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,1 ausfallen.
   Berechne die Wahrscheinlichkeit, daß
   - alle 4 Bauteile ausfallen,
   - genau eines der Bauteile ausfällt,
   - genau zwei der Bauteile ausfallen.

Viel Erfolg!

Name:........................... 8c/d

Tabelle 1

	1	2	3	4	5	6
Strichliste						
abs.Häufigk.(Anz.)						

Tabelle 2

1	2	3	4	5	6

Tabelle 3

"3" beim	1-ten Wurf	2-ten Wurf	3-ten Wurf	4-ten Wurf	5-ten Wurf	mehr als 5
Strichliste						
abs.Häufigk.						
rel.Häufigk. in %						

Anlage 14.1

Gruppe A Berichtigung der 5. Klassenarbeit vom 3.2.93

Aufgabe 1a)	1	2	3	4	5	6
abs.Häufigk.(Anz.)	21	8	22	12	5	32

1	2	3	4	5	6
27%	6%	17%	17%	6%	27%

Aufgabe 1c)	1-er Pasch	2-er Pasch	3-er Pasch	4-er Pasch	5-er Pasch	6-er Pasch
abs.Häufigk.	2	1	2	1	0	4
rel.Häufigk.	4%	2%	4%	2%	0%	8%

Gruppe B

Aufgabe 1a)	1	2	3	4	5	6
abs.Häufigk.(Anz.)	23	8	14	17	5	33

1	2	3	4	5	6
28%	7%	15%	15%	7%	28%

Aufgabe 1c) "3" beim	1-ten Wurf	2-ten Wurf	3-ten Wurf	4-ten Wurf	5-ten Wurf	mehr als 5
abs.Häufigk.	3	3	1	1	2	10
rel.Häufigk.	15%	15%	5%	5%	10%	50%

Gruppe A Aufgabe 1d)

P("1-er Pasch") = $0,27^2$= 0,073 = P("6-er Pasch")

P("2-er Pasch") = $0,06^2$= 0,004 = P("5-er Pasch")

P("3-er Pasch") = $0,17^2$= 0,029 = P("4-er Pasch")

Gruppe B Aufgabe 1d)

P("3 beim 1. Wurf") = 0,15

P("3 erst beim 2. Wurf") = 0,85 0,15 = 0,128

P("3 erst beim 3. Wurf") = $0,85^2$ 0,15 = 0,108

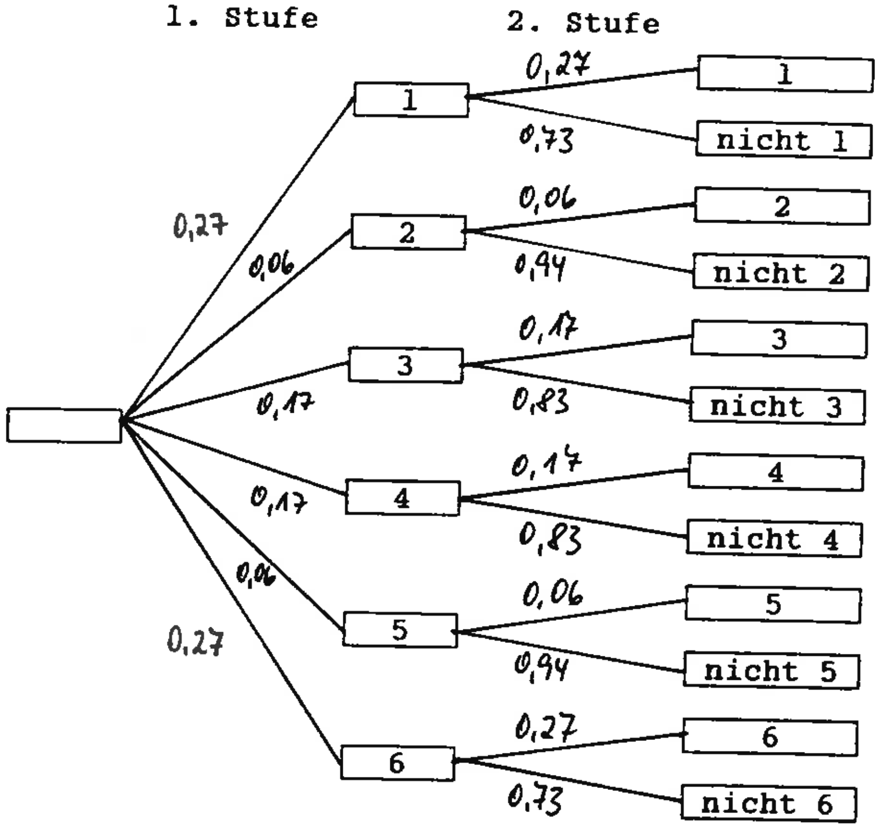
P("3 erst beim 4. Wurf") = $0,85^3$ 0,15 = 0,092

