Wolfgang Riemer

Videoanalyse im Mathematikunterricht

Mit (kostenlosen) Videoanalyse – Programmen kann man kurze digitale Filme von bewegten Objekten Bild für Bild ausmessen und „Funktionsgraphen erzeugen“. Wie das im *Mathematik*unterricht der Klassen 8 und 9 so geschehen kann, dass „Geraden“ und „Parabeln“ in spannendem Kontext und nachhaltig lebendig werden, wird an einem Beispiel skizziert, das sich für den regulären Mathematikunterricht ebenso eignet wie für einen Projekttag.

1 Temposünder und lineare Funktionen

Auf der Straße vor der Schule gilt „Tempo 30“. Wir stellen einen digitalen Fotoapparat, der auch „avi-Filme“ aufzeichnen kann, auf ein Stativ, richten die „Blickrichtung des Fotoapparates“ senkrecht zur Fahrbahn aus und filmen einige vorbeifahrende Autos, solche, die von rechts nach links und auch solche, die von links nach rechts fahren. Wichtig ist, dass als Maßstab ein Gegenstand bekannter Länge mit gefilmt wird.

Jede Schülergruppe bekommt einen dieser Filme (vgl. Abb. 1) zur Auswertung und soll „erforschen“, ob das gefilmte Auto sich an die Geschwindigkeitsbeschränkung gehalten hat. Bei hinreichend vielen Filmen bietet sich auch eine kleine Temposünder-Statistik an.

(In der Regel halten sich nur sehr wenige Autofahrer an Tempo 30, Überschreitungen um 50% oder gar 100% sind häufig Interessant ist aber auch die vergleichende Auswertung gleicher Filme durch verschiedene Schülergruppen und eine Diskussion über Messungenauigkeiten durch mangelnde Auflösung bzw. unpräzise Positionierung der Maus beim Ausmessen des Films).

Beispiel: In Abbildung 1 fährt ein Auto von rechts nach links. Wir messen in 17 Bildern (durch Anklicken mit der Maus) die Horizontalposition „x“ der vorderen Stoßstange in Abhängigkeit von der Zeit, wobei der Koordinatenursprung – als vertiefende Übung - einmal in den linken und einmal in den rechten Bildrand gelegt wurde. Das Videoanalyse-Programm rechnet mit Hilfe des Maßstabes, hier der Höhe des Verkehrsschildes, die Pixelpositionen auf dem Bildschirm in Meter um.

Abb. 1

Es entsteht eine Zeit-Positions-Tabelle, deren Daten man graphisch darstellt

Zeit in s	x in m	x in m
0	14,71	-4,23
0,067	13,90	-5,01
0,133	13,10	-5,81
0,2	12,26	-6,66
0,267	11,43	-7,48
0,333	10,58	-8,35
0,4	9,76	-9,20
0,467	8,89	-10,06
0,533	8,00	-10,89
0,6	7,16	-11,76
0,667	6,29	-12,65
0,733	5,42	-13,58
0,8	4,51	-14,44
0,867	3,60	-15,34
0,933	2,69	-16,23
1	1,84	-17,14
1,067	0,91	-18,03

