Modellieren und Prognostizieren mit Funktionen
statistische Experimente rund ums Wasser

Wolfgang Riemer, Köln

Abstract:
Dass Fotos von Gartenschlauch - Fontainen und Springbrunnenanlagen „perfekte“ Parabeln zeigen, gehört zur mathematischen Allgemeinbildung - auch wenn die Begründung dafür manchem schwer fällt. Fragt man aber, wie eine Badewanne ausläuft gerät man ins Grübeln. „Je leerer desto langsamer“, sagt die Intuition. Bei Spontanumfragen (unter Mathelehrern) werden in der Regel von „linearer“ über „quadratisch“, „antiproportional“ bis hin zu „exponentiell“ alle in der Schulmathematik gängigen Modelle genannt. Diese Unsicherheit wird in Form eines Modellierungswettbewerbs in den Mathematikunterricht einer Jahrgangsstufe 9 hineingetragen, um Kenntnisse über das Modellieren mit Funktionen und auch den Umgang mit den Trendlinien von Tabellenkalkulationsprogrammen („Regressionsstatistik“) zu vertiefen.

2 Es begann mit einer Kanutour auf der Lahn


Das Wasser läuft aus


Schleuse Scheidt


Schleusenleiter

Abb. 1-3

30 Jungen und Mädchen sitzen bei einer Klassenfahrt mit 15 Kanadiern in einer Schleuse. Wie lange mag es wohl noch dauern, bis das Wasser auf der Talseite endlich ausgelaufen ist und Freddy (ein Schüler, der als unser „Schleusenwärter“, stets als erster die Schleusenleiter erklimmt), die Tore aufkurbeln kann?
Leider kamen wir – in der Schleuse sitzend und das Sinken des Pegels an den frei werdenden Sprossen der Leiter verfolgend - erst am Ende der Tour auf die Idee, um

die Wette zu schätzen, wie lange es wohl noch dauert, bis die Schleuse „ausgelaufen“ sein würde.

So nahm der mitpaddelnde Mathelehrer das Problem in Form eines auslaufenden „Wassergefäßes“ aus der Chemiesammlung mit in den Matheunterricht. Um Überschwemmungen zu vermeiden und an allen Gruppen die gleichen Daten anbieten zu können, wurde der Auslaufvorgang gefilmt. (Man stellt dazu einen Glaszylinder mit horizontalem Auslaufrohr und angeklebter Höhenskala ans Waschbecken und sorgt für einen ruhigen Hintergrund.)

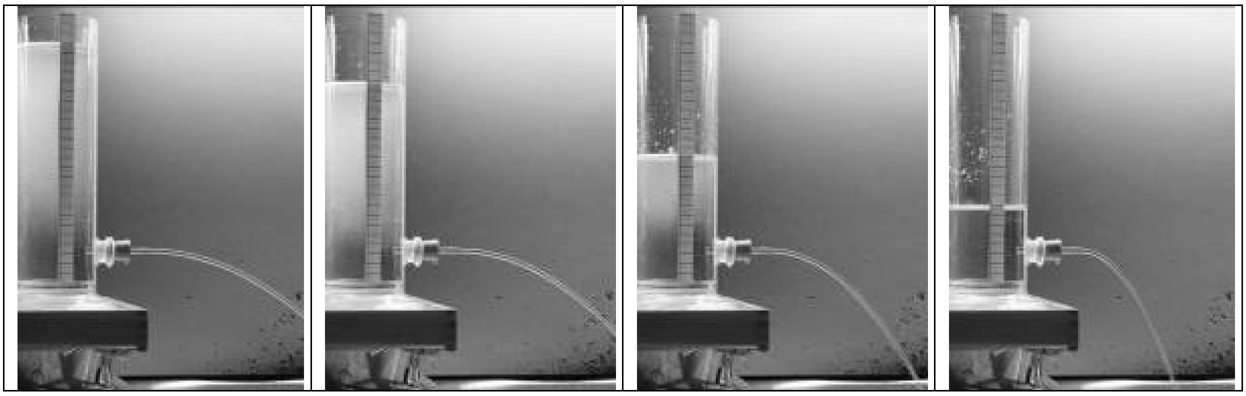


Abb. 4 Die unten gerade noch sichtbare Waschbeckenkante dient bei der Videoanalyse als Rechtsachse, die Hochachse verläuft durch das Ende des Auslaufrohrs, das bei P(0,a) liegt. a ist also die Höhe (in cm) des Auslaufrohres über der Waschbeckenkante.
((Hinweis: Es muss ein Koordinatensystem am Ende des Auslaufrohres eingezeichnet werden))

2 Modellierungswettbewerb

Wie man das „Schleusenproblem“ zu einem spannenden „Modellierungswettbewerb“ (von Klasse 7 bis Klasse 12) machen kann, zeigt der folgende Arbeitsauftrag.

a) I Datenphase
Ihr arbeitet in Kleingruppen gegeneinander:
Das Auslauf-Experiment (Video, an die Leinwand gebeamt) wird auf ein Signal hin gestartet. 40 Sekunden lang kann jede Gruppe mit Stoppuhren und dem für alle auf der Leinwand sichtbaren Höhenskala so viel messen wie gewünscht. Dann wird das Video gestoppt - oder das Ausflussrohr mit einem Kaugummi geschlossen, wenn man ein Realexperiment vorzieht.