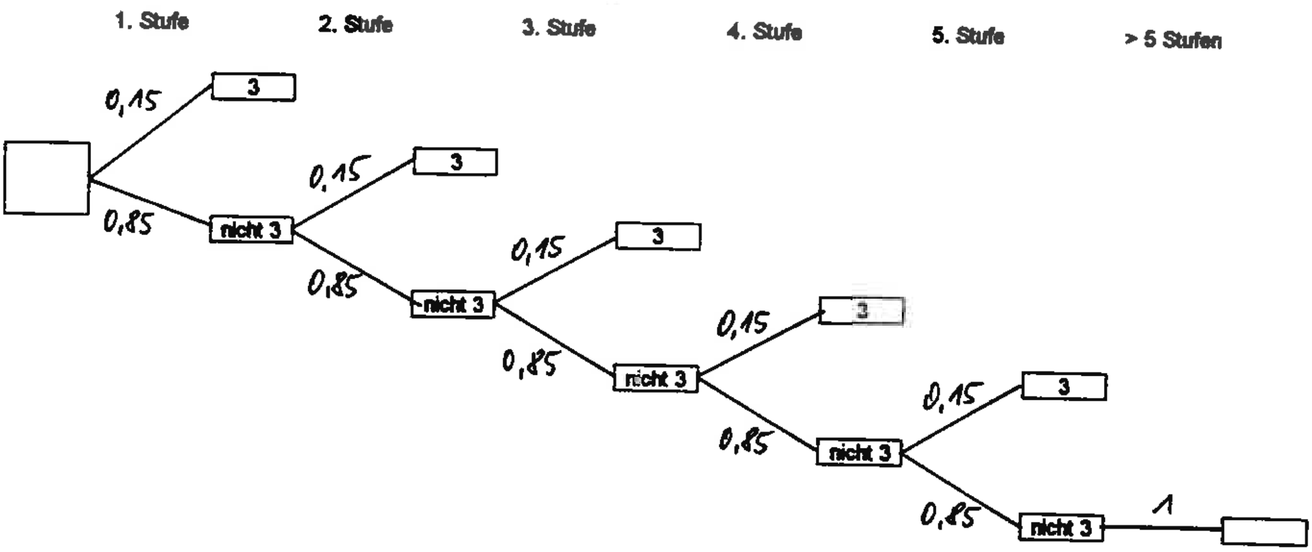
P("3 erst beim 5. Wurf") = $0,85^4$ 0,15 = 0,078

P("3 erst bei mehr als 5 Würfen") = $0,85^5$ = 0,444

Anlage 14.2

Gruppe A / Aufgabe 1 d)