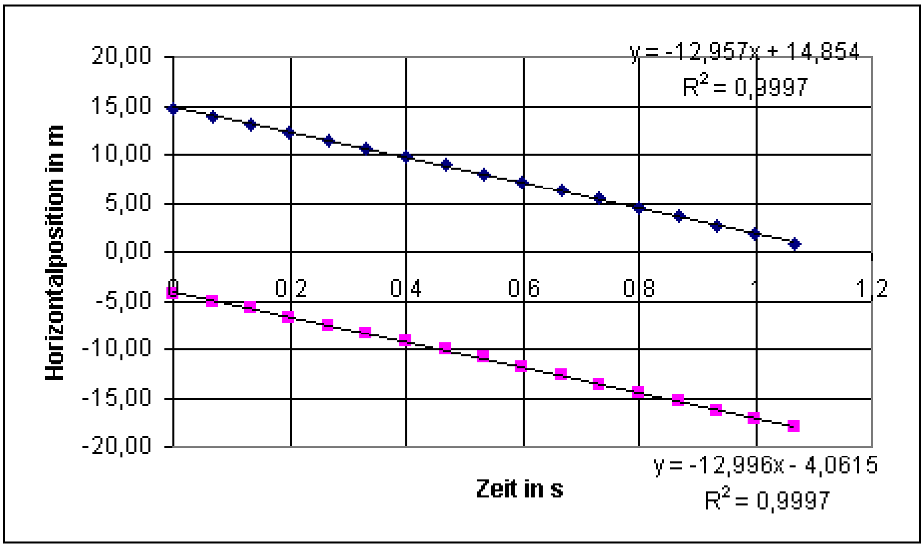

Abb. 2. Zwei Auswertungen des gleichen Films aus Abb. 1, wobei ein Schüler den Koordinatenursprung an den linken Bildrand gelegt hat (Spalte 2). Ein anderer hat ihn an den rechten Bildrand gelegt (Spalte 3).

Es ist (auch für den Mathelehrer) immer wieder faszinierend, wie genau die Zeit-Positions-Messpunkte auf einer Geraden liegen – und die Entdeckung, dass sich hinter der bekannten Geradensteigung $m = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ tatsächlich die Geschwindigkeit (in m/s) versteckt, macht diesen Begriff für viele Mittelstufenschüler „erfahrbar“. Auch die Tatsache, dass unterschiedliche Koordinatenursprünge zu einer Parallelverschiebung der „Bewegungsgeraden“ führen, ist eine „Entdeckung“ wert. Das Auto aus Abbildung 1 war – wie man an der Geradensteigung (ca. -13 m/s=-46,8 km/h) erkennt, für eine Tempo 30-Zone um mehr als 50% zu schnell.

2 Vollbremsungen und Quadratische Funktionen

2.1 Zeit-Weg-Diagramm: die „Bremsparabel“

Welche Konsequenzen haben solche Geschwindigkeitsüberschreitungen, wenn ein „Knirps“ aus Klasse 5 ohne zu gucken über den Zebrastreifen rennt? Genauer:

a. Wie lang wäre der Bremsweg des Autos bei 30 km/h?
b. Wie lang wäre er bei einer um 50% überhöhten Geschwindigkeit?
c. Mit welcher Geschwindigkeit würde der PKW, der bei 30 km/h gerade noch vor dem Zebrastreifen halten kann, einen „Knirps erwischen“, wenn er mit 50% überhöhter Geschwindigkeit fährt?

Zwei Schüler filmen in einer Freistunde den Vollbremsversuch beispielsweise ihres Mathelehrers auf einer abgelegenen Nebenstraße. Fig. 3 zeigt die Position eines Opel-Corsa bei einer Vollbremsung in Abhängigkeit von der Zeit. Es entsteht eine „perfekte „Bremsparabel“. (Sehr eindrucksvoll ist natürlich das Quietschen der Bremsen, dass von der Kamera mit aufgezeichnet wird.)

Wenn man die Messpunkte in der Grafik mit Maus-Rechtsklick markiert und Trendlinie – Polynomisch – Grad 2, Optionen - Gleichung einblenden anklickt, dann liefert Excel auch die Gleichung der „Trendparabel".)

t [s]	x [m]
0	21,5
0,07	20,30
0,13	19,10
0,20	18,03
0,27	16,87
0,33	15,76
0,40	14,64
0,47	13,59
0,53	12,64
0,60	11,57
0,67	10,75
0,73	9,82
0,80	8,99
0,87	8,25
0,93	7,51
1,00	6,85
1,07	6,21
1,13	5,61
1,20	5,05
1,27	4,58
1,33	4,10
1,40	3,75
1,47	3,46
1,53	3,11
1,60	2,82
1,67	2,52
1,73	2,35
1,80	2,21
1,87	2,06
1,93	2,02