Alternativ zum Beamen des Filmes im Plenum und dem Messen mit Stoppuhren kann man auch ein Videoanalyse-Programm einsetzen. Alle Gruppen bekommen dann den gleichen Filmausschnitt und können die Wasserstände mit Mausklicks in festen Zeitabständen präziser und mit mehr Ruhe messen.

b) II Modellierungsphase
Ihr bekommt Zeit, in euren Teams den Zeitpunkt vorherzusagen, zu dem die Tonne ausgelaufen sein wird. Ihr könnt auch ein Zeitintervall angeben, in dem der Zeitpunkt eurer Meinung nach mit Sicherheit liegen wird. Die Hochrechnungen werden zur festgelegten Zeit bei einer Jury abgegeben.

c) III Bewertungsphase
Nach Abgabe der Hochrechnungen und der Erläuterung der Modellbildungsideen wird der Film zu Ende gesehen. Gewonnen hat die Gruppe, deren Hochrechnung der Realität am nächsten kommt.

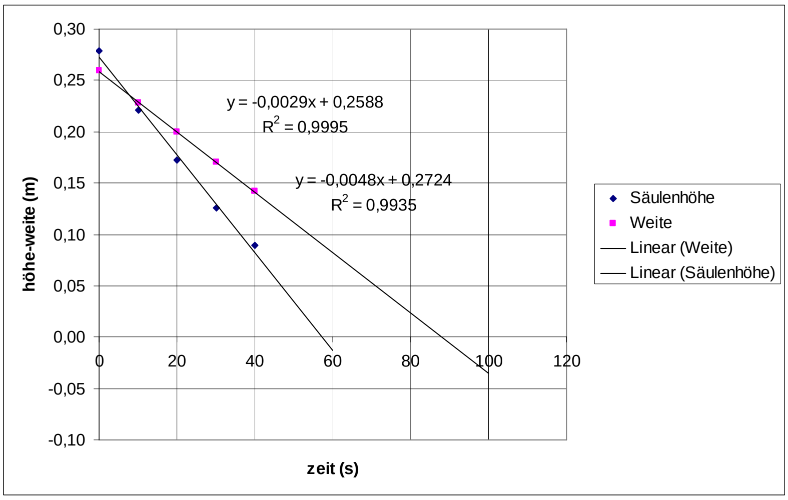
3 Modelle

Das didaktische Potenzial (vgl. Abschnitt 8), das in diesem Modellbildungs-Ansatz steckt, ist enorm. Je nach Vorkenntnissen werden Geraden, Parabeln, Hyperbeln, Wurzelfunktionen und Exponentialfunktionen benutzt. Spannend wird es dadurch, dass, dass es um echte Prognosen geht, die dann auch überprüft werden können. Was dabei herauskommen kann, wird im Folgenden skizziert.

3.1 lineares Modell

Mit Dreisatzrechnung (linearen Funktionen, Klasse 7) wird man versuchen,
a) den Flüssigkeitspegel h(t) oder
b) die Weite des Wasserstrahls w(t)
in Abhängigkeit von der Zeit t aus den gemessenen Daten linear zu extrapolieren und die Nullstelle der linearen Funktion bestimmen. „Schlauen“ Schülern reichen dabei zwei Messpunkte, die möglichst weit auseinander liegen. Wenn eine Tabellenkalkulation oder ein GTR verfügbar ist und der Umgang damit schon einmal geübt wurde, werden Schüler viele Messpunkte und Trendgeraden zur Prognose heranziehen.

