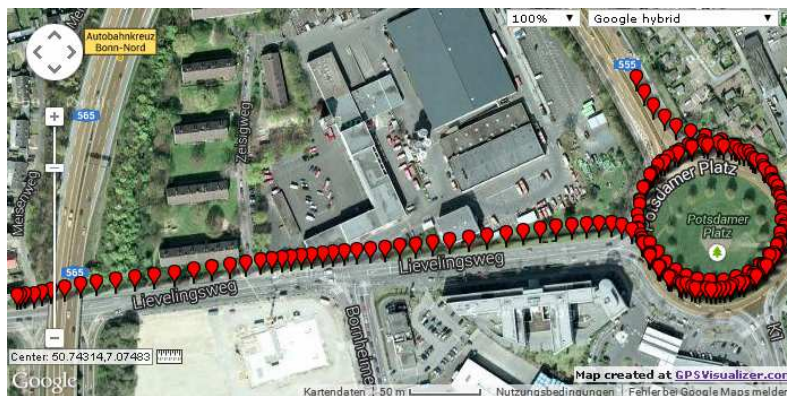
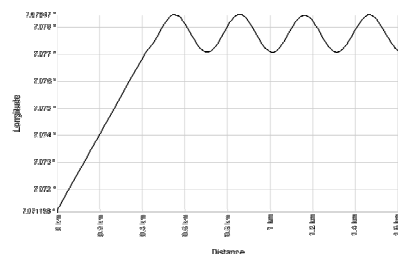
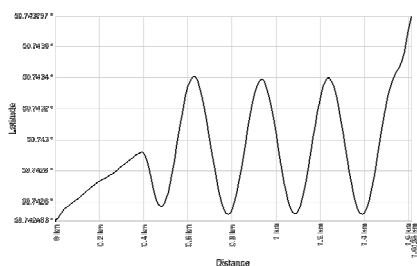


Die Sinusfunktion ableiten: Differenziale leben!

Wolfgang Riemer



Wie man solche Fahrspuren zeichnet. Lesen Sie in PM 53 nach...



So langweilig wie ihr oft nachgesagt wird, ist die Sinusfunktion gar nicht... Ob es Ihren Schülern ansatzweise gelingt, aus dem Verlauf der geographischen Koordinaten (Abb. 1b, c: Latitude = geographische Breite, Longitude = geographische Länge) den mit GPS aufgezeichneten Fahrweg prinzipiell zu rekonstruieren? Nutzen Sie diesen „Eycatcher“ ruhig als Kopiervorlage, um die trigonometrischen Funktionen interessant zu machen ... bevor Sie sich an deren Ableitung wagen!

Unter Kompetenzerwartungen liest man im neuen Kernlehrplan NRW zu trigonometrischen Funktionen: Die Schülerinnen und Schüler **nennen** die Kosinusfunktion als Ableitung der Sinusfunktion Machen Sie mit der Kompetenzerwartung ernst und lassen Sie es nicht beim „nennen“!

Der Graph „jeder“ Funktion sieht lokal wie eine Gerade aus. Das ist **die** fundamentale Idee der Analysis. Mit dem Funktionenmikroskop (Abb. 3 der Kopiervorlage) erkennt man das eindrucksvoll. Deswegen lässt sich die Steigung m mit Differenzialen (das sind für Schüler „klitzekleine“ Differenzen, in der Geschichte als „unendlich kleine Dreiecke“ betrachtet) als Quotient $m = \frac{dy}{dx}$ „beliebig genau“

berechnen. Daher heißt die Analysis auch **Differenzialrechnung** (die Idee des „unendlich Kleinen“ kommt auch in der Bezeichnung **Infinitesimalrechnung** zum Ausdruck). Statt dem Zeitgeist entsprechend an GTR-Grafiken Zusammenhänge nur plausibel zu machen (Aufgabe 1 Kopiervorlage), kann man an vielen Stellen Differenziale nutzen, um Einsicht zu stiften, wie es die Erfinder der Differenzialrechnung taten. Nutzen Sie Aufgabe 2, mit deren Hilfe man nicht nur den Zusammenhang $\sin' = \cos$ erkennen kann, sondern auch, warum Mathematiker das Bogenmaß erfanden – und stellen Sie (zwecks Binnendifferenzierung „nach oben“) diesen Zugang einer formalen Begründung (Aufgabe 3) gegenüber. Ein arbeitsteiliges Arbeiten lohnt sich sehr!