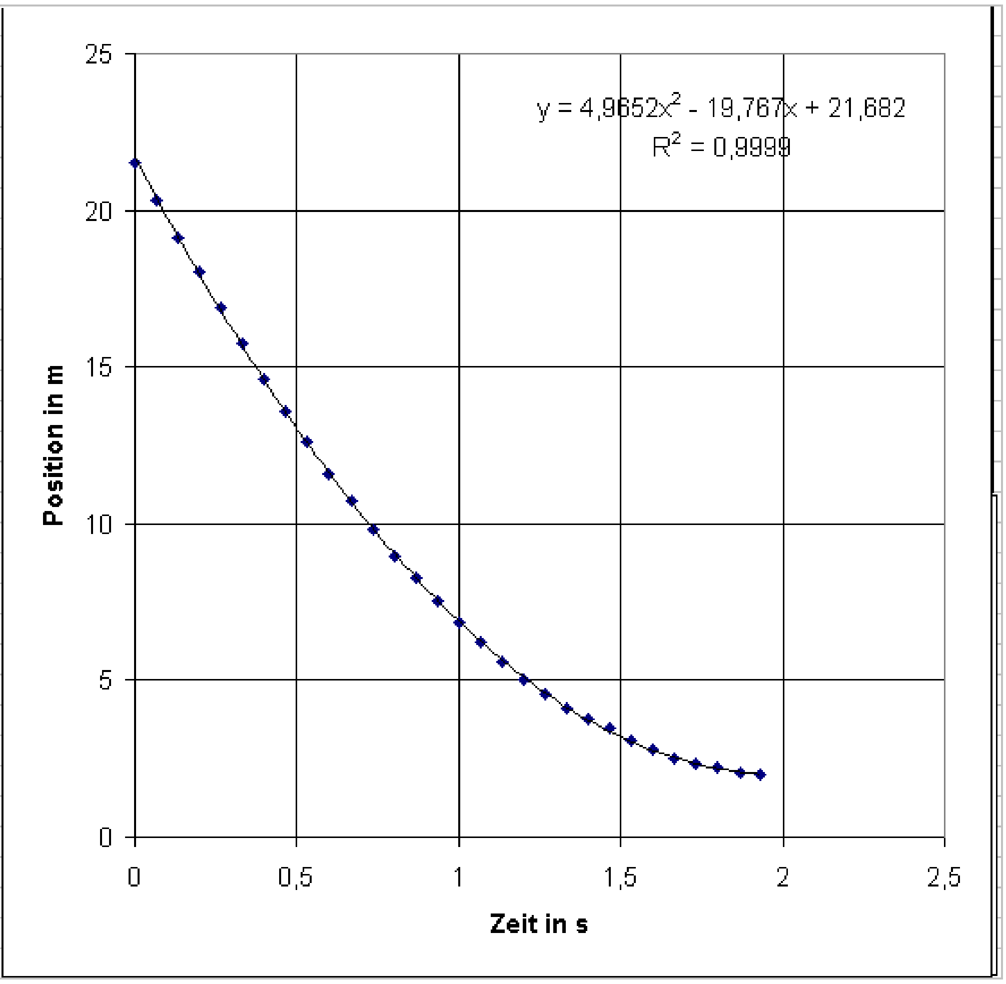

Abb. 3: Zeit-Positions-Diagramm zu einer Vollbremsung (PKW auf trockenem, sehr griffigen Asphalt)

Man entnimmt Abbildung 3:

- Das Weg-Zeit-Diagramm wird hervorragend durch eine Parabel beschrieben, bei welcher „der PKW im Scheitelpunkt zu stehen kommt". (Das bremsende Auto fuhr von rechts nach links die x-Koordinaten der Positionen wurden kleiner)
- Der Bremsweg betrug ca. 21,5m-2,0m =~19,5m
- Der Bremsvorgang dauerte 1,93s
- Die Geschwindigkeit zu Anfang des Bremsversuches betrug (21,5m-19,10m)/(0,13s-0s)~18,24m/s ~ 65km/h