T [s]	Höhe [m]	weite [m]
0	0,28	0,26
10	0,22	0,23
20	0,17	0,20
30	0,13	0,17
40	0,09	0,14



Alle 10 Sekunden werden Wassersäulenhöhe und Strahlweite gemessen

… und je nach Klassenstufe mit verschiedenen Modellen zur Prognose weiter verarbeitet ….
Hier wird mit linearen Trendlinien gearbeitet,

Abb. 5

3.2 Modellkritik

Wenn man wie in Abb. 5 sowohl bei der Wasserhöhe h(t) als auch bei der Weite des Strahls w(t) lineare Ansätze macht, dann passen die Prognosen gar nicht zusammen Das Wasser müsste, wenn man die Höhe h(t) extrapoliert, nach 58 Sekunden, wenn man die Weite w(t) extrapoliert, nach 90 Sekunden ausgelaufen sein. Irgend etwas kann hier nicht stimmen. Für Schüler ist das eine gewaltige Erkenntnis: Die Theorie der Dreisätze und der linearen Funktionen scheitert an der Wirklichkeit, obwohl doch alles genau berechnet wurde – im Beispiel sogar mit dem Computer.
Bei genauerem Hinsehen erkennt man, dass die Messpunkte von h(t) – im Gegensatz zu denen von w(t) - nicht auf einer Gerade zu liegen scheinen. Der Graph

scheint linksgekrümmt zu sein. Man wird der linearen Prognose für die Weite w(t) vertrauen, das lineare Modell für die Höhe h(t) verwerfen und (ab Klasse 9) nach einer „linksgekrümmten“ Funktion Ausschau halten.

3.2 exponentielles oder quadratisches Modell

Oft kommen Schülern auch ohne Messreihe – nur durch Nachdenken - Zweifel, ob der Wasserstand h(t) tatsächlich linear mit der Zeit fällt. Läuft nicht auch Öl oder Honig am Ende viel langsamer aus als am Anfang? Je nach Vorkenntnissen oder zuvor behandelten Funktionenklassen versuchen Schüler, für die Höhe in Abhängigkeit von der Zeit einen exponentiellen Ansatz - oder auch einen quadratischen. Aus zwei (möglichst weit entfernten) Messpunkten lässt sich eine Exponentialfunktion bestimmen, aus drei Messpunkten eine Parabel. Oder man greift wieder auf die Trendfunktionen der Tabellenkalkulation zurück. Was dabei herauskommt, zeigt Abb. 6.

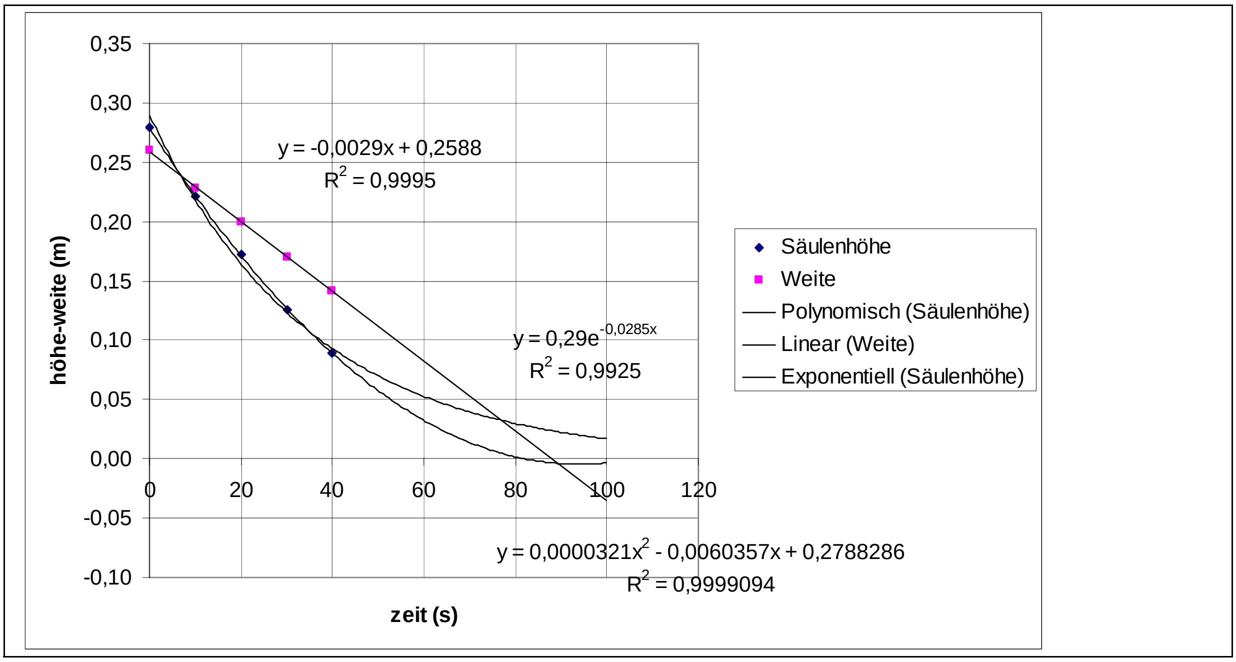


Abb. 6

Das Modell einer Exponentialfunktion scheint weniger brauchbar zu sein, denn „die Tonne“ ist ja nach endlicher Zeit wirklich leer, nicht erst nach unendlich langem Warten. Aber das quadratische Modell scheint brauchbar zu sein, da die Nullstellen der (extrapolierten) Höhenparabel h(t) und die (extrapolierte) Weitengerade w(t) nahe beieinander liegen. Ergebnis: Vermutlich wird „Die Tonne“ nach 80 bis 90 Sekunden ausgelaufen sein.

