

Realitätsbezüge im Mathematikunterricht

Gilbert Greefrath
Hans-Stefan Siller *Hrsg.*

Digitale Werkzeuge, Simulationen und mathematisches Modellieren

Didaktische Hintergründe
und Erfahrungen aus der Praxis



Springer Spektrum

Wahrscheinlichkeiten als Modelle, Simulationen und das „Konzept des Bezweifeln“

Wolfgang Riemer

Zusammenfassung

Oft stehen beschreibende Statistik, Wahrscheinlichkeitsrechnung und beurteilende Statistik auf verschiedenen Curriculumstufen unverbunden nebeneinander. Insbesondere werden Werkzeuge der beschreibenden Statistik (wie Median, Boxplot, Quartilabstand) in der Wahrscheinlichkeitsrechnung nicht mehr genutzt. Sie finden aber auch in der beurteilenden Statistik keine Fortsetzung. Der folgende Beitrag zeigt, wie man diese Gebiete durch Experimentieren und Simulieren von Anfang an so miteinander vernetzen kann, dass zentrale Grundvorstellungen beurteilender Statistik früh angelegt und kontinuierlich ausgebaut werden.

Besonders gut gelingt dies, wenn man ab Klasse 7 einen hypothetisch-prognostischen Wahrscheinlichkeitsbegriff pflegt, der sowohl den Laplaceschen wie auch den frequentistischen umfasst. Zufallsschwankungen und aktives Modellieren werden hier – anders als beim Laplaceschen Wahrscheinlichkeitsbegriff – als integraler Bestandteil des Wahrscheinlichkeitskonzepts erlebt.

Wenn Lernende anschließend Zufallsschwankungen untersuchen und versuchen, diese der Größe nach zu ordnen, erfinden sie Abweichungsmaße, die durch Festlegen von Schranken mithilfe von Simulationen zu Testgrößen werden und den Grund legen für das „Konzept des Bezweifeln“. Darunter wird eine intuitiv eingängige Vorstufe des Testens von Hypothesen verstanden, welche durch vorläufigen Verzicht auf die Begriffe Nullhypothese und Signifikanzniveau zentrale Ideen beurteilender Statistik schon in der Sekundarstufe I hervortreten lässt.

W. Riemer (✉)
ZfsL Köln
Pulheim, Deutschland

10.1 Der klassische Weg in die Stochastik

10.1.1 Vom Laplaceschen zum frequentistischen Wahrscheinlichkeitsbegriff – das starke Gesetz der großen Zahl

„Wahrscheinlichkeit“ gehört zu den schwierigeren Begriffen der Schulmathematik. Klassisch beginnt man mit dem Laplaceschen Konzept, in dem Wahrscheinlichkeiten für Experimente mit Münzen, Würfeln, Glücksrädern und Urnen als Anteile eindeutig festgelegt werden.

Man kann in diesem Konzept unmittelbar – ohne die Experimente durchführen zu müssen – mathematische Ergebnisse erhalten, interessante Glücksspielsstrategien miteinander vergleichen und auch anspruchsvolle kombinatorische Fragestellungen erschließen.

Beispiel 1

Auf dem Tisch liegen verdeckt drei Spielkarten: zwei schwarze und eine rote (Abb. 10.1).

Abb. 10.1 Es werden zufällig zwei der drei Spielkarten gezogen. Man achtet auf die Farben



Max wird zufällig zwei der drei Karten ziehen. Du darfst tippen (a) auf gleiche oder (b) verschiedene Farben. Bei einem richtigen Tipp gewinnst du. Untersuche, ob es günstiger ist, auf gleiche oder verschiedene Farben zu tippen. Untersuche, wie sich die Lage verändert, wenn Max aus vier Karten zieht, von denen zwei rot und zwei schwarz (oder drei rot, eine schwarz) sind.

Beispiel 2

Ein Beutel enthält drei Buchstaben O, P und A (Abb. 10.2).

Abb. 10.2 Drei Buchstaben werden zufällig gezogen und in der gezogenen Reihenfolge zu einem Wort zusammengelegt



Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass du beim Ziehen ohne Zurücklegen das Wort „OPA“ erhältst. Untersuche, wie sich die Wahrscheinlichkeit verändert, wenn der Beutel jeden der drei Buchstaben zweimal enthält.

In einem zweiten Schritt erweitert man den Wahrscheinlichkeitsbegriff auf nicht Laplace-sche Situationen (Experimente mit Reißzwecken, Kronkorken, asymmetrischen Würfeln etc. vgl. Abb. 10.3a, b), indem man feststellt, dass Wahrscheinlichkeiten auch als Grenzwerte relativer Häufigkeiten betrachtet werden können. Dahinter steckt das **starke Gesetz der großen Zahl**.

Es besagt: Die Folge der relativen Häufigkeiten konvergiert mit der Wahrscheinlichkeit 1 (also sicher) gegen den Wert der Wahrscheinlichkeit. Wenn man das im Unterricht

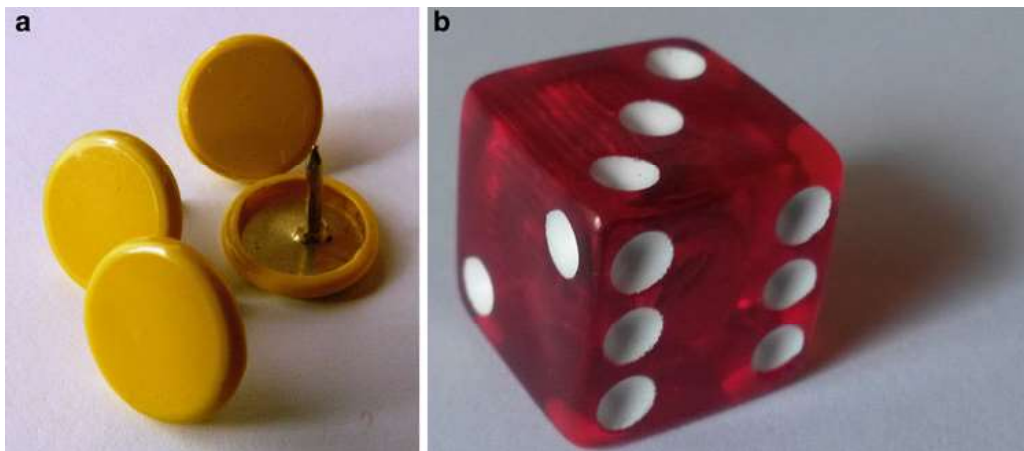


Abb. 10.3a,b Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Reißzwecken auf dem Kopf landen, lässt sich ebenso wenig nach Laplace berechnen wie die Wahrscheinlichkeiten der Seiten „unsymmetrischer Würfel“. Wegen der ausgeprägten Bohrlöcher ist Seite 1 schwerer als Seite 6. Man erwartet auf sehr lange Sicht etwas mehr Sechser als Einer

dokumentieren möchte, lässt man Lernende eine Münze sehr oft werfen und die Folge der relativen Häufigkeiten protokollieren.

Leider ist die Durchführung solcher Münzwurfserien wenig motivierend, weil (im besten Falle) etwas herauskommt, was niemand bezweifelt. Auch die Formulierung eines Gesetzes über *unendlich lange* Folgen, die es nur in der Vorstellung, nicht aber real gibt, führt ohne Grenzwertbegriff schnell zu Schwierigkeiten, wenn sie kurz und verständlich sein soll. Hier zwei Beispiele (vgl. auch Abb. 10.4):

Beispiel 3

„Wird ein Zufallsexperiment sehr oft durchgeführt, so stabilisieren sich die relativen Häufigkeiten in der Nähe ihrer Wahrscheinlichkeit“ (Pallack 2014, S. 100).

Beispiel 4

„Die in einer langen Versuchsreihe beobachtete relative Häufigkeit ist ein Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit des Ergebnisses. Er ist umso genauer, je länger die Versuchsreihe ist“ (Herd 2014, S. 62).

