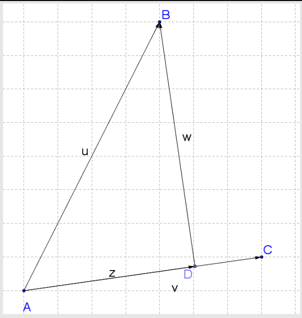
Winkel zwischen zwei Vektoren

Wolfgang Riemer



In PM 63 S. 36 wird ausgeführt, wie man mit dem Satz des Pythagoras das Skalarprodukt als Antwort auf die Frage nach der Orthogonalität von Vektoren „*erfinden*" kann. Wenn man die Idee weiter denkt, lässt sich hiermit auch der Winkel zwischen Vektoren exakt berechnen und man erhält einen vektoriellen Beweis des Kosinussatzes.

Erinnerung: Die Formel für die Länge eines Vektors $|\vec{w}| == \sqrt{w_1{}^2 + w_1{}^2 + w_1{}^2}$

liefert nach dem Satz des Pythagoras gemäß obiger Abbildung mit $\vec{u} = \vec{z} + \vec{w}$

$$\vec{w} \perp \vec{z} \Leftrightarrow |\vec{u}|^2 = |\vec{z}|^2 + |\vec{w}|^2 \Leftrightarrow |\vec{z} + \vec{w}|^2 = |\vec{z}|^2 + |\vec{w}|^2 \Leftrightarrow$$

$$(z_1 + w_1)^2 + \ldots + (z_3 + w_3)^2 = z_1{}^2 + \ldots + z_3{}^2 + w_1{}^2 + \ldots + w_3{}^2 \Leftrightarrow z_1 w_1 + \ldots + z_3 w_3 = 0 \Leftrightarrow \vec{z} * \vec{w} = 0$$

Weil die Produktsumme so nützlich ist bekommt sie einen Namen: „Skalarprodukt". Die Kopiervorlage zeigt, wie man damit den Winkel zwischen Vektoren berechnet und den Kosinussatz begründet.

Kopiervorlage:

Um den Winkel zwischen zwei Vektoren $\alpha = \angle(\vec{u}, \vec{v})$ berechnen zu können, braucht man ein rechtwinkliges Dreieck. Man verkürzt also den Vektor $\vec{v}$ durch Multiplikation mit einem Skalar λ ($\vec{z} = \lambda \vec{v}$) so, dass zwischen $\vec{z}$ und $\vec{w}$ ein rechter Winkel entsteht: Gesucht ist also die Zahl λ, für die gilt $\vec{v} \perp \vec{w}$. Man erhält sie wie folgt:

$\vec{v} \perp \vec{w} \Leftrightarrow \vec{v} * (\vec{u} - \lambda \cdot \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow \vec{v} * \vec{u} - \lambda \cdot |\vec{v}|^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{\vec{u} * \vec{v}}{|\vec{v}|^2}$. Nun gilt im rechtwinkligen Dreieck

$\cos(\alpha) = \dfrac{|\vec{z}|}{|\vec{u}|} = \lambda \dfrac{|\vec{v}|}{|\vec{u}|} = \dfrac{\vec{u} * \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \dfrac{|\vec{v}|}{|\vec{u}|} = \dfrac{\vec{u} * \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$ (*) und damit kann man $\alpha = \angle(\vec{u}, \vec{v})$ berechnen.

Aufgaben:

a) Zeichne $\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$ in ein ebenes Koordinatensystem. Kontrolliere mithilfe des Skalarproduktes und der Zeichnung, dass keine der Differenzen $\vec{u} - \lambda \cdot \vec{v}$ für λ=0,6/0,7/0,8 auf $\vec{v}$ orthogonal steht. Berechne dann λ so, dass gilt $\vec{v} \perp (\vec{u} - \lambda \cdot \vec{v})$. Zeichne das zugehörige rechtwinklige Dreieck und bestimme den Winkel $\alpha = \angle(\vec{u}, \vec{v})$ mithilfe des Kosinus. Kontrolliere an der Zeichnung.

b) Kontroliere die Gültigkeit von (*) für Vektoren im Raum, indem du die Winkel berechnest, die die Körperdiagonale eines Würfels mit den zugehörigen Seitendiagonalen einschließt.

c) Die Gleichung $|\vec{u} - \vec{v}|^2 = (\vec{u} - \vec{v}) * (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 - 2(\vec{u} * \vec{v}) = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 - 2\cos \triangleleft (\vec{u}, \vec{v}) |\vec{u}| |\vec{v}|$ trägt den Namen „Kosinussatz". Deute sie geometrisch an einem selbst gewählten Beispiel – und begründe, dass sie den Satz des Pythagoras als Spezialfall enthält.

Dr. Wolfgang Riemer, Zfsl Köln, w.riemer@arcor.de