4 Kontrolle

Egal, nach welchem Modell man gerechnet und prognostiziert hat, die Fortsetzung des Films (oder das Herausziehen des Stöpsels) wird mit knisternder Spannung erwartet. Was dabei herauskommt, zeigt Abb. 6, hier mit dem Videoanalyzer ausgemessen.

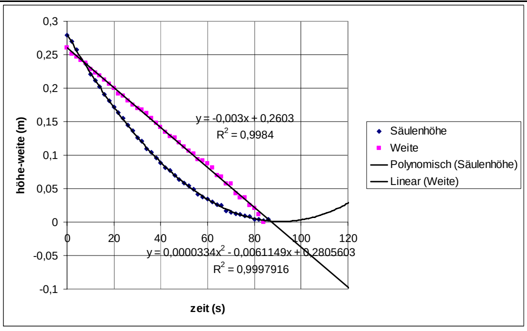


Abb. 7 Weite und Höhe in Abhängigkeit von der Zeit

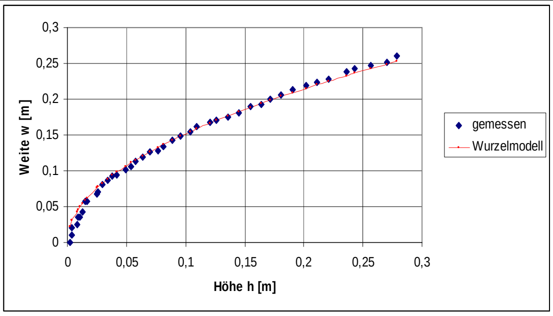


Abb. 8 Weite in Abhängigkeit von der Höhe

Schöner können Messwerte, Geraden und Parabeln kaum zusammenpassen.
Die Weite w(t) wird durch eine lineare Funktion, die Höhe h(t) durch eine Parabel mit Scheitelpunkt auf der Zeitachse beschrieben. Wenn man die Weite in Abhängigkeit von der Höhe studiert , stößt man auf eine Wurzelfunktion. Man kann also bei diesem Projekt den ganzen „Funktionenzoo“ der Schulmathematik besichtigen.

5 Exkurs in die Physik

(a) Torricelli: Die physikalische Theorie hinter diesem Experiment erschließt sich erst in der Sekundarstufe II. Das Gesetz von Torricelli beschreibt die Auslaufgeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Höhe h des Wasserstandes wie folgt:

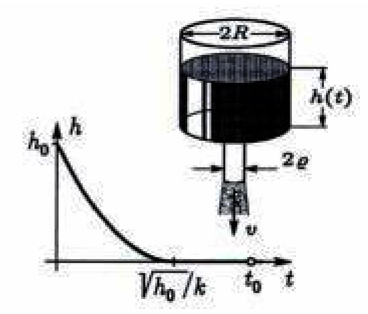


Abb. 8

Bei einem zylinderförmigen Wasserbehälter (Radius R), der bis zur Höhe h_0 gefüllt ist und sich durch ein kreisförmiges Loch (Radius ρ) im Boden unter dem Einfluss der Schwerkraft (Erdbeschleunigung g) entleert, gilt für die Ausströmgeschwindigkeit
$v(t) = -\sqrt{2g \cdot h(t)}$.

Begründung: nach dem Energieerhaltungssatz hat zu jeder Zeit ein (gedachter) Wassertropfen an der Oberfläche die Lageenergie $E_{pot} = m \cdot g \cdot h$, denn man müsse die die Gewichtskraft mg über die gesamte Strecke h aufwenden, um den Tropfen vom Boden auf die Oberfläche zu heben. Wenn dieser Tropfen das Gefäß dann verlässt, ist diese Lageenergie komplett in Bewegungsenergie $E_{kim} = \frac{1}{2} m v^2(t)$ umgewandelt worden. Und aus $E_{pot} = E_{kin}$ bzw. $mgh(t) = \frac{1}{2} m v^2(t)$ ergibt sich Torricellis Gleichung.

(b) Wurfparabel: Wenn man den Auslauf nicht (wie in Abb. 8) lotrecht, sondern (wie in Abb. 4) waagerecht auf der Höhe a über dem Boden anbringt, dann berechnet sich die Weite w(t) des „Wurfparabel-Strahls“ nach der Formel

$w(t) = \sqrt{\frac{2a}{g}} \cdot v(t) = \sqrt{\frac{2a}{g}} \cdot \sqrt{2g \cdot h(t)} = 2\sqrt{ag} \cdot \sqrt{h(t)}$ (*).