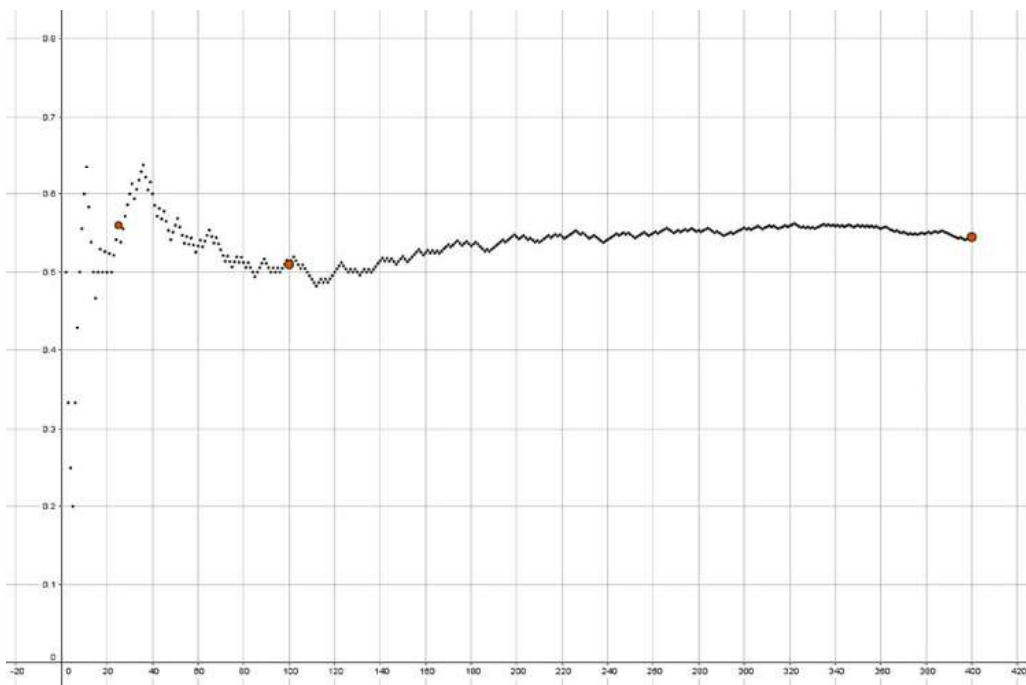


Abb. 10.4 400 Münzwürfe, Protokoll der relativen Häufigkeit der Seite „Zahl“. Der Widerspruch von Schülerseite ist vorprogrammiert: „Die relativen Häufigkeiten stabilisieren sich nicht bei 0,5 sondern bei 0,55 und man ist nach 400 Münzwürfen weiter von 0,5 entfernt als nach 100 Würfeln“. (Erstellt mit GeoGebra)

Wäre es in Beispiel 3 nicht fatal, wenn sich die relativen Häufigkeiten *nur in der Nähe* der Wahrscheinlichkeit stabilisieren würden – und passiert es in Beispiel 4 nicht viel häufiger als man glaubt, dass sich die relative Häufigkeit bei Erhöhung des Versuchsumfanges von der Wahrscheinlichkeit *entfernt*?

10.1.2 Zufallsschwankungen unter der Lupe – das schwache Gesetz der großen Zahl

Im Zusammenhang mit Zufallsschwankungen haben viele Lernende intuitiv die Vorstellung „Je mehr desto genauer“, d. h. je häufiger ein Zufallsexperiment ausgeführt wird, desto näher liegt die relative Häufigkeit bei der Wahrscheinlichkeit. Die Grundlage dieser Vorstellung quantitativ zu untersuchen ist sehr interessant und *deutlich spannender* als die Konvergenz von Folgen relativer Häufigkeiten in unendlichen Versuchsreihen.

Wir erforschen also statt der Konvergenz *einer* die Abnahme von Zufallsschwankungen *mehrerer* relativer Häufigkeiten bei Vervielfachung der Versuchszahl von 25 auf 100.

Wenn man dazu Boxplots nutzt und die Boxenlänge (den Quartilabstand) als Streuungsmaß verwendet, schlägt man gleichzeitig eine Brücke zur beschreibenden Statistik, die, wie die Beispiele 1 und 2 zeigen, ansonsten recht unverbunden neben der Wahrscheinlichkeitsrechnung stehen bleibt.

Vor Computer-Simulationen beginnt man *händisch*, damit die Lernenden besser nachvollziehen können, worum es in den Computersimulationen geht. Jeder wirft seine Münze 25 mal und notiert seine relative Häufigkeit h_{25} . Die Verlängerung des Versuchs um weitere 75 Würfe liefert die relative Häufigkeit h_{100} . Bei ca. 3/4 der Schülerinnen und Schüler liegt h_{100} näher bei 0,5, in 1/4 aller Fälle jedoch weiter weg, vgl. Abb. 10.4. Damit erhält man eine sinnvolle Interpretation der ansonsten bedenklichen Aussage aus Beispiel 4.

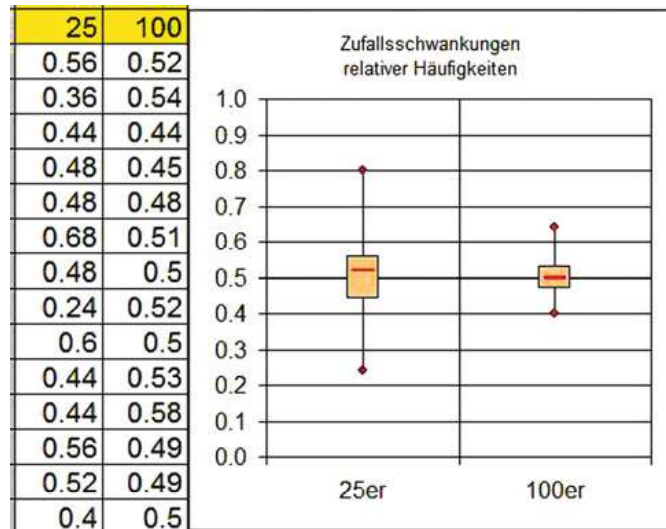
Händische Auswertung

Die relativen Häufigkeiten h_{25} einer Lerngruppe werden auf *Klebezetteln* notiert, gemeinsam an der Tafel sortiert und nach Ablesen der Kennwerte als Boxplot dargestellt. Ebenso für h_{100} , vgl. Abb. 10.5.

Der Median liegt beide Male in der Nähe von 0,5, je etwa die Hälfte der relativen Häufigkeiten liegt über bzw. unterhalb der Wahrscheinlichkeit.

Die relativen Häufigkeiten streuen also um die Wahrscheinlichkeit und die Streuung wird mit wachsendem Versuchsumfang kleiner. Dies passt zur Intuition.

Abb. 10.5 Boxplots zur Verteilung von relativen Häufigkeiten nach 25 bzw. 100 Münzwürfen



10.1.3 Computersimulation

Nach diesen händischen Vorerfahrungen sichert eine Computersimulation (Abb. 10.6) die Ergebnisse quantitativ ab. Jeder Klick auf den Schalter mit der Bezeichnung „los“ protokolliert eine neue Serie aus 400 Münzwürfen, die relativen Häufigkeiten nach 25, 100 und 400 Würfeln werden markiert und im linken Teil der Grafik durch Spuraufzeichnung festgehalten.

Im rechten Teil der Grafik entstehen die zugehörigen Boxplots. (In GeoGebra werden Boxplots nur horizontal gezeichnet, daher ist die rechte Grafik gegenüber der linken gekippt.)

Aktualisiert werden nach jedem Simulationsschritt:

- die Mediane der in den bisherigen Serien aufgetretenen relativen Häufigkeiten h_{25} , h_{100} und h_{400} (in Abb. 10.6 sind dies 0,52 bzw. 0,5 bzw. 0,5)
- der Faktor ($\approx 1/2$), um den sich die Längen der Boxen jeweils verkürzen (hier 0,57 bzw. 0,47)
- der Anteil der Serien, bei denen h_{100} näher bei 0,5 liegt als h_{25} (hier 78 %)
- der Anteil der Serien, bei denen h_{400} näher bei 0,5 liegt als h_{100} (hier 69 %).