Dr. Wolfgang Riemer, Zfsl Köln, w.riemer@arcor.de

Die Ableitung der Sinusfunktion

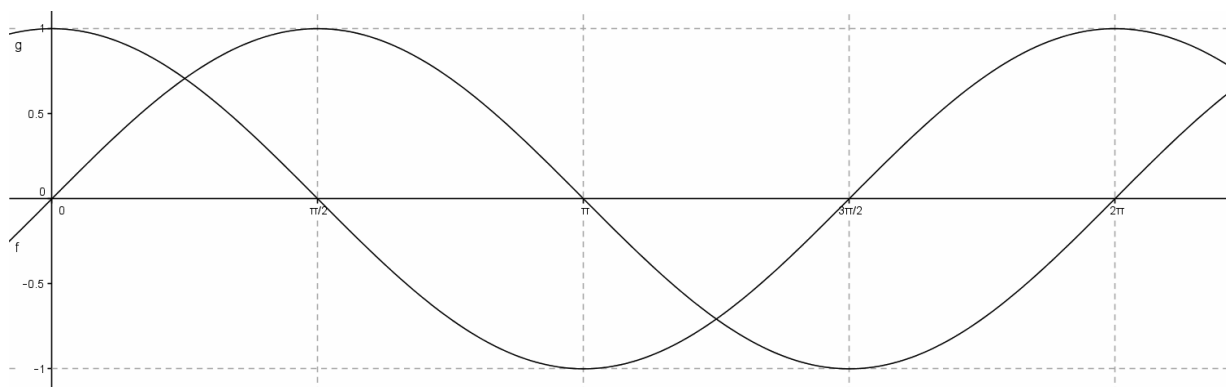


Abb. 1: $f(s)=\sin(s)$ und $g(s)=\cos(s)$

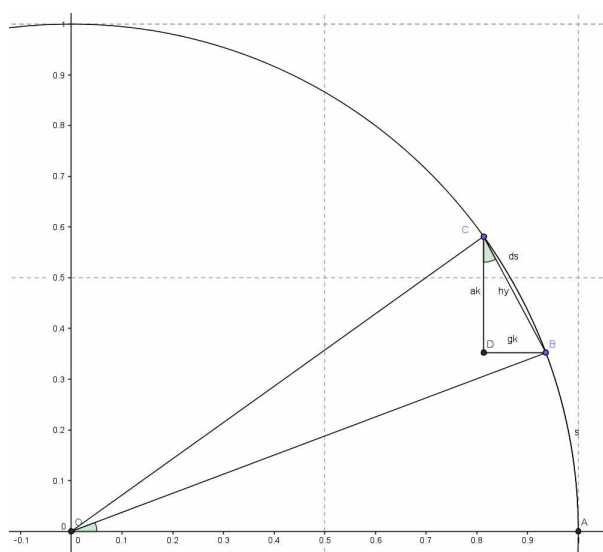


Abb. 2: Ein Käfer krabbelt auf dem Einheitskreis die Strecke s nach oben

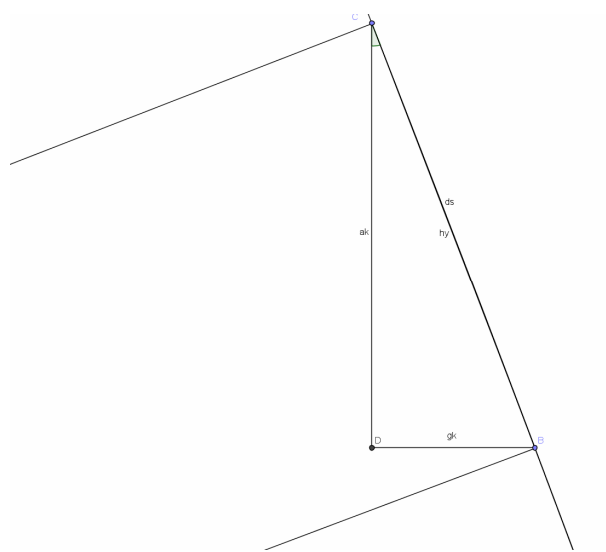


Abb. 3 ... und noch ein klitzekleines Stückchen weiter

Aufgabe 1

In *Abb. 1* wurden die Graphen von \sin und \cos mit einem Rechenhilfsmittel gezeichnet. Erklären Sie anhand der Abbildung, warum \cos die Ableitung von \sin sein könnte.

Aufgabe 2

Im Gegensatz zum Vorgehen in *Aufgabe 1* wären die Entwickler der Differenzialrechnung (Leibniz, Newton) von folgender Argumentation überzeugt: Sie gehen über anschauungsgebundene Erklärungen hinaus und nutzten die Definition von Sinus und Kosinus im rechtwinkligen Dreieck. Gleichzeitig erklären sie, welche Rolle das Bogenmaß spielt:

a) Angenommen, ein Käfer krabbelt vom Punkt $A(1;0)$ am „Fußboden“ auf dem Einheitskreis die Strecke s entlang. Seine Höhe über dem Boden beträgt dann $\sin(s)$. Er krabbelt (*Abb. 2*) noch ein „klitzekleines“ Bogenstückchen ds weiter. Um welchen Wert ändert sich durch dieses Weiterkrabbeln die Höhe h ,

- wenn s ganz klein war ($s \approx 0$, der Käfer „saß am Boden“)
- wenn s ganz groß war ($s \approx \pi/2$, der Käfer „saß oben“)?

b) Wenn das Bogenstückchen ds klitzeklein ist, kann man es von einer Geraden (der Sekante zwischen B und C) nicht mehr unterscheiden, weil alle Funktionsgraphen lokal aussehen wie Geraden (*Abb. 3*). Erklären Sie anhand der Zeichnung, warum der Winkel DCB im Steigungsdreieck bei klitzekleinem ds genauso groß ist wie der Winkel AOB . Nutzen Sie hierzu den Satz: „Wenn die Schenkel zweier Winkel senkrecht zueinander stehen, dann sind die Winkel gleich (oder ergänzen sich zu $180^\circ \cong \pi$)“.

c) Begründen Sie, dass der Käfer beim Durchkrabbeln des Bogenstückchens ds um den Wert $dh = \cos(s) \cdot ds$ an Höhe gewonnen hat und dass Sie damit nachgewiesen haben:

$$\sin'(s) = \cos(s).$$

Aufgabe 3

Es gilt $\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$ (Formelsammlung).

Damit folgt

$$\frac{1}{h} \cdot (\sin(s+h) - \sin(s)) = \frac{1}{h} \cdot \left(2 \cos\left(\frac{s+h+s}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{s+h-s}{2}\right)\right) = \cos\left(s + \frac{h}{2}\right) \cdot \frac{\sin(h/2)}{h/2} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \cos(s).$$

Erläutern Sie die einzelnen Begründungsschritte.

Aufgabe 4

Vergleichen Sie die drei Wege hinsichtlich ihrer Erklärungskraft.