Begründung: für einen Tropfen, der mit der Horizontalgeschwindigkeit v_0 austritt, gilt $x(t) = v_0 \cdot t$ und $y(t) = a - \frac{1}{2} g \cdot t^2$. Man setzt dann die Fallzeit (bei $t = \sqrt{\frac{2a}{g}}$ wird y(t)=0) in x(t) ein und erhält die angegebene Formel für die Weite w(t).
Als Konsequenzen ergeben sich aus (*)
- h(t) ist genau dann eine quadratische Funktion von t, wenn w(t) linear ist
- Die Weite w hängt wurzelförmig von der Höhe h ab
- Der Streckfaktor k der Wurfparabel $k = \frac{a}{w^2} = \frac{1}{4g} \cdot \frac{1}{h(t)}$ ist antiproportional zur Höhe h.

Bis hier ist die Theorie in der Stufe 11 „machbar" - Man beachte dabei die Fülle der Funktionsklassen, die hier inhaltlich eine Rolle spielen.

(c) Differenzialgleichung: Um nachzuweisen, dass h(t) tatsächlich eine Funktion zweiten Grades ist, muss man eine Differenzialgleichung aufstellen: Da das Volumen, das „unten" abfließt dem Volumen gleicht, das die Flüssigkeit „oben" durch den sinkenden Flüssigkeitsspiegel verliert, gilt $R\dot{h}(t) = \rho \cdot v(t)$ und $\dot{h}(t) = \frac{\rho}{R} \rho \cdot v(t) = \frac{\rho}{R} \cdot \sqrt{2g} \cdot \sqrt{h}$. Mit $k = \frac{\rho}{R} \cdot \sqrt{2g}$ wird diese Differenzialgleichung gelöst durch $h(t) = (\sqrt{h_0} - \frac{1}{2} kt)^2$. Der Graph der Höhenfunktion h(t) ist also tatsächlich eine Parabel mit der Nullstelle (Entleerungszeit) $t_0 = \frac{R \cdot \sqrt{2}}{\rho \cdot \sqrt{g}} \sqrt{h_0}$. Dabei ist h_0 die Höhe der ursprünglichen Wassersäule.
(Dass die Differenzialgleichung der Form $\dot{h} = c \cdot \sqrt{h}$ durch eine Parabel gelöst wird, ist plausibel denn für $y = k \cdot x^2$ gilt schließlich auch $y' = 2k \cdot x = c \cdot \sqrt{y}$)

6 Exkurs in die Statistik:
Regressionsfunktionen, Bestimmtheitsmaß und der Excel-Solver
Die Aussagen, die Tabellenkalkulationen mit ihren Trendlinien liefern, sind intuitiv so eingängig dass sie in vielen Schulbüchern schon ab Klassenstufe 7/8 (im Zusammenhang mit deskriptiver Modellbildung als „black box") eingesetzt werden. Excel bietet neben linearen auch polynomiale, exponentielle und logarithmische Modelle an. Die Terme der Trendfunktionen und das Bestimmtheitsmaß r^2 werden auf Mausklick gleich mit geliefert (vgl. Abb. 7).
Wer als Lehrer seinen Schüler mehr als die „black-box" bieten möchte, kann mit Hilfe eines Kalkulationsblattes anhand des Zusammenhanges zwischen Säulenhöhe h und Strahlweite w (Abb. 9 und 10) erläutern, wie Excel beim Berechnen von Trendfunktionen vorgeht – und was es mit dem Bestimmtheitsmaß r^2 auf sich hat.

Wir machen die Modellannahme, dass die Weite w sich aus der Säulenhöhe h als durch Wurzelbildung berechnen lässt (Wurzelmodell $w = a \cdot \sqrt{h}$). Da Excel keine Wurzel-Trendlinien anbietet, sind wir tatsächlich gezwungen, „zu Fuß zu gehen". Zunächst werden (in Spalte M) mit dem Wurzelmodell die „theoretischen" Funktionswerte der gemessenen Höhen (Spalte C) berechnet. Dabei greift man auf den variierbaren Faktor a in Zelle N2 zurück. Die Formel ist in der ersten Zeile von Abb. 9 zu sehen. In Spalte N stehen dann die quadrierten Differenzen zwischen den gemessenen und den im Wurzel-Modell berechneten Weiten. Der Mittelwert dieser Abweichungsquadrate findet sich in Zelle N53 („Residuum"). Das Modell passt umso besser zur gemessenen Realität, je kleiner dieser Wert wird. Im Unterricht wird man dazu zunächst viele Werte für a ausprobieren, vielleicht auch mit einem Schieberegler. Wenn man das verstanden hat, wird man Excels Solver einsetzen. Dieser variiert die Startzelle (den Wert von a in N2) so, dass die Zielzelle (das

Residuum in N53) minimal wird. Die zugehörige optimale Wurzelfunktion sieht man zusammen mit den Messwerten in Abb. 10.