Die Beobachtungen, die man den Simulationen wie in Abb. 10.6 entnehmen kann, werden festgehalten:

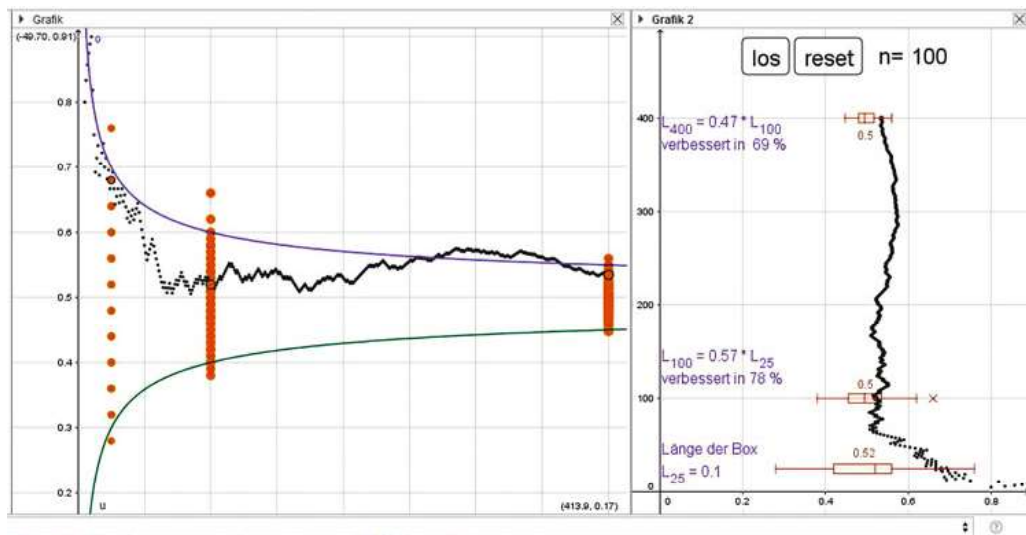


Abb. 10.6 Protokoll der relativen Häufigkeiten bei einer Serie aus 400 Münzwürfen. Die relativen Häufigkeiten nach 25, 100 und 400 Würfeln hinterlassen in GeoGebra Spurpunkte. Im rechten Teil der Abbildung entstehen die Boxplots der (hier 100) relativen Häufigkeiten. Im linken Teil ist zusätzlich der $1/\sqrt{n}$ -Trichter eingeblendet, der die 2σ -Intervalle um $p=0,5$ markiert, in denen die relativen Häufigkeiten mit ca. 95,4 % iger Wahrscheinlichkeit liegen. Wenn man den Versuchsumfang vervierfacht, dann halbiert sich die Länge der Box und die relativen Häufigkeiten liegen in etwa 2/3 aller Fälle näher bei 0,5. (Erstellt mit GeoGebra)

- (a) Die Mediane der relativen Häufigkeiten der Seite „Zahl“ liegen stets nahe bei 0,5. Die relativen Häufigkeiten streuen um die Wahrscheinlichkeit 0,5.
- (b) Die Streuung der relativen Häufigkeit – gemessen als Quartilabstand – halbiert sich bei Vervierfachung des Versuchsumfangs. Kurz: Viermal so viel – doppelt so genau.
- (c) In scheinbarem Widerspruch zu (b) gilt aber: *In ca. 30 % aller Münzwurfserien, verbessert man sich nicht bei Vervierfachung des Versuchsumfangs.*¹

¹ Wenn man 25 Münzwürfe durch 75 weitere zu 100 ergänzt, ist der Beitrag der ersten 25 Würfe an der Gesamtvarianz 1/4 (Bestimmtheitsmaß r^2). Die Korrelation zwischen h_{25} und h_{100} ist dann $r=0,5$.

10.1.4 Exkurs: das $1/\sqrt{n}$ – Gesetz

In der Sekundarstufe II wird man dem Spiralprinzip entsprechend diese Beobachtungen mit der Binomialverteilung und der 2σ -Regel, hinter der der Satz von de Moivre-Laplace steckt, vertiefen, indem man festhält:

$1/\sqrt{n}$ -Gesetz

Beim n -fachen Wurf einer fairen Münze liegt die relative Häufigkeit h_n fast immer (mit ca. 95,4 % Sicherheit) im Intervall $\left[0,5 - \frac{1}{\sqrt{n}}; 0,5 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$.

Das wurde in Abb. 10.6 durch Einzeichnen des Wurzeltrichters visualisiert. Wegen der Wurzel im Nenner halbiert sich auch die Länge des 95,4 %-Intervalls bei Vervielfachung des Versuchsumfanges und das experimentelle Ergebnis der Simulation wird so theoretisch unterfüttert.

Man braucht nur an den Vorzeichentest zu denken um zu erkennen, dass die Bedeutung dieses Gesetzes weit über das Münzenwerfen hinausweist (vgl. Riemer 1991). Das Konzept des Bezweifeln (Abschn. 10.3) deckt genau das ab, was die Bildungsstandards für das Fach Mathematik (KMK 2012) mit dem Schließen von einer Stichprobe auf die Grundgesamtheit für das Abitur einfordern, ohne dass man formal auf die Theorie des Hypothesentestens (mit den Begriffen Nullhypothese, Signifikanzniveau, Verwerfungsbereich ...) eingehen muss.

Beispiel 5 – Vorzeichentest

Nach der Fertigverpackungsrichtlinie muss bei Verpackungen, die das Eichzeichen e (vgl. Abb. 10.7) tragen, das aufgedruckte Gewicht g im Mittel stimmen.

Das prüft man mit dem Vorzeichentest, indem man eine größere Anzahl dieser Produkte (netto) nachwiegt und ein „+“ notiert, wenn das gemessene Gewicht über, ein „–“ wenn es unter dem angegebenen Gewicht liegt. (Dass man genau den angegebenen Wert enthält kommt praktisch nicht vor, wenn die Waage genau genug wiegt.) Beim Einhalten der Richtlinie, wenn der Median der Produktgewichte also tatsächlich g wäre, wären die Vorzeichen + und – verteilt wie die Seiten Kopf und Zahl einer fairen Münze. Die relative Häufigkeit von + müsste „fast immer“ im Intervall

$$\left[0,5 - \frac{1}{\sqrt{n}}; 0,5 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

liegen. Wenn sie außerhalb liegt, *bezweifelt* man, dass die Gewichtsangabe g im Mittel eingehalten wird.

sie in Gruppen zusammenarbeiten. Im Hintergrund dieses Zuganges steht von Anfang an das schwache, nicht das starke Gesetz der großen Zahl und die Grundvorstellung dass *Wahrscheinlichkeiten vom Menschen gesetzte Modelle* sind.

Schon Grundschülerinnen und -schüler besitzen nämlich ein präformales subjektivistisches Wahrscheinlichkeitskonzept, das noch nicht quantitativ arbeitet. Sie sprechen von „**Chancen**“ (Wittmann und Müller 2013, S. 14). Ereignissen, die selten vorkommen und die man eher nicht erwartet (wie im Rheinland: Schnee zu Weihnachten) spricht man „kleine Chancen“ zu. Die Chancen werden auch schon auf einer Skala (unmöglich – unwahrscheinlich – fifty/fifty – wahrscheinlich – sicher) eingeordnet. Mit dem Prozentbegriff in Klasse 5/6 werden Chancen quantifizierbar.

Kinder nutzen dann Sprechweisen wie „das ist 100 % sicher“ oder „du hast 0 % Chance“.

Wie der in Abschn. 10.2.2 skizzierte Unterrichtsgang zeigt, kann man mithilfe teilsymmetrischer Zufallsgeräte (Quader, Schraubenmuttern, Legosteine) diese präformalen Grundvorstellungen spekulierend und handelnd erweitern und mit beobachtbaren relativen Häufigkeiten verknüpfen. Der subjektivistische Wahrscheinlichkeitsbegriff lässt sich mit frequentistischen Vorstellungen zu einem auch für die beurteilende Statistik tragfähigen **hypothetisch-prognostischen** Wahrscheinlichkeitsbegriff ausbauen, der den **Laplaceschen** Wahrscheinlichkeitsbegriff als **Spezialfall** enthält.