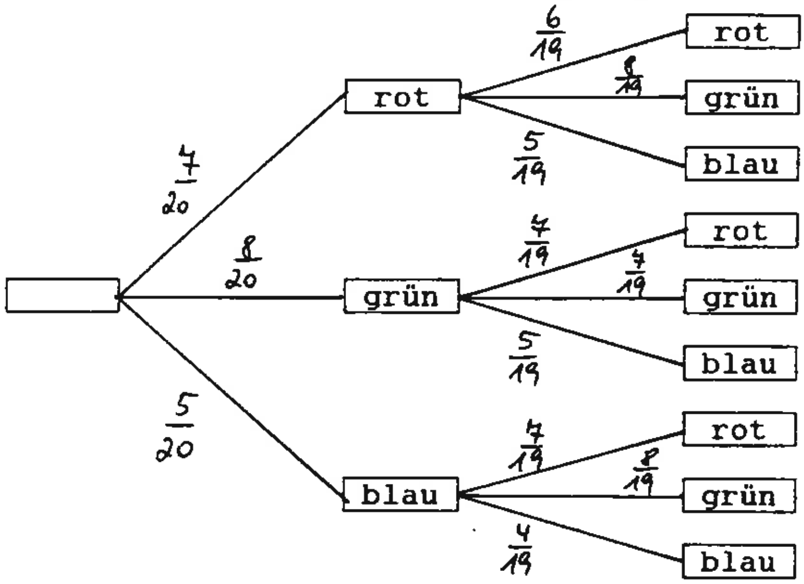


Anlage 14.3

Gruppe A / Aufgabe 2

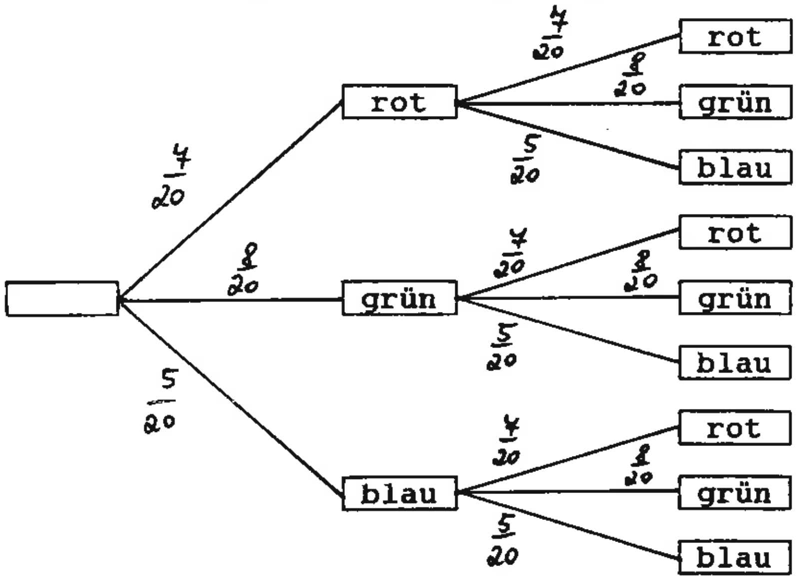
a) P("rot") = $\frac{7}{20}$; P("grün") = $\frac{8}{20}$; P("blau") = $\frac{5}{20}$

b) 1. Stufe 2. Stufe



	b)	c)
P("2 rote")	$\frac{7}{20}\cdot\frac{6}{19}=\frac{42}{380}=0{,}111$	$\left(\frac{7}{20}\right)^2=\frac{49}{400}=0{,}123$
P("2 grüne")	$\frac{8}{20}\cdot\frac{7}{19}=\frac{56}{380}=0{,}147$	$\left(\frac{8}{20}\right)^2=\frac{64}{400}=0{,}16$
P("2 blaue")	$\frac{5}{20}\cdot\frac{4}{19}=\frac{20}{380}=0{,}053$	$\left(\frac{5}{20}\right)^2=\frac{25}{400}=0{,}0625$
P("2 gleichfarbige")	$\frac{42+56+20}{380}=\frac{118}{380}=0{,}311$	$\frac{49+64+25}{400}=\frac{138}{400}=0{,}345$