2.2 Bremsweg und Geschwindigkeit

Die in 2.1 gestellten Fragen lassen sich dank der Videotechnik sämtlich *mit einem einzigen* Bremsversuch beantworten, denn aus je zwei aufeinander folgenden Filmbildern kann man die „momentane Geschwindigkeit" berechnen und mit der verstrichenen Zeit und dem restlichen Bremsweg bis zum Stillstand vergleichen. Es ergibt sich Abbildung 4. Die Spalten A und B wurden gemessen, die Spalten C und D hieraus berechnet:
In C4 steckt die Formel = - (B4-B3)/(A4-A3), in D4 die Formel =B4-B$32

t [s]	x [m]	v[m/s]	Brems s [m]
0	21,5		
0,07	20,30	18,24	18,28
0,13	19,10	17,07	17,08
0,20	18,03	16,66	16,01
0,27	16,87	17,07	14,85
0,33	15,76	16,78	13,74
0,40	14,64	16,22	12,62
0,47	13,59	15,03	11,57
0,53	12,64	15,18	10,62
0,60	11,57	14,05	9,55
0,67	10,75	13,13	8,73
0,73	9,82	13,28	7,80
0,80	8,99	11,73	6,97
0,87	8,25	11,09	6,23
0,93	7,51	10,51	5,49
1,00	6,85	9,70	4,83
1,07	6,21	9,34	4,19
1,13	5,61	8,76	3,59
1,20	5,05	7,68	3,03
1,27	4,58	7,15	2,56
1,33	4,10	6,28	2,08
1,40	3,75	4,78	1,73
1,47	3,46	4,82	1,44
1,53	3,11	4,82	1,09
1,60	2,82	4,35	0,80
1,67	2,52	3,50	0,50
1,73	2,35	2,33	0,33
1,80	2,21	2,17	0,19
1,87	2,06	1,46	0,04
1,93	2,02	0,00	0,00

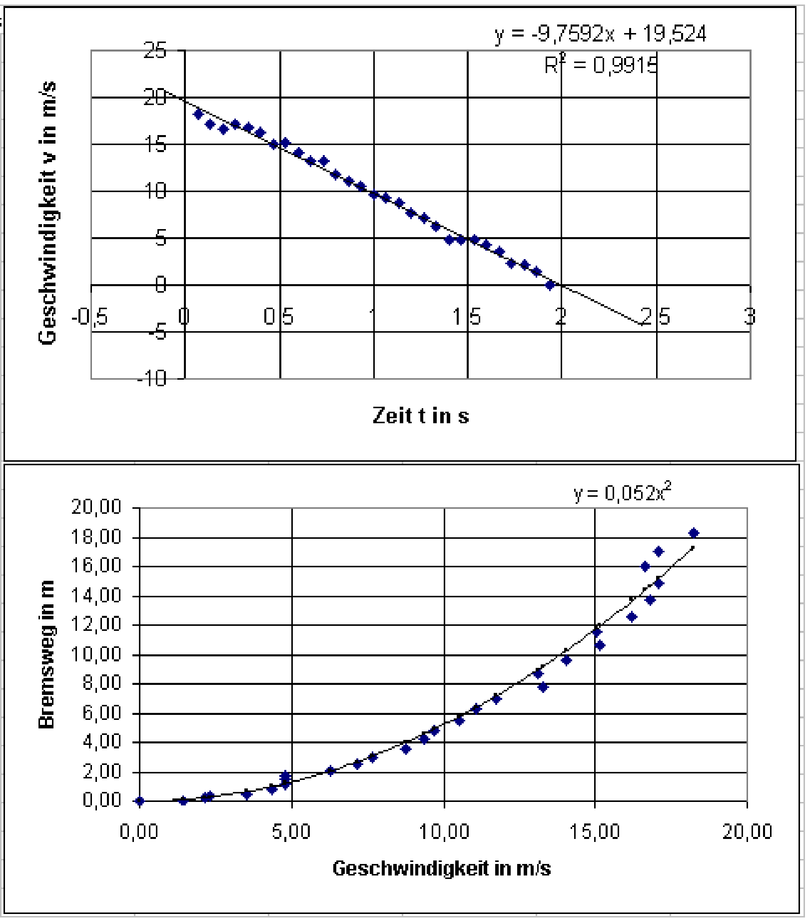

Abbildung. 4a, b Vollbremsung unter optimalen Bedingungen: trockener rauer Asphalt

Man entnimmt Abbildung 4b: Der PKW hat bei 30km/h=8,8m/s und optimalen Fahrbedingungen ca. 4m Bremsweg, bei einer um 50% höheren Geschwindigkeit (46km/h=12,8m/s) einen mehr als doppelt so langen Bremsweg (ca. 8,6m). Noch plakativer liest man ab: Doppelte Geschwindigkeit - vierfacher Bremsweg, dreifache Geschwindigkeit - neunfacher Bremsweg... und die Bedeutung quadratischer Zusammenhänge wird nachhaltig „semantisch unterfüttert".