10.2.2 Modellbildung – Unterrichtsgang konkret

Erste Stunde zur Wahrscheinlichkeitsrechnung: Man kommt in die Klasse und startet mit „Kopfrechnen zu Prozentzahlen“. Anschließend erhält jedes Kind einen Quader (Abb. 10.8), dessen Seiten mit 1 bis 6 so beschriftet sind, dass sich die Augenzahlen der Gegenseiten zu 7 addieren – wie bei einem richtigen Spielwürfel.

Abb. 10.8 Quader mit den Maßen $1,3 \times 2,0 \times 2,3 \text{ cm}^3$



10.2.2.1 Impuls

Natürlich wollen die Schülerinnen und Schüler mit den interessanten Objekten sofort experimentieren. Wenn man das zulässt vergibt man eine große Chance zur Begriffsbildung: Die Chance nämlich, dass die Lernenden den Unterschied zwischen Modell- und Realitätsebene tatsächlich erleben. Ein Impuls der folgenden Form bringt den Unterschied auf den Punkt:

„Schaut euch die Quader genau an und **schätzt** die **Chancen** der sechs Augenzahlen in Prozent – bevor ihr experimentiert: Ungefähr! Nach Gefühl!“

10.2.2.2 Reaktion

Die Schülerinnen und Schüler akzeptieren das Würfelverbot, kneifen Augen zusammen, tuscheln miteinander und nennen bereitwillig „Prozentzahlen“, von denen man einige an der Tafel festhält (Abb. 10.9). Dabei beachten sie intuitiv:

- a) Gegenseiten haben gleiche Chancen.
- b) Große Seiten haben große Chancen.
- c) Alle Chancen addieren sich zu 100 %.

10.2.2.3 Begriffsbildung

Das Missachten eines der drei Punkte (Johanna hatte erst die Chancen für 1 und 3 geschätzt und zu spät bemerkt, dass dann für 2 zu viel übrig bleibt; Alexa dachte an einen realen Versuchsausgang, nicht an Chancen) führt zu sehr fruchtbaren Diskussionen, in deren Verlauf der Unterschied zwischen Modellebene (Chance, Wahrscheinlichkeit, **vor** dem Versuch gefühlt) und Realitätsebene (Häufigkeit, **nach** einem Versuch) greifbar wird. Die geschätzten Chancen in den Tabellenzeilen drücken Erwartungen aus. Wir nennen sie „hypothetische“ **Wahrscheinlichkeitsverteilungen**. „Verteilungen“ deswegen, weil sich die 100 % auf alle möglichen Seiten verteilen, „hypothetisch“, weil wir nicht sicher sind.

Oft messen einige Schülerinnen und Schüler die Quader aus und richten die Wahrscheinlichkeiten so ein, dass sich die 100 % proportional zu den Flächen auf die Quaderseiten verteilen (Abb. 10.9, Zeilen 8–10). Die Diskussion kann abgeschlossen werden durch eine Abstimmung über die Glaubwürdigkeit der notierten Verteilungen, wobei viele Schülerinnen und Schüler an der „genau berechneten“ Hypothese (Abb. 10.9, Zeile 10) zweifeln, weil ihnen die Werte für 1 und 2 zu nahe beieinander liegen und für 3 zu wenig übrig bleibt. Tatsächlich zeigt sich, dass die Quaderwahrscheinlichkeiten *nicht* proportional zu den Seitenflächen sind.

Man beachte: Die intuitiv vertraute Glaubwürdigkeit gehört in den Bereich der subjektiven Wahrscheinlichkeiten, die im Laplaceschen Konzept keinen Raum haben.

10.2.2.4 Experimentieren

Nach der Phase des Vermutens erwartet man die Ergebnisse eines Experiments – anders als beim Münzen werfen in 1.1 – mit Spannung. Jeder würfelt 100-mal. Die Ergebnisse

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Würfeln mit Quadern	0,2l Würfelbecher auf den Tisch gestülpt							Glaub-
2	einige Schätzungen	1	2	3	4	5	6	Σ	würdigk.
3	Rene'	10%	5%	35%	35%	5%	10%	100%	30%
4	Stefan	15%	10%	25%	25%	10%	15%	100%	10%
5	Alexa	10%	12%	35%	20%	15%	8%	100%	0%
6	Joanna	15%	15%	20%	20%	15%	15%	100%	0%
7	Jasmin	15%	5%	30%	30%	5%	15%	100%	50%
8	Kantenlängen (Breite x Länge x Tiefe) in cm				2.3	2	1.3		
9	Fläche in cm ²	2.99	2.6	4.6	4.6	2.6	2.99	20.38	
10	Fläche in %	14.67	12.76	22.57	22.57	12.76	14.67	100	10%
11	Schätzungen und "berechnete Proportionalitätshypothese"								
12									
13	Patrick	10	6	28	41	4	11	100	
14	Daniel	6	7	35	45	4	3	100	
15	Binoy	7	4	37	34	1	17	100	
16	Tobias	3	6	48	33	6	4	100	
17	Michael	12	0	28	42	7	11	100	
18	abs. H.	38	23	176	195	22	46	500	
19	%	7.6%	4.6%	35.2%	39.0%	4.4%	9.2%	100%	
20									
21	Paula	11	6	34	32	7	10	100	
22	Elaine	14	10	28	24	9	15	100	
23	Marie	4	6	41	32	11	6	100	
24	Marga	10	6	34	29	7	14	100	
25	Sandra	7	4	30	37	4	18	100	
26	abs. H.	46	32	167	154	38	63	500	
27	%	9.2%	6.4%	33.4%	30.8%	7.6%	12.6%	100%	
36									
57	Summe (27 Kinder)	279	207	834	883	204	293	2700	
58	%	10.3%	7.7%	30.9%	32.7%	7.6%	10.9%	100%	
59									
60	Geschätzte Wahrscheinlichkeiten								
61	brauchbare "Hypothese"	11.0%	8.0%	31.0%	31.0%	8.0%	11.0%	100%	
62	brauchbare "Hypothese"	10.5%	8.0%	31.5%	31.5%	8.0%	10.5%	100%	
63	Würfelergebnisse einiger 5er-Gruppen, konsensfähige Wahrscheinlichkeiten								

Abb. 10.9 Wahrscheinlichkeiten als Chancen schätzen und im Modellbildungskreislauf verbessern

werden in 5er-Gruppen zusammengefasst (Abb. 10.9, Zeilen 18 und 26, weitere Gruppenergebnisse sind ausgeblendet), dann langsam zum Mitschreiben ins Heft diktiert und simultan am Beamer kontrolliert. *Durch die Verlangsamung beim Mitschreiben entsteht ein Gefühl für die Zufallsschwankungen, die dann ganz bewusst wahrgenommen werden. Man erlebt, dass sie sich durch Bilden von 5er-Gruppen verkleinern, aber nie ganz verschwinden!* Als Abschluss einigt man sich auf brauchbare (symmetrische) Wahrscheinlichkeitsverteilungen, in die man sehr viel mehr Vertrauen hat als in die zuvor „aus dem

hohlen Bauch heraus geschätzten“ (Zeilen 61–62 von Abb. 10.9). *Die Wahrscheinlichkeiten bleiben aber vom Menschen gesetzte Hypothesen, die gut zur Wirklichkeit passen ...* und im Sinne des Modellierungskreislaufs möglicherweise durch weitere Versuche noch verbessert werden können. Das „Erlebte“ fasst man wie folgt zusammenfassen:

10.2.2.5 Das bleibt hängen („Merksatz in Schülersprache“)

- (a) Wahrscheinlichkeiten sagen relative Häufigkeiten voraus. Sie sind gut **festgelegt**, wenn die (durch Zufallseinflüsse schwankenden) relativen Häufigkeiten gleichmäßig um die Wahrscheinlichkeit streuen, also etwa gleich oft über wie unter der Wahrscheinlichkeit liegen.
- (b) **Wahrscheinlichkeiten** „leben“ *vor* der Datenerhebung als **Modelle** der Wirklichkeit „im Kopf“. Sie spiegeln *Symmetrien genau* wider. **Relative Häufigkeiten** entstehen erst *nach* der Datenerhebung, sie „leben“ in der „**Realitätsebene**“. Sie spiegeln wegen der Zufallsschwankungen *Symmetrien nur näherungsweise* wider.

