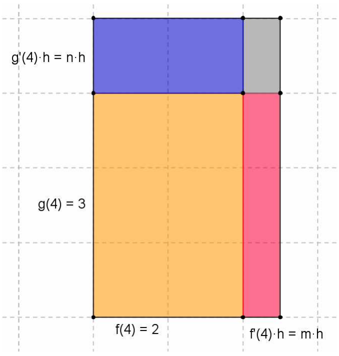
Die Produktregel dynamisch entdecken und mit Differenzialen begründen

Wolfgang Riemer & Reinhard Schmidt



Die Funktionswerte der Produktfunktion f*g werden als Flächen gedeutet. Dabei ist m=f'(4) und n=g'(4)

$$(f\cdot g)(4+h) \approx (f\cdot g)(4) + (m\cdot g(4) + n\cdot f(4))\cdot h$$

Abb. 1: ikonisch

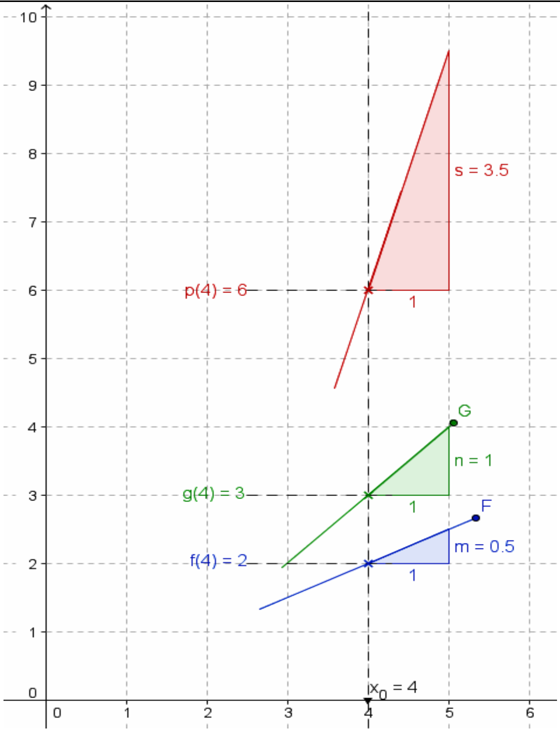
$$\frac{(f\cdot g)(4+h)-(f\cdot g)(4)}{h} =$$
$$\frac{f(4+h)\cdot g(4+h)-f(4)\cdot g(4+h)}{h} +$$
$$\frac{f(4)\cdot g(4+h)-f(4)\cdot g(4)}{h} =$$
$$\frac{f(4+h)-f(4)}{h}\cdot g(4+h) +$$
$$f(4)\cdot\frac{g(4+h)-g(4)}{h} \approx$$
$$f'(4)\cdot g(4) + f(4)\cdot g'(4)$$

Abb. 2 symbolisch

Mit einem dynamischen GeoGebra Arbeitsblatt können Schülerinnen und Schüler die Produktregel handelnd entdecken und mit der Idee der lokalen linearen Näherung selbst begründen.

Die fundamentale Idee der Analysis fasst man in einem Satz zusammen: Der Graph „jeder" Funktion sieht lokal wie eine Gerade aus. Mit dem Funktionenmikroskop erkennt man das sehr eindrucksvoll. Deswegen lässt sich die Steigung m mit Differenzialen (das sind für Schüler klitzekleine Differenzen) als Quotient $m = \frac{dy}{dx}$ „beliebig genau" berechnen. Daher heißt die Analysis auch „Differentialrechnung". Die Frage, wie sich die lokale lineare Näherung des Produktes zweier Funktionen p=f*g aus den linearen Näherungen der Faktoren f und g ergibt, wird durch die Produktregel (fg)'=fg'+f'g beantwortet. Abb. 1 visualisiert ihre Begründung ikonisch, Abb. 2 symbolisch. Beide Begründungen können von Schülerinnen und Schülern gut nachvollzogen werden. Lernpsychologisch motivierender ist aber ein handlungsorientierter Zugang, der die *Entdeckung* und *selbstständige Begründung* erlaubt.
Das dynamische Arbeitsblatt aus der Kopiervorlage nutzt hierzu die Idee der lokalen Näherung und des „Rechnens mit Differentialen". Dabei arbeitet man im Gegensatz zu Abb. 1 und 2 direkt am vertrauten Funktionsgraphen. Das ist ein nicht zu unterschätzender Vorteil. Der anschließende Wechsel auf andere Darstellungsebenen (Abb. 1 und 2) kann die Sicherung abrunden.
Da der Grenzwertbegriff (die tiefere Bedeutung des Symbols $\lim\limits_{h\to 0}$) derzeit im Matheunterricht eine höchst untergeordnete Rolle spielt, macht es durchaus Sinn, auf diese formale Notation ohne inhaltliche Verständniseinbuße zu verzichten und guten Gewissens mit ≈ zu arbeiten wie in Abb. 1 und 2.

Dr. Wolfgang Riemer, ZfsL Köln, w.riemer@arcor.de
Gründungsmitglied des GeoGebra-Instituts Köln-Bonn.
Reinhard Schmidt, ZfsL Engelskirchen, schmidt@mathe-nrw.de
Leiter des GeoGebra-Instituts Köln-Bonn.



Die Produktregel

f hat der Stelle 4 den Funktionswert a=2
und die Steigung m=0,5.
g hat dort den Funktionswert b=3
und die Steigung n=1.
Das Produkt p=f*g hat dann an der Stelle 4
den Funktionswert a*b=6.
So ist das Produkt zweier Funktionen definiert.
Aber wie groß ist dort die Steigung s?

Sie lässt sich aus a, b, m und n berechnen.
Finden Sie heraus wie …
und anschließend warum!

Abb. 1: Die Produktregel selbst entdecken

1 Entdecken
Variieren Sie die vier Parameter a=f(4) , b=g(4) , m=f'(4) und n=g'(4) systematisch und halten Sie fest, wie sich s dabei verändert. Dokumentieren Sie Ihre Ergebnisse in einer Tabelle.
Drücken Sie s durch a, b, m und n mithilfe eines Terms aus: s = …. .

2 Kontrollieren
Wenn Ihre Entdeckung stimmt, enthält sie die Faktorregel (c*f)'=c*f' für einen konstanten Faktor c als Spezialfall. Erläutern und begründen Sie!

3 Begründen an einem Spezialfall
Nehmen Sie an:
- f ist eine lineare Funktion, deren Graph durch (4;a) verläuft und die Steigung m hat
- g ist eine lineare Funktion, deren Graph durch (4;b) verläuft und die Steigung n besitzt.

Diese Annahmen machen Sinn, denn Sie wissen: Jede Funktion sieht lokal wie eine Gerade aus.
Zeichnen Sie die Graphen von f und g mithilfe eines Funktionsterms in das GeoGebra Arbeitsblatt – und auch das Produkt p=f*g. Beschreiben Sie in Worten, was sie sehen – und kontrollieren Sie Ihre Endeckung aus 1 rechnerisch.

4 Begründen allgemein
Wenn man in Abb. 1 von der Stelle 4 um h=0,01 nach rechts geht, wächst
- f von 2 auf 2+mh
- g von 3 auf 3+n*h und
- p=f*g von 6 auf $(2+mh)(3+nh)=6+(3*n+2*m)h+mnh^2$.

Erläutern Sie in eigenen Worten, warum diese Umformung die Entdeckung aus 1 begründet.
Verallgemeinern Sie … und formulieren Sie eine Regel zum Ableiten von Produktfunktionen.