Die Antwort auf die Frage c, also die Geschwindigkeit, mit der ein zu schneller PKW sein Unfallopfer erwischt, ergibt sich aus Fig. 3a. Die Geschwindigkeit beim Bremsen fällt linear mit der „Bremszeit". In der Zeit, in welcher ein „30km/h-PKW" steht, schafft es ein „45km/h-PKW", auf 15km/h abzubremsen, ein mit 60km/h fahrender PKW würde sein Opfer mit 30km/h erfassen.

2.3 Verkehrserziehung?

Wenn man Messungen mit Digitalkamera und Computer selber geplant, durchgeführt und ausgewertet hat, bleibt einiges „hängen" - über linearen Geschwindigkeitsabbau und quadratische Bremswege. Mamas oder Papas Fahrverhalten (später vielleicht sogar das eigene) wird durch die authentisch erworbene Fachkompetenz und „nervige Diskussionen mit dem Nachwuchs" sicher sehr viel nachhaltiger beeinflusst als durch „Schulbuch-Textaufgaben"

3 Anmerkung: Tabellenkalkulation, Trendparabeln, Bestimmtheitsmaß
Im Kontext realer Problemstellungen ist es sinnvoll, die in Tabellenkalkulationsprogrammen implementierten Werkzeuge wie das Zeichnen und Berechnen von Trendgeraden und Trendparabeln als „Black Box“ zu nutzen: Wegen der Anschaulichkeit und der guten Interpretierbarkeit sollte man die Ergebnisse im Rahmen eines Anwendungsprojektes zunächst nicht hinterfragen.
Schülern (oder Lehrern), die tiefer in Excel einsteigen und dem Plenum berichten möchten, eröffnet Abbildung 5 „Tür und Tor“.

Welche Parabel mit f(x)=ax²+bx+c passt optimal zur "x-y-Wertetabelle"?

a	0,07
b	0
c	0
Summe der Abweichungsquadrate	0,20407
Var(y)	1,62988
Var(d)	0,01273
R²=1-Var(d)/Var(y)	0,99219

x	y	f(x)	d: y-f(x)	d²
7,14	3,88	3,69	0,18	0,03
6,68	3,44	3,23	0,21	0,04
6,39	2,98	2,96	0,02	0,00
6,15	2,58	2,73	-0,15	0,02
5,61	2,16	2,27	-0,11	0,01
5,07	1,83	1,86	-0,02	0,00
4,73	1,49	1,62	-0,13	0,02
4,29	1,20	1,33	-0,13	0,02
3,90	0,92	1,10	-0,19	0,03
3,24	0,68	0,76	-0,07	0,01
2,72	0,49	0,54	-0,05	0,00
2,41	0,32	0,42	-0,10	0,01
1,83	0,17	0,24	-0,08	0,01
1,07	0,08	0,08	-0,01	0,00
0,58	0,02	0,02	0,00	0,00