Diese Modellierungssicht auf Wahrscheinlichkeit hat im Hinblick auf die Förderung von Grundvorstellungen beurteilender Statistik (vgl. Abschn. 10.3) Vorteile gegenüber einer „Definition“ als Grenzwert relativer Häufigkeiten unendlich langer Versuchsserien, die es real nicht gibt. Die Schülerinnen und Schüler haben erlebt, dass Modelle, die nicht passen, bezweifelt und anschließend verbessert werden. Zumindest sollte man dem Laplaceschen dieses hypothetisch-prognostische Modellierungskonzept als Erweiterung an die Seite stellen.

10.3 Wenn die Abweichungen zu groß werden, beginnt man zu zweifeln

Würfel und Münze: Wer sie wirft, der spielt mit wichtigen Modellen (Sachs 1999, S. 6).

Das Bezweifeln von Behauptungen ist aus dem Alltag geläufig. Immer dann, wenn Beobachtungen nicht zu ihnen passen, beginnt man, an diesen Behauptungen zu zweifeln. Dieser Zusammenhang ist der Schlüssel zum Verständnis beurteilender Statistik. Nur dass die Behauptungen dort Hypothesen heißen und das Bezweifeln Verwerfen genannt wird. Wenn man statt Verteilungen von Testgrößen zu berechnen, Simulationen nutzt und deren Ergebnisse deutet, lässt sich Bruners Paradigma auch für die beurteilende Statistik hervorragend einlösen:

„Jedem Kind kann auf jeder Entwicklungsstufe jeder Lehrgegenstand in einer intellektuell ehrlichen Form gelehrt werden“ (Bruner 1973, S. 44).

In der Tat haben Schülerinnen und Schüler, die nach der Konzeption aus Abschn. 10.2 in die Stochastik eingestiegen sind (oder die das $1/\sqrt{n}$ -Gesetz gemäß 1.4 genutzt haben), intuitiv schon beurteilende Statistik erlebt: Die Gültigkeit der Quaderhypothesen von Alexa, Johanna und Stefan wurde angezweifelt, genau wie die Hypothese der Proportionalität zwischen Wahrscheinlichkeiten und Flächeninhalten. Die Abweichungen zwischen den erwarteten und den beobachteten Häufigkeiten waren gefühlsmäßig einfach zu groß. Dieser Gedankengang wird nun mithilfe von Simulationen – über das Gefühl hinaus – auf eine sichere Basis gestellt.

Dabei dient der Würfel, nicht die Münze, als Untersuchungsgegenstand, weil er zum Entdecken, Erforschen und Vergleichen vieler interessanter Testgrößen einlädt.

10.3.1 Vermuten und bezweifeln

Wenn man wie in Abschn. 10.2 beim Quader den Stichprobenumfang beliebig erhöhen kann, braucht man genau genommen gar keine beurteilende Statistik. Man braucht sie erst, wenn man gezwungen ist, Schlüsse aus relativ kleinen Stichproben fester Länge (wir beschränken uns auf $n=120$) zu ziehen. Man beginnt aus lernpsychologischen Gründen wieder mit Vermutungen und holt die Lernenden mit dem Arbeitsauftrag 1 bei ihren Intuitionen ab.

Arbeitsauftrag 1

In Abb. 10.10 sind 16 Häufigkeitsverteilungen der Augenzahlen 1...6 aufgelistet.

- (a) Notiere in der Leerspalte bei jeder der Verteilungen, ob du *gefühlsmäßig*
 - (+) es für gut möglich hältst
 - (o) unsicher bist
 - (–) bezweifelst,
 dass sie beim **120**-maligen Rollen eines fairen Würfels entstanden sein *könnten*, bei dem alle Augenzahlen gleich wahrscheinlich sind.
- (b) Vergleicht und diskutiert eure Bewertungen in Kleingruppen und bringt die 16 Verteilungen so in eine Reihenfolge dass gleichmäßige mit der Bewertung „+: gut möglich“ am Anfang, ungleichmäßige mit der Bewertung „–: bezweifeln“ am Ende stehen.
- (c) Erfindet eine geeignetes *Abweichungsmaß*, mit dem man eine Reihenfolge wie in (b) auch rechnerisch festlegen könnte – und erläutert, wann ihr euch in eurer Gruppe für Bezweifeln (–) entscheidet.

Abb. 10.10 Häufigkeitsverteilungen der Augen beim 120-maligen Würfeln. Die farblichen Unterlegungen links und die Spalten *rechts* der Leerspalte gehören nicht zur Aufgabenstellung. Ihre Bedeutung wird unten erklärt, ebenso die Bedeutung der letzten Zeile

	1	2	3	4	5	6	+/-	g	s	q	t	u	a
1	37	42	15	9	12	5		22	78	1208	60	37	4
2	23	20	18	21	15	23		5	14	48	2	8	0
3	12	23	18	11	30	26		10	38	294	15	19	1
4	28	25	41	11	7	8		21	68	924	46	34	3
5	31	4	4	26	33	22		16	64	842	42	29	4
6	22	21	29	13	12	23		9	30	208	10	17	0
7	23	25	19	24	17	12		8	24	124	6	13	0
8	16	18	22	27	17	20		7	18	82	4	11	0
9	10	24	26	12	24	24		10	36	248	12	16	1
10	20	17	22	24	20	17		4	12	38	2	7	0
11	33	19	12	21	22	13		13	32	288	14	21	1
12	4	13	28	16	29	30		16	54	566	28	26	2
13	26	12	12	24	23	23		8	32	198	10	14	0
14	13	17	0	51	29	10		31	80	1600	80	51	3
15	22	7	7	33	29	22		13	52	596	30	26	3
16	9	41	52	1	0	17		32	106	2356	118	52	5
Benchmark (95%)								11	32	220	11	18	1

10.3.2 Abweichungen messen Verteilungen sortieren

Das intuitive Sortieren der Verteilungen gemäß Arbeitsauftrag 1b gelingt sehr gut. Bei der Suche nach einer Messgröße, mit der man die Ungleichmäßigkeit, also die Größe der Abweichungen von der Gleichverteilung *messen* kann, sind der Kreativität wenige Grenzen gesetzt.

In der Regel werden viele brauchbare Vorschläge gemacht, z. B:

- g:** die *größte* Abweichung der 6 Häufigkeiten vom Sollwert 20
- s:** die *Summe der Beträge* aller Abweichungen vom Sollwert 20
- q:** die *Summe der Quadrate* aller Abweichungen vom Sollwert 20
- $t = q/20$:** ist genauso gut wie *q*, aber numerisch handlicher²
- u:** der Unterschied zwischen der größten und der kleinsten Häufigkeit oder
- a:** die Anzahl der Augenzahlen, die besonders selten (≤ 10 mal, in Abb. 10.10 blau markiert) oder besonders häufig (≥ 30 mal, in Abb. 10.10 gelb markiert) auftraten.

² Die Tatsache, dass man die Chiquadrat-Testgröße *t* erhält, wenn man *q* durch die Konstante $np = 120/6 = 20$ teilt, kann man mitteilen, auch dass diese Division bewirkt, dass die kritische Grenze vom Versuchsumfang *n* unabhängig wird. Das ist für die Statistik praktisch, aber für die Entwicklung statistischer Grundvorstellungen und ein Verstehen des Prinzips des Bezweifeln von Hypothesen unerheblich.

