

### Wahrscheinlichkeiten auf Gleichheit prüfen: der exakte Test von Fisher

Wenn man testen möchte, ob eine Wahrscheinlichkeit die Realität gut beschreibt, nutzt man die „Zipfel“ der Binomialverteilung zur Bestimmung des Ablehnungsbereichs der Nullhypothese  $H_0: p=p_0$ . Mit dieser Idee kann man auch zwei Wahrscheinlichkeiten  $p_1$  und  $p_2$ , deren Größe man aber nicht kennt, auf Gleichheit testen. In Fig. 1 geht es z. B. um die Prüfung, ob ein Medikament und ein Placebo mit der gleichen (unbekannten) Wahrscheinlichkeit wirken.

### Der nahe liegende „Holzweg“

In der Studie wurde 400 von 600 Personen ein echtes Medikament verabreicht, 200 Personen erhielten ein Placebo. + steht für Treffer (hat gewirkt), - für Niete (nicht gewirkt). Wenn Placebo und Medikament mit der gleichen Wahrscheinlichkeit wirken würden, dann wären in der Medikamentengruppe doppelt so viele Treffer wie in der Placebo-Gruppe zu erwarten, weil sie doppelt so groß ist. Es scheint daher naheliegend, die Hypothese  $H_0: p = 2/3$  bei einem Stichprobenumfang 264 mit der Binomialverteilung zweiseitig zu testen.

1. Prüfen Sie, dass sich beim Signifikanzniveau  $\alpha = 5\%$  der Ablehnungsbereich  $[0;160]$  U  $[192;264]$  mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von  $4,3\% < \alpha$  ergibt.

Da das Medikament in der Medikamentengruppe nur bei 189 Personen wirkte und 189 noch nicht im Ablehnungsbereich liegt, kann man  $H_0$ , also die Gleichheit der Wirkungswahrscheinlichkeiten von Medikament und Placebo, nicht ohne weiteres verwerfen.

### Fishers exakter Test

Leider hat der obige Gedankengang einen kleinen Haken: Die Durchführung der Studie lässt sich *nicht* als Folge von 264 unabhängigen Bernoulli-Versuchen mit konstanter Trefferwahrscheinlichkeit  $p=2/3$  deuten, weil das Prüfen auf Wirkung dem Ziehen *ohne* Zurücklegen aus einem Gefäß mit  $N=600$  Kugeln entspricht, von denen  $M=400$  mit Medikament und  $N-M=200$  mit Placebo und beschriftet sind. Die Zufallsgröße  $X$  zählt die mit Medikament beschrifteten Pluskugeln.  $X$  ist aber nicht mehr binomialverteilt mit  $p = 400/600$  und  $n=264$ , sondern hypergeometrisch mit

$$P(X = k) = H_{600;400,264}(k) = \frac{\binom{400}{k} \binom{200}{264-k}}{\binom{600}{264}} \approx B_{264; \frac{400}{600}}(k).$$

Fishtest.ggb veranschaulicht diese Verteilung, die der Binomialverteilung recht ähnlich. Sie berechnet für jede Trefferzahl  $k$  die Wahrscheinlichkeit „irrtum“ noch extremerer Abweichungen in den beiden blauen „Zipfeln“. Für  $k=189$  ergibt sich mit 0,024 ein Wert unter 5% und damit gestatten die Daten aus Fig. 1 nun, die Hypothese der gleichen Wirksamkeit von Medikament und Placebo auf dem 5% Signifikanzniveau zu verwerfen.

|            | -   | +   | Summe |     |
|------------|-----|-----|-------|-----|
| Placebo    | 125 | 75  | 200   | N-M |
| Medikament | 211 | 189 | 400   | M   |
|            | 336 | 264 | 600   | N   |

Fig. 1 Wirksamkeitsstudie

Die Durchführung der Studie lässt sich deuten als das 264-malige Ziehen von Kugeln, aus einer Urne mit  $N=600$  Kugeln, von denen  $M=400$  mit „Medikament“ und  $N-M=200$  mit „Placebo“ beschriftet sind. Zusätzlich trägt jede Kugel entweder ein + oder - als Aufdruck, wobei + bedeutet: „hat gewirkt“ und - „hat nicht gewirkt“. Gleiche Wirksamkeit von Placebo und Medikament entspräche dann gleichen Anteilen „+“ bei den Medikament und den Placebo-Kugeln.

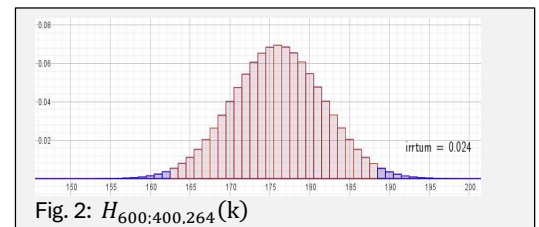


Fig. 2:  $H_{600;400,264}(k)$

2. Nutzen Sie fishtest.ggb, um die Verteilung  $H_{N;M,n}(k)$  für verschiedene Parameter  $N, M, n$  mit der Binomialverteilung  $B_{n;p}(k)$  zu vergleichen. Dabei ist  $p=M/N$  der Anteil der Treffer.
3. Überprüfen Sie mit der digitalen Anwendung: Die hypergeometrische Verteilung mit den Parametern  $N,M,n$  unterscheidet sich kaum von der Binomialverteilung mit den Parametern  $n$  und  $p=M/N$ , wenn der Stichprobenumfang  $n$  klein ist im Vergleich zu  $N, M$  und  $N-M$ .  
Es gilt dann  $H_{N;M,n}(k) = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \approx B_{n; \frac{M}{N}}(k) = \binom{n}{k} \left(\frac{M}{N}\right)^k \left(1 - \frac{M}{N}\right)^{n-k}, 0 \leq k \leq n$ .
4. a) Erstellen Sie das Säulendiagramm zu  $H_{13;8,3}(k)$ , das die Wahrscheinlichkeit dafür beschreibt, dass man  $k$  rote Kugeln erhält, wenn man drei Kugeln aus einem Gefäß mit 8 roten und 5 blauen ohne Zurücklegen zieht.  
b) Überprüfen Sie das Ergebnis mit einem dreistufigen Baumdiagramm.
5. Prüfen Sie mit fishtest ob man die Hypothese der Gleichheit der folgenden Versuchsergebnissen zugrunde liegenden Wahrscheinlichkeiten auf dem 5% Signifikanzniveau verwerfen kann:  
a) 12 Treffer in 25 und 45 Treffer in 75 Versuchen,  
b) 24 Treffer in 50 und 90 Treffer in 150 Versuchen.