c) 1. Stufe 2. Stufe



Aufgabe 3 p = 0,2 ; q = 0,8

P("kein Bauteil fällt aus") = $0{,}8^4=0{,}410$

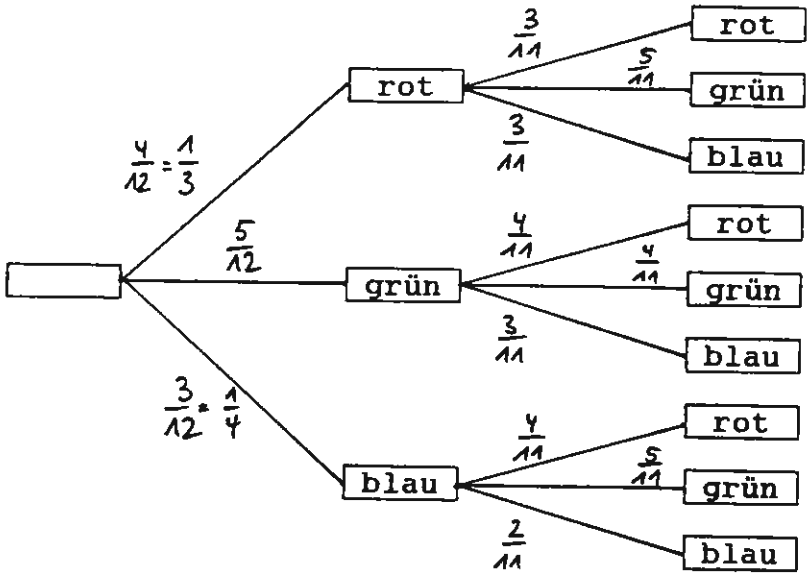
P("genau 2 Bauteile fallen aus") = $6\cdot0{,}2^2\cdot0{,}8^2=0{,}154$

P("genau 3 Bauteile fallen aus") = $4\cdot0{,}2^3\cdot0{,}8=0{,}0256$

Gruppe B / Aufgabe 2

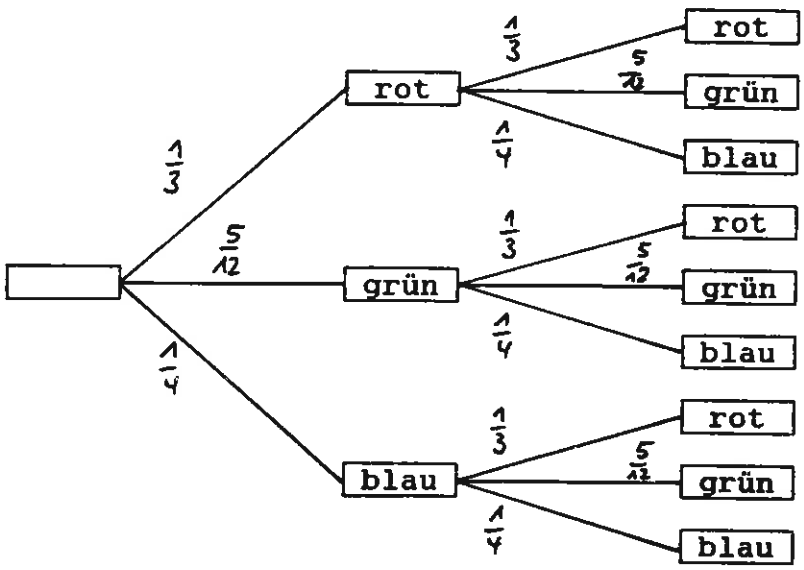
a) P("rot") = $\frac{4}{12}$; P("grün") = $\frac{5}{12}$; P("blau") = $\frac{3}{12}$

b) 1. Stufe 2. Stufe



	b)	c)
P("2 rote")	$\frac{4}{12}\cdot\frac{3}{11}=\frac{12}{132}=0{,}0909$	$\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}=0{,}111$
P("2 grüne")	$\frac{5}{12}\cdot\frac{4}{11}=\frac{20}{132}=0{,}152$	$\left(\frac{5}{12}\right)^2=\frac{25}{144}=0{,}174$
P("2 blaue")	$\frac{3}{12}\cdot\frac{2}{11}=\frac{6}{132}=0{,}045$	$\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{16}=0{,}0625$
P("2 gleichfarbige")	$\frac{12+20+6}{132}=\frac{38}{132}=0{,}288$	$\frac{16+25+9}{144}=\frac{50}{144}=0{,}347$

c) 1. Stufe 2. Stufe



Aufgabe 3 p = 0,1 ; q = 0,9

P("alle 4 Bauteile fallen aus") = $0{,}1^4=0{,}0001$

P("genau 1 Bauteil fällt aus") = $4\cdot 0{,}1\cdot 0{,}9^3=0{,}292$

P("genau 2 Bauteile fallen aus") = $6\cdot 0{,}1^2\cdot 0{,}3^2=0{,}0486$