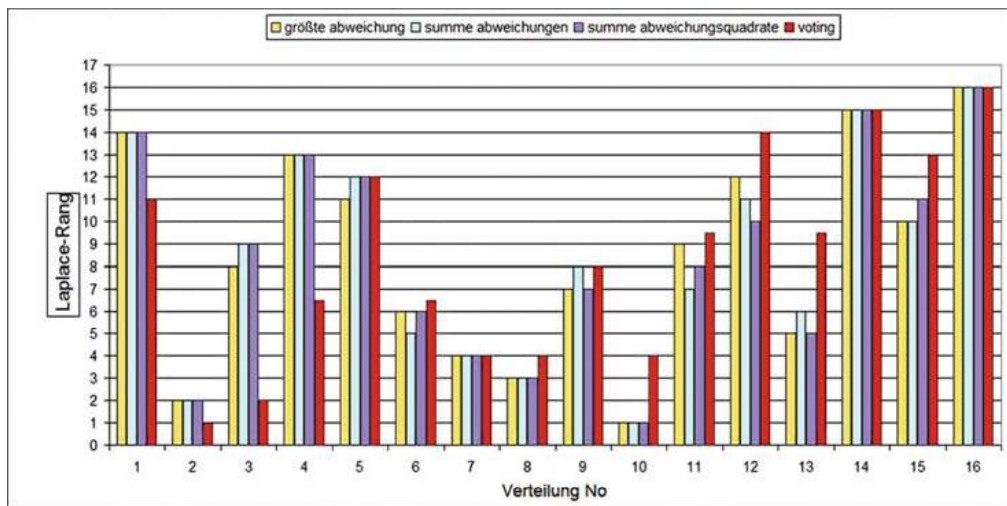


Abb. 10.11 Suche nach Messgrößen. Hier wurden die 16 Verteilungen aus Abb. 10.10 gemäß der Messgrößen g (größte Abweichung), s (Summe aller betraglichen Abweichungen) und q (Summe der Quadrate aller Abweichungen) aufsteigend sortiert. Die Höhe der Säulen zeigt die Position der zugehörigen Verteilung – zum Vergleich ist auch das Ergebnis „voting“ der intuitiven Sortierung einer Klasse 8 angegeben. Die Unterschiede in den Sortierungen sind gering. Insbesondere zeigt sich, dass alle Messgrößen mit unserer Intuition gut korrespondieren

Die Gruppen bestimmen die Abweichungsmaße für die 16 Verteilungen (vgl. die rechten Spalten von Abb. 10.10) arbeitsteilig und sortieren sie anschließend aufsteigend. Abb. 10.11 zeigt für die Abweichungsmaße g , s , q und t , dass

- sich die entstehenden Sortierungen nur wenig voneinander unterscheiden
- sie die Primärintuition gut widerspiegeln.

Um letzteres zu belegen, wurden die in Arbeitsauftrag 1(a) für jede Verteilung die Häufigkeiten der Bewertungen $+o$ – mit den Faktoren 1, 2 und 3 gewichtet und danach summiert. Die zugehörige Sortierung wurde zum Vergleich in Abb. 10.11 über die roten Balken „voting“ visualisiert.

10.3.3 Simulieren

Um Sicherheit bei der Einschätzung zu bekommen, schärft man mithilfe realer und simulierter Experimente gemäß Arbeitsauftrag 2 das Gefühl dafür,

- welche Zufallsschwankungen bei fairen Würfeln noch normal sind und
- welche Werte die Abweichungsmaße (g , s , q , t , u , a) normalerweise annehmen

- beim Überschreiten welcher Abweichungsmaße (Benchmarks G , S , Q , T , U , A) man an der Fairness der Würfel zu zweifeln beginnt.

Arbeitsauftrag 2

- (a) Jeder würfelt 120 mal mit einem richtigen Würfel und trägt seine Ergebnisse im Bereich A1:F20 des Kalkulationsblattes aus Abb. 10.12 ein. Das Blatt zeichnet ein Säulendiagramm und berechnet die zugehörigen Abweichungsmaße. Jeder druckt sein Ergebnis so oft aus wie es Abweichungsmaße gibt. Anschließend bildet man Gruppen. Jeder Gruppe wird ein Abweichungsmaß zugeteilt.
- (b) Sortiert in eurer Gruppe die (Kopien der) Verteilungen nach eurem Abweichungsmaß und schlägt einen **Benchmark** vor, der bei fairen Würfeln nur in Ausnahmefällen überschritten wird. (Wenn man die Gruppen in Teilgruppen zerlegt, wird die Auseinandersetzung mit dem Problem noch intensiver und beim Versuch einer Einigung entstehen fruchtbare Diskussionen.)
- (c) Sichert mithilfe von Computersimulationen gemäß Abb. 10.12 eure Benchmarks ab – oder modifiziert sie ggf. noch etwas, wobei ihr die farbigen Punkte und Boxplots nutzt, die die Verteilungen der Abweichungsmaße (hier g , s , q) visualisieren.
- (d) Statistiker **bezweifeln**, dass eine Verteilung unbekannten Ursprungs von einem fairen Würfel stammt, wenn ein oder mehrere dieser Benchmarks überschritten werden. **Durch Festlegen der Benchmarks werden die Abweichungsmaße zu Testgrößen.**
Untersucht mithilfe eurer Benchmarks erneut, bei welchen Verteilungen aus Abb. 10.10 Zweifel an der Fairness des zugrunde liegenden Würfels angebracht sind. Kommentiert eure Bewertungen aus dem Arbeitsauftrag 1(b).

Das Besondere an diesen Simulationen ist – genau wie in Abb. 10.6 bei den Münzwürfen – die *Verknüpfung beschreibender* mit *beurteilender* Statistik. Man liest an den Boxplots in Abb. 10.12 ab, welche Abweichungswerte bei fairen Würfeln nicht oder nur extrem selten auftreten. Dabei kann man nutzen, dass in Boxplots Daten als Ausreißer (x) markiert werden können, wenn sie vom Median 1,5 Quartilabstände oder mehr entfernt liegen.

Bei Diskussionen über Abb. 10.12 hat sich eine Klasse 8 darauf verständigt, die Benchmarks für das Bezweifeln der Fairness eines Würfels wie folgt zu setzen: $G = 11$, $S = 38$, $Q = 220$. Damit ist man sich einig:

- anzuzweifeln, dass die Verteilungen in den Zeilen 1, 4, 5, 12, 14, 15, 16
- nicht anzuzweifeln, dass die Verteilungen in den Zeilen 2, 6, 7, 8, 10, 13

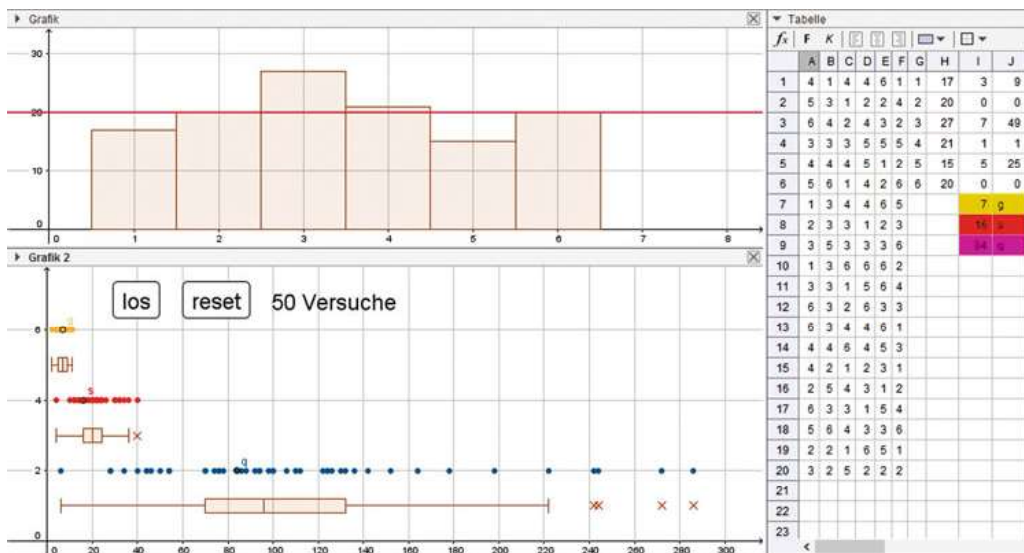


Abb. 10.12 Simulation der Testgrößen g , s , q bei 120 Würfeln eines fairen Würfels mit dem Befehl =Zufallszahl[1,6] im Bereich A1:F20. Die aktuelle Häufigkeitsverteilung wird als Säulendiagramm dargestellt. Die aktuellen Testwerte werden in I7:I9 berechnet und als Punkte in der Grafik 2 festgehalten. Tipp für GeoGebra-Nutzer: Die Werte der Testgrößen speichert man in dynamisch mitwachsenden Listen. Ihre Verteilung wird durch Boxplots – hier mit Markierung von Ausreißern – visualisiert (=Boxplot[y-Position, y-Breite, Liste, <Ausreisser markieren (true/false)>]). (© GeoGebra)

von einem fairen Würfel stammen. Bei den restlichen Verteilungen würde man die Lage je nach verwendeter Testgröße leicht unterschiedlich beurteilen.