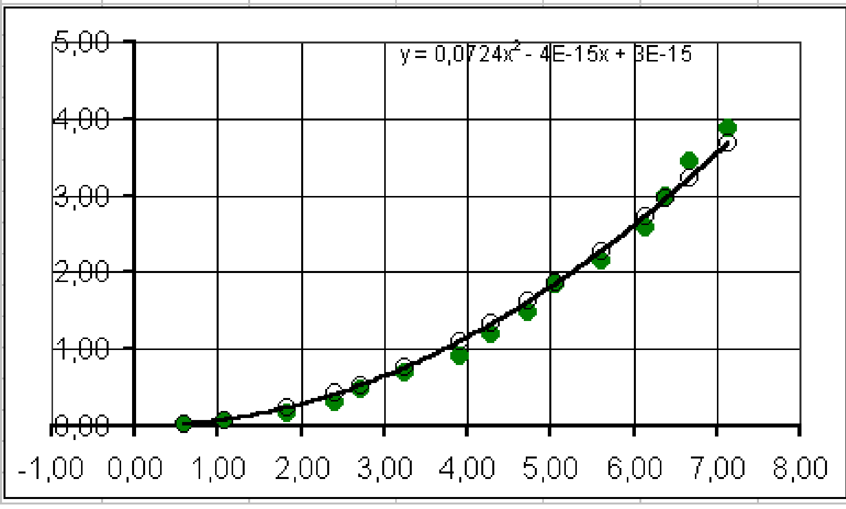

Abb. 5: Wie Excel Trendparabeln und das Bestimmtheitsmaß berechnet. (Die Messdaten stammen hier von einem Vollbremsversuch mit einem Fahrrad, das mit einer Rücktrittsbremse ausgestattet war. Die erste Spalte x enthält die Geschwindigkeit in m/s, die zweite Spalte y den bis zum Stillstand benötigten Bremsweg.

Erläuterung: Mit Hilfe der Schieberegler a, b, c kann man die Parabel mit f(x)=ax²+bx+c (leere Kreise) so einstellen, dass sie optimal zur Wertetabelle (Punkte mit vollen Kreisen) passt. Dabei bedeutet „optimal“, dass die Summe (Zeile 6) der Abeichungsquadrate $d_i^2=(y_i-f(x_i))^2$ (Spalte 5) minimal wird. Je näher der Quotient der Varianzen der Residuen und der y-Messwerte Var(d)/Var(y) bei Null liegt, desto besser liegt die Trendfunktion an den Messdaten und desto näher liegt das Bestimmtheitsmaß R²=1- Var(d)/Var(y) bei 1.

4 Organisatorisches

- In diesem Projekt wurde das Video-Analyseprogramm Viana benutzt. Man kann es für Unterrichtszwecke zusammen mit einer Bedienungsanleitung kostenlos unter [1] herunterladen. Es empfiehlt sich, vor Projektbeginn die Bedienung von Viana und den Export der Messdateien in eine Tabellenkalkulation im Plenum zu demonstrieren (noch besser von einem Schüler demonstrieren zu lassen) und die Bedeutung von Bildfrequenz, und Maßstab herauszuarbeiten.
- Um die affektive Bindung an die Thematik zu steigern, empfiehlt es sich, von Schülern selbst gedrehte Filme auswerten - und mit der Ergebnispräsentation auch vorführen zu lassen. Es reicht ein preiswerter digitaler Fotoapparat, der kurze Filme („Videoclips") im avi-Format aufzeichnen kann.
- Wegen des Sammelsuriums von Formaten, die sich hinter dem 10 Jahre alten „avi" verbergen, muss man aber vor Projektbeginn sicherstellen, dass die aufgenommenen Filme von Viana verarbeitet werden können. Je nach Windows-Konfiguration kann die Installation eines ebenfalls kostenlosen Kodierungsprogramms („codecs") erforderlich sein [1]. Hier kann man auch das kostenlose Programm vdub herunterladen, mit dem man Videos schneiden und verschiedene avi-Formate konvertieren kann.
- Sollte sich wider Erwarten keine Gelegenheit zur Untersuchung von PKW-Vollbremsungen bieten, kann man auch auf die Filme in von Vollbremsungen von Fahhrrädern, Mofas oder Skates (oder Bremsvorgänge vor Ampeln) untersuchen.

Ein spannendes - noch offenes - Forschungsprojekt ist die Untersuchung, ob „Rotfüchse" vor Ampeln noch einmal kräftig beschleunigen statt auf die Bremse zu treten?

[1] http://didaktik.physik.uni-essen.de/viana
Wer Viana im Physikunterricht einsetzen möchte, sei verwiesen auf
[2] http://www.lehrerfortbildung-bw.de/faecher/physik/gym/didaktik
[3] Das dynamische Excel Arbeitsblatt aus Abbildung 5 und Beispielfilme sind abrufbar unter http://www.riemer-koeln.de (Fachseminar-Projekte). Hier kann man auch nachlesen, wie einfach es ist, in Excel Schieberegler zu „bauen".

StD Dr. Wolfgang Riemer, w.riemer@arcor.de, unterrichtet Mathematik und Informatik am Heinrich-Mann-Gymnasium, Fühlinger Weg 4, 50765 Köln und ist Fachleiter am Studienseminar Köln.