M6		=N$2*WURZEL(C6)		
	C	D	M	N
1			w=a*Wurzel(h)	
2			a=	0,47923007
3	höhe	weite		
4	h [m]	w [m]		
5			Wurzel-Mode	Abweichung²
6	0,279	0,26	0,25313148	4,7176E-05
7	0,27	0,251	0,24901525	3,9392E-06
8	0,257	0,247	0,24294649	1,6431E-05
9	0,243	0,242	0,23623661	3,3217E-05
10	0,236	0,238	0,23280916	2,6945E-05
11	0,221	0,228	0,22528911	7,3489E-06
12	0,211	0,223	0,22013307	8,2193E-06
13	0,202	0,219	0,21538713	1,3053E-05
14	0,191	0,213	0,20944054	1,267E-05
15	0,181	0,206	0,2038841	4,477E-06
16	0,172	0,2	0,19875053	1,5612E-06
17	0,164	0,192	0,19407339	4,2989E-06
18	0,155	0,189	0,18867307	1,0688E-07
19	0,145	0,181	0,18248538	2,2063E-06
20	0,136	0,175	0,17673132	2,9975E-06
21	0,126	0,17	0,1701098	1,2056E-08
22	0,121	0,168	0,16670044	1,6889E-06
47	0,004	0,011	0,03030917	0,00037284
48	0,002	0	0,02143182	0,00045932
49	0,004			
50				
51				
52	Varianz(h)	Varianz(w)		Residuum
53	0,0073119	0,00560042		4,9483E-05
54			r²	0,99995052

Abb. 9 Berechnung Wurzeltrendfunktion

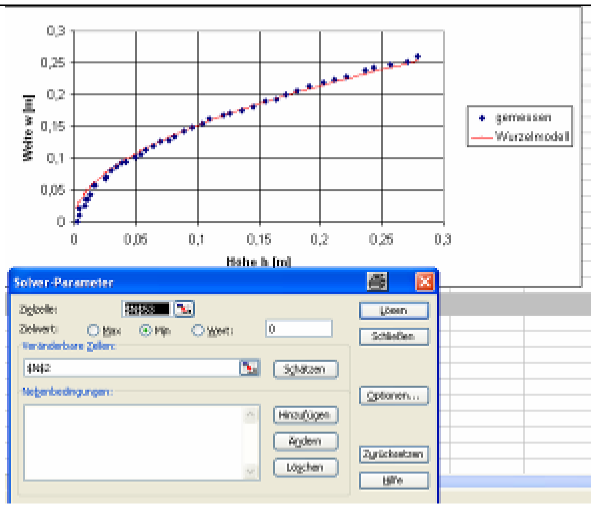


Abb. 10 Solver, Minimierung der Residuen

Das Bestimmtheitsmaß r², das Excel bei den „eingebauten Trendmodellen als Option mitliefert, erhält man durch die Formel $r^2 = 1 - \frac{\mathrm{Residuum}}{\mathrm{Varianz}(w)}$. Je näher es bei 1 liegt, desto besser passt das Modell zur gemessenen Realität. Das sieht man wie folgt ein:
Die Varianz der Messwerte w ist die mittlere quadratische Abweichung vom Mittelwert $\bar{w}$. Sie misst die Streuung der Messwerte um den Mittelwert (bzw. um die die konstante Funktion $f(h) = \bar{w}$.) das Residuum misst die Streuung um die Modell-funktion. Wenn das Modell gut zu den Messwerten passt, wird dieser Wert sehr klein, r² nähert sich dem Wert 1.
Wenn man den Term $\frac{\mathrm{Residuum}}{\mathrm{Varianz}(w)}$ als Anteil der durch das Modell nicht erklärten „Restvarianz“ an der gesamten Varianz deutet, wird r² zum Anteil der durch das Modell erklärten Varianz. Das Bestimmtheitsmaß misst also tatsächlich, wie sehr die „sekundären“ w-Messwerte über das Modell durch die „primären“ h-Messwerte bestimmt sind.