Es überrascht Schülerinnen und Schüler, wenn sie erfahren, dass auch Wissenschaftler solche Grenzen etwa über das Festlegen des 5 % Signifikanzniveaus untereinander nur aushandeln. Die Grenzen sind nicht von einer „höheren Instanz“ vorgegeben. In der letzten Zeile von Abb. 10.11 wurden sie durch Simulationen so ermittelt, dass sie bei fairen Würfeln in höchstens 5 % aller Fälle überschritten werden. Die Häufigkeitsverteilungen, bei denen Zweifel an einer Gleichverteilung angebracht sind, ergeben sich aus den farblichen Markierungen in den rechts stehenden Spalten von Abb. 10.10.

Dass es (im Gegensatz zur Münze beim Würfel) für eine Fragestellung verschiedene sinnvolle Tests geben kann, die zu unterschiedlichen Ergebnissen führen, wird durch die selbst gefundenen Abweichungsmaße handelnd nachvollzogen. Dadurch erhält man eine solide Basis für Interpretationen statistischer Aussagen.

10.3.4 Anwendungen

Dem Zufallsgenerator einer Tabellenkalkulation oder den Würfeln aus der Spielesammlung vertraut man: Sie liefern alle Augenzahlen 1...6 mit gleicher Wahrscheinlichkeit $1/6$. q -Werte über 220 (bzw. t -Werte über 11) treten bei fairen Würfeln i. d. R nicht auf.

Bei gesägten Rohholz-Würfelchen (Abb. 10.13a), und beschrifteten Sechskantbleistiften (Abb. 10.13b), die man über den glatten Tisch rollt, ist man sich bzgl. der Gleichwahrscheinlichkeit der 6 Ergebnisse nicht mehr ganz so sicher.

Ebenso fraglich ist die Gleichwahrscheinlichkeit der sechs Farben bei Schokolinsen (Abb. 10.14a) oder Gummibären (Abb. 10.14b), weil nach Umfragen die Farbe rot am beliebtesten ist und der Hersteller sich aus Eigeninteresse an Kundenwünschen orientieren sollte.

Aus diesem Grunde führen Schülerinnen und Schüler von Klasse 7 bis zum Abitur Untersuchungen gemäß Arbeitsauftrag 3 ebenso mit Begeisterung durch wie Lehramtsstudierende und Referendarinnen und Referendare. Das Ergebnis sei hier vorweggenommen: Gummibären und Schokolinsen-Farben sind gleichverteilt, die Augenzahlen beschrifteter Bleistiftwürfel wider Erwarten nur selten. Obwohl die Stifte einen absolut symmetrischen Eindruck machen, haben kleinste Unsymmetrien, die vom Verleimen zweier Hälften oder dem „Verziehen“ bei Feuchtigkeit herrühren, fatale Folgen. Auch die Rollrichtung spielt



Abb. 10.13 a 1 cm³-Rohholz-Würfel (aus einem 1000er-Set zum Legen eines Literwürfels), b Sechskantbleistift mit den Augenzahlen 1...6 beschriftet



Abb. 10.14 a Schokolinsen, b Gummibären: Die sechs Farben/Geschmacksrichtungen entsprechen den Augenzahlen: 1 = dunkelrot/Himbeere, 2 = hellrot/Erdbeere, 3 = orange/Orange, 4 = gelb/Zitrone, 5 = grün/Apfel, 6 = weiß/Ananas

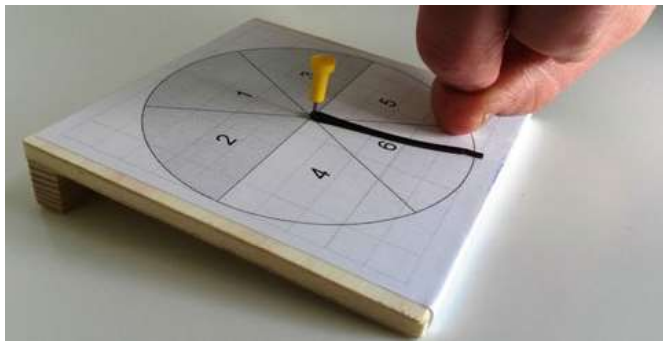


Abb. 10.15 Glücksrad aus einer Haarklemme, die (hier im Uhrzeigersinn) um einen Pin auf einer schiefen Ebene mit Steigung 10 % rotiert. Die „bergauf-Felder“ 2 und 4 haben jeweils die Wahrscheinlichkeit $1/6 + 5\%$, die „bergab-Felder“ 3 und 5 jeweils $1/6 - 5\%$. Die Felder 1 (*oben*) und 6 (*unten*) behalten trotz der Neigung die Wahrscheinlichkeit $1/6$

eine große Rolle (Riemer 2012). Tatsächlich stammen die Verteilungen aus Abb. 10.10 von 16 Bleistiftwürfeln!

Auch wenn man Glücksräder wie in Abb. 10.15 durch Ansnippen eines Zeigers auf schiefen Ebenen rotieren lässt, und fragt, wie sich Neigung und Rotationsrichtung auf die Wahrscheinlichkeiten auswirkt, kann man äußerst Überraschendes entdecken (Riemer 2017).

Die Rotationsrichtung hat auf die Wahrscheinlichkeiten der sechs Sektoren entscheidenden Einfluss: Die Felder 1 (oben) und 6 (unten) behalten trotz Neigung (!) die Wahrscheinlichkeit $1/6$, aber die „bergauf-Felder“ 2 und 4 werden um den gleichen Wert wahrscheinlicher wie die „bergab-Felder“ 3 und 5 unwahrscheinlicher. Wenn man keine Richtung bevorzugt, bleiben die sechs Sektoren je nach Oberflächenbeschaffenheit der Glücksradscheibe bis zur Neigung 20 % gleich wahrscheinlich.

Arbeitsauftrag 3

(a) Bildet in eurer Klasse Forschungsgruppen **B, S/B, R, G**: Jeder in der jeweiligen Gruppe

B: rollt einen Sechskant-Bleistift in gleicher Richtung 120-mal über den glatten Tisch,

S/B: zählt 120 zufällig herausgegriffene Schokolinsen (Gummi-Bären) nach den 6 Farben aus,

R: würfelt 120-mal einen Roh-Würfel, einen Zauberwürfel aus dem Scherzartikelladen oder einen beschrifteten Lego-Vierer,

G: schnippt 120-mal eine Haarnadel auf einer schiefen Ebene, wobei das Feld 1 eines 6er-Glücksrades oben, Feld 6 unten liegt, abwechselnd rechts- und links herum.

Jeder prüft mithilfe ausgesuchter Testwerte, ob Anlass besteht, die Gleichwahrscheinlichkeit der sechs Ergebnisse zu bezweifeln.

10.4 Ein einprägsames Bild zum Schluss

Die Darstellung schließt mit einem Bild, das den Sinn und die Bedeutung des Testens von Hypothesen beschreibt:

In der Welt gibt es Hypothesen wie Sandkörner am Meer. Eine Testgröße wirkt wie ein Sieb, in dem falsche Hypothesen hängen bleiben, weil man sie bezweifelt. Nur die richtigen bestehen den Test, sie fallen durch das Sieb. Das Problem ist nur, dass sich die Sandkörner (die Hypothesen) durch Zufallseinflüsse gleichsam größer oder kleiner machen können, so dass sie im Sieb hängen bleiben, obwohl sie eigentlich hindurchpassen müssten – oder hindurchfallen, obwohl sie eigentlich hängen bleiben müssten. Je kleiner man die Löcher macht (je niedriger man die Benchmarks setzt), desto häufiger bleiben richtige Hypothesen im Netz hängen, wenn man sie größer macht, rutschen auch viele falsche hindurch. Und zu allem Überfluss gibt es auch noch verschieden geformte Netze mit runden, quadratischen, dreieckigen ... Löchern, die verschiedenen Testgrößen (wie oben g , s , q , t , u , a) entsprechen. Oft geben einige Testgrößen Anlass für berechtigte Zweifel, andere nicht. Dann sollte man sich – frei nach dem Motto eines Songs der Gruppe tocotronic „im Zweifel für den Zweifel“ entscheiden.