7 Frustprävention

Das Schleusenexperiment ließ unserem Schleusenwärter Freddy keine Ruhe. Er besuchte auf einem Abstecher auf der Fahrt in die Sommerferien „unsere“ Lahnschleuse ein zweite Mal - ohne Kanu - und stoppte die Zeiten, zu denen der Wasserpegel die einzelnen Sprossen der Schleusenleiter erreichte (Abb. 2). Aller Theorie zum Trotz wird die Pegelhöhe h(t) zumindest an dieser Schleuse nur schlecht durch eine Wurzelfunktion beschrieben (Abb. 12). Aber auch, wenn man den Auslauf in einem Gefäß nicht waagerecht, wie in Abb. 4 anbringt, sondern lotrecht, wie in Abb. 8 (die sinniger Weise einem Physikbuch [4] entnommen ist), erhält man keine Parabel, die die Zeitachse tangiert. Ein theoretische Physiker erklärte uns, dass das an den Verwirbelungen (Strudeln) liegt, die man auch von auslaufenden Badewannen her kennt. Nur bei gleichmäßigem Strömungsverhalten (Fachleute sprechen von „laminaren Strömungen“) gilt die Formel von Torricelli.

Abb. 11

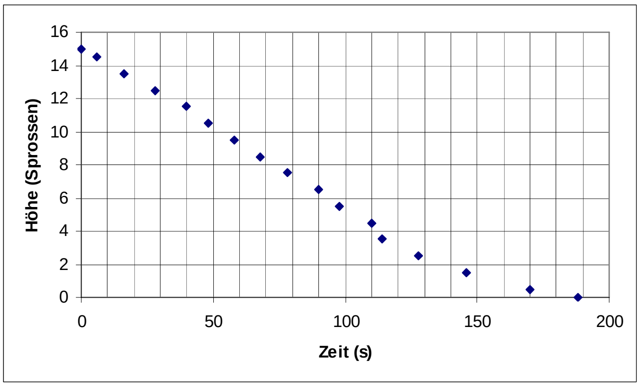


Abb. 12 keine Parabel

Abb. 13 Bürette

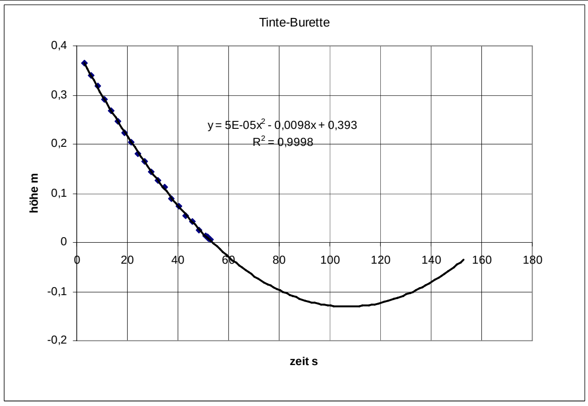


Abb. 14 Parabel tangiert die Zeitachse nicht

Mit diesem Hintergrundwissen sollte es auch für einen viel beschäftigten Lehrer kein Problem sein, experimentierfreudigen Schülern mathematische, statistische oder auch physikalische Aspekte der „auslaufenden Wassertonne“ z. B. als Facharbeitsthema anzubieten.

8 Onlienepegel - Datenquellen fürs Prognostizieren und Spekulieren
Wem das auslaufende Wassergefäß „zu trocken“ oder theoretisch ist, findet im Netz täglich aktuelle Pegelstände unzähliger Flüsse.