Rückblick

Die Begriffe relative Häufigkeit und Mittelwert (aus der Realitätsebene) bereiten die theoretischen Begriffe Wahrscheinlichkeit und Erwartungswert (auf der Modellebene) vor. Insofern gilt beschreibende Statistik gemeinhin als Vorbereitung zur Wahrscheinlichkeitsrechnung. Da aber die Curricula für Median und Boxplot derzeit auch nach den Bildungsstandards keine vergleichbaren Fortsetzungen ausweisen und sie in zentralen Prüfungen keine Rolle spielen, gelten sie vielen Kollegen als verzichtbar. Wenn man aber den Quartilabstand als leicht zugängliches³ Streuungsmaß nutzt, um *Zufallsschwankungen* sowohl

³ Die Standardabweichung als klassisches Streuungsmaß ist schwieriger zugänglich als der Quartilabstand – und erst im Kontext von Normalverteilung und 68 %-Sigmaregel sinnvoll zu interpretieren.

händisch als auch mit Simulationen zu untersuchen, gelingt die Einsicht in das schwache Gesetz der großen Zahl: Eine Vervielfachung des Versuchsumfangs halbiert die Zufallsschwankungen relativer Häufigkeiten um die Wahrscheinlichkeit – und allgemeiner das $1/\sqrt{n}$ -Gesetz.

Durch den Blick nicht nur auf Wahrscheinlichkeiten, sondern auch auf Zufallsschwankungen gelingt es, Grundvorstellungen zur beurteilenden Statistik schon ab Klasse 7 anzulegen. Unterstützt wird dies durch Verwenden eines hypothetisch-prognostischen Wahrscheinlichkeitsbegriffs, der subjektivistische Grunderfahrungen fortsetzt und den Laplace-schen als Spezialfall enthält. In diesem Wahrscheinlichkeitskonzept ist nämlich – anders als im Laplaceschen – das Bezweifeln als Vorstufe des Hypothesentests angelegt.

Durch das entdecken mehrerer plausibler Abweichungsgrößen, die (beim Würfeln) mithilfe von *Simulationen untersucht werden*, kann das intuitiv aus dem Alltag geläufige Prinzip des Bezweifeln auf eine quantitative Basis gestellt und zur Beantwortung spannender statistischer Fragestellungen genutzt werden.

Herzlichen Dank an G. Seebach und R. Schmidt (GeoGebra-Institut Köln-Bonn) für Tipps zum Programmieren der Simulationen. Letztere erhält man unter www.riemer-koeln.de.

Anhang

Eine GeoGebra-Lernumgebung zum selbstständigen Erkundung von Boxplots

Meist werden Boxplots in Form von Lehrervorträgen eingeführt. Man erläutert dann, wie Boxplots zu lesen sind und wie man sie konstruiert. Wenn man die folgende Lernumgebung bestehend aus einer GeoGebra-Datei und einem Arbeitsauftrag einsetzt, können Schülerinnen und Schüler sich die Bedeutung von Boxplots aber auch selber erschließen:

Arbeitsauftrag 4

- (a) In der Datei Boxploterkunden.ggb (Abb. 10.16) wurden 9 (10, 11, 12) Daten als Punkte auf der Rechtsachse eingetragen. Ein zugehöriges Säulendiagramm wurde gezeichnet: Weil z. B. zwischen 1 und 3 drei Daten (*D*, *E*, *F*) liegen, hat die zugehörige Säule die Höhe 3. Kontrolliert durch Bewegen der Punkte, dass das Säulendiagramm stets richtig aktualisiert wird und die Daten korrekt visualisiert.
- (b) Unter dem Säulendiagramm seht ihr ein Boxplot Diagramm, das man neben den Säulendiagramme auch häufig nutzt, um Daten bildlich zu veranschaulichen. Erforscht, wie es arbeitet, durch welche Stellen die Box begrenzt wird, was es mit den Antennen und den Markierungen innerhalb der Box auf sich hat. Bewegt dazu die Punkte auf der Achse mit der Maus und führt Kontrollrechnungen durch. Notiert in Stichworten, was ihr herausgefunden habt.

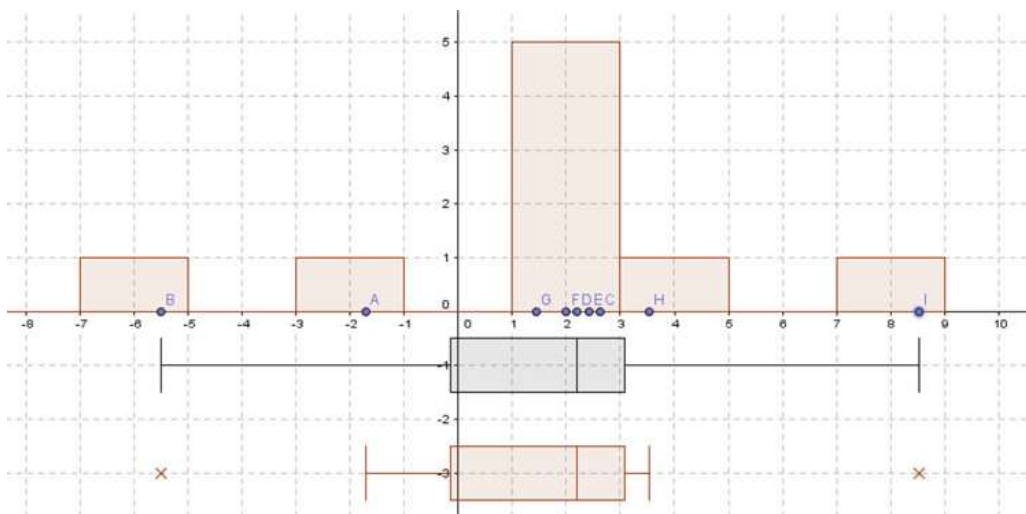


Abb. 10.16 Lernumgebung zum selbstständigen Erkunden von Boxplots. 9 (10, 11, 12) Daten sind auf der Rechtsachse frei verschiebbar. Ein Säulendiagramm mit Säulenbreite 2 wird gezeichnet – und simultan dazu der zugehörige Boxplot in zwei verschiedenen Ausführungen. (Erstellt mit GeoGebra)

(c) Vergleichende Sicht auf Boxplots und Säulendiagramme (anspruchsvoll)

Sandra: „Bei Säulendiagrammen gibt man die Breite der Säulen vor, die Höhe ergibt sich im Anschluss. Boxplots sind eigentlich auch Säulendiagramme bei denen man versucht, die Säulenhöhen $1/4$, $1/2$, $1/4$ vorzugeben und die Säulenbreiten (über Antenne-Box-Antenne) dann ermittelt werden müssen. Versuche zu erläutern, was Sandra entdeckt hat.“

Literatur

- Bruner, J. S. (1973). *Der Prozess der Erziehung* (3. Aufl.). Berlin: Berlin Verlag.
- Herd, E., et al. (2014). *Lambacher Schweizer 7. Mathematik für Gymnasien – G9 Hessen*. Stuttgart: Klett.
- KMK (2012). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife*
- Pallack, A. (Hrsg.). (2014). *Fundamente der Mathematik 8 NRW Gymnasium*. Berlin: Cornelsen.
- Riener, W. (1991). Das $1/\sqrt{n}$ -Gesetz. *Stochastik in der Schule*, 11(3), 24–36.
- Riener, W. (2012). Mit Bleistiften würfeln: Beurteilende Statistik zwischen Realität und Simulation. *PM*, 43, 30–35.
- Riener, W. (2017). Das Glücksrad auf der schiefen Ebene. In C. Maitzen & A. Warmeling (Hrsg.), *Mathe aus dem Leben – für das Leben*. Festschrift 40 Jahre MUED. ISBN 978-3930197903.
- Sachs, L. (1999). *Angewandte Statistik* (9. Aufl.). Berlin: Springer.
- Wittmann, E. C., & Müller, N. (2013). *Das Zahlenbuch 4*. Stuttgart: Klett.