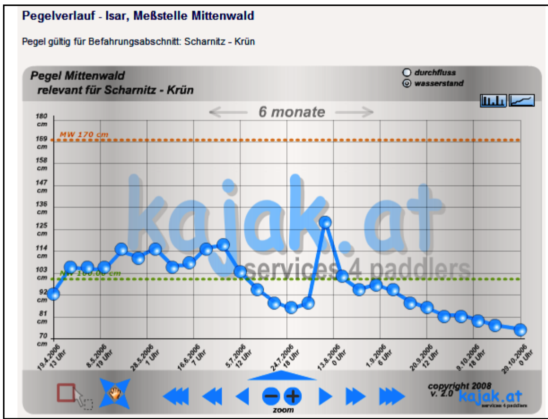


Abb. 15 Onlinepegel Isar bei Mittenwald

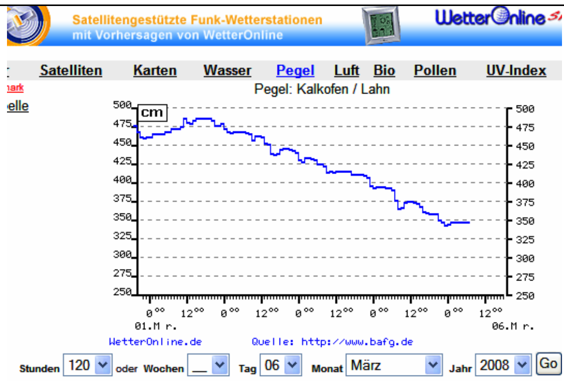


Abb. 16 Onlinepegel Lahn bei Kalkofen

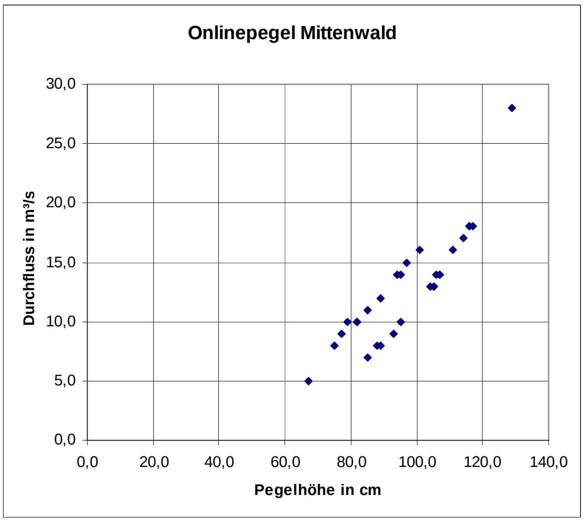


Abb. 17 In Mittenwald gehören zu einer Pegelhöhe zwei Durchflussmengen

Lassen Sie Ihre Schüler einmal in die Zukunft sehen, „Wetterfrosch“ spielen und anhand von Online-Daten den Wasserstand von morgen oder übermorgen vorhersagen. Dem Reiz eines Vergleichs mit der Wirklichkeit wird man sich nur schwer entziehen können. Manche Pegel - wie z. B. der Isarpegel in Mittenwald (Abb. 17) zeigen nicht nur die Pegelhöhe in cm, sondern auch die Durchflussmenge in m³/s an. Welche Überraschungen man erleben kann, wenn man nach funktionalen Zusammenhängen zwischen beiden Größen sucht, zeigt Abb. 17. Zu einer Pegelhöhe gehören offensichtlich zwei verschiedene Durchflussgeschwindigkeiten. Ob es an diesem Pegel zwei „Kanäle gibt, von denen manchmal nur einer geöffnet wird?.

8 Rückblick: Die „Riemer-Axiome“

Wer die „Axiome“ [1, 2] des Autors für einen lebendigen Stochastik-Unterricht kennt, in dem Hypothesen und Experimente als Klammer zwischen Wahrscheinlichkeitsrechnung und beurteilender Statistik stehen, der erkennt, dass sie den Hintergrund, bilden, auf dem auch die obigen Zeilen zur Modellbildung zu lesen sind.
Sie scheinen eine Art universeller Gültigkeit zu haben - in dem Sinne, dass Mathematik immer dann besonders spannend wird, wenn sie Beachtung finden.

- Mathematik lebt von Experimenten
- Experimente sollen echte Fragen beantworten
- Vor Auswertung der Experimente: sollte man Theorie erarbeiten, d.h.
  - spekulieren und Hypothesen formulieren
  - mit den Hypothesen (wie z. B. der Unterstellung linearer, quadratischer oder exponentieller Abhängigkeiten) Prognosen machen
- Wenn die Versuchsauswertung erst *nach der Theoriephase* erfolgt, gewinnt der Unterricht Tiefe, wenn man dagegen die Versuche *vor der Theoriephase* (direkt nach der Versuchsdurchführung) auswertet, wird der Unterricht - gemessen an den potentiellen Möglichkeiten - „öde“ (es schwindet der Zwang zum Nachdenken, zum Hypothesen bilden und zum Modellieren).
- Die Arbeit mit „harten“ (prognostischen) Modellen ist ungleich spannender als diejenige mit „weichen“ (deskriptiven) Modellen.

Literatur
[1] W. Riemer: Stochastische Probleme aus elementarer Sicht, Mannheim 1990.
[2] W. Riemer: Geschmackstests: Spannende und verbindende Experimente mathematiklehren 85 (1995).
[3] Lambacher-Schweizer Klasse 7 (Klett 734471 2007).
[4] Kurt Meyberg, Peter Wachenauer: Höhere Mathematik II

Die Excel-Blätter und Filme von auslaufenden „Wassertonnen“ findet man auf der Website des Autors www.riemer-koeln.de
Europaweite Online-Pegelstände gibt es in Hülle und Fülle bei www.wetter-online.de oder www.kajak.at

Der Autor unterrichtet Mathematik, Physik und Informatik am Heinreich-Mann-Gymnasium und ist Fach- und Hauptseminarleiter am Studienseminar für Lehrämter an Schulen, Köln

Dr. Wolfgang Riemer
August-Bebel-Str. 80
50259 Pulheim
w.riemer@arcor.de