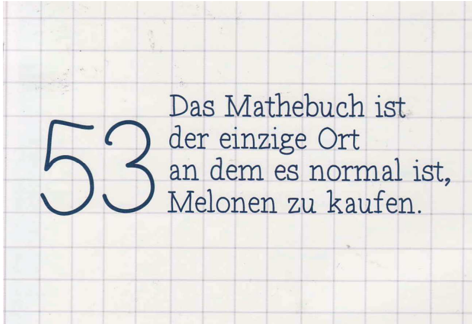
Wie teuer wäre die Maß Kölsch?

Wolfgang Riemer



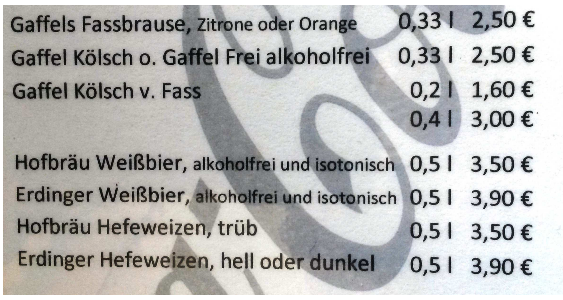


Abb. 1: Diese Grußkarte mit 50 000 likes bei Facebook bringt es auf den Punkt: Mathe wird als weltfremd erlebt.

„Groß oder klein?“ so lautett die Rückfrage nach der Bestellung eines Getränks. Natürlich ist das große teurer - aber preiswerter. Und wenn man dann - um je nach Durst die Kosten-Nutzen Relation zu verbessern - den Kellner (in Köln den Köbes) fragt, wie teuer ein „ganz großes“ wäre, erhält man Antworten wie „gibt’s hier nicht“ oder „muss ich den Chef fragen“. Lassen Sie Ihre Schüler über die Preisgestaltung spekulieren. Fördern Sie Modellierungskompetenz und funktionales Denken, fördern Sie „Lust auf Mathe“. Je nach Geschmack und Klassenstufe gerne auch mit Limo und Eis statt mit Bier (Kopiervorlage).

Winters Grunderfahrungen

Die Grußkarte bringt es auf den Punkt: Mathematik wird als weltfremd erlebt, weil sie wenig mit erlebter Wirklichkeit zu tun hat. Dennoch hat die Frage nach dem Preis von 53 Melonen ihre Berechtigung. Denn Mathematik ist auch geistige Schöpfung einer deduktiv geordneten Welt eigener Art, in der es durchaus Sinn macht, über 53 Melonen nachzudenken. In diesem Spannungsfeld zwischen erster und zweiter Winterscher Grunderfahrung, zwischen authentischer Realität und innermathematischer Struktur „lebt“ die hier fiktiv gestellte Frage nach einem Modell für die Preisgestaltung beim Verkauf „größerer Getränkemengen“. Das „Bierpreisproblem“ (Kopiervorlage) sorgt ab Klasse 7 für engagierte mathematikhaltige Diskussionen. Es fordert zum Modellieren ebenso heraus wie zum Üben im Umgang mit Funktionenklassen, deren Anzahl im Laufe der Schulzeit steigt

Das Problem - Der Kontext macht den Unterschied

Die Aufforderung „Bestimme den Term einer Funktion, deren Graph durch die Punkte P(0,2;1,6) und Q(0,4;3) verläuft!“ ist eine eine Routineaufgabe, deren Lösung normalerweise von der Funktionsklasse abhängt, die im Unterricht gerade „dran“ ist. Zu einem ***motivierenden Problem*** wird diese Fragestellung in einer einer Kneipe, in der nach Getränkekarte 0,2l Kölsch 1,60€ und 0,4l 3,00€ kosten.
Wieviel müssten dann 0,6 l kosten? Wie viel 1l, wie viel x Liter?

Das motivierende an diesem Problem ist die Kombination aus präziser Fragestellung, Vielfalt möglicher Lösungen („Modelle“) und dem sich aus dem Vergleich ergebenden Diskussionsbedarf. Es gibt von Klasse 7 bis zum Abitur keine Lerngruppe, die sich der Eingangspostkarte zum Trotz dem Reiz dieser Fragestellung entzogen hätte. Das liegt nach Piagets Äquilibrationstheorie“ wohl daran, dass unser Gehirn ständig nach Strukturen sucht, die die Welt „erklären“ - und gefundene Strukturen machen „glücklich“.

Sein Sie gespannt, auf welche Ideen Ihre Schüler kommen, wenn Sie ein wenig Zeit zum Nachdenken bekommen und wenn Sie mit der Aussage Mut machen, dass es keine falschen Modelle geben kann. Die folgenden Beispiele stammen aus einer Klasse 8 und einem Leistungskurs der Stufe 12, in welchem nach Abschluss der Untersuchungen der Köbes in interessante Diskussionen verwickelt wurde.

1 „Et is wie et is“ (ab Klasse 7/8)

Wenn man ohne Phantasie die Realität so akzeptiert wie sie ist, gibt es nur 0,2 oder 0,4 l“
dann kosten 0,6 l 4,60 €, die Maß mit 1 l günstigstenfalls 7,60€
und 100 l kosten (100/0,4)*3€ = 250*3€= 750€.
Die (für Achtklässler anspruchsvolle) Suche nach funktionalen Beschreibungen führt auf zwei lineare Terme

$$f(x) = \frac{3}{0.4} \cdot x = 7.5x \text{ für x =0.4, 0.8, …}$$

$$f(x) = \frac{3}{0.4} \cdot (x - 0.2) + 1.6 = 7.5x + 0.1,$$

deren Graphen parallel zueinander verlaufen. Die Steigung 7.5 wird als Literpreis interpretiert, der sich aus 3€ für 0.4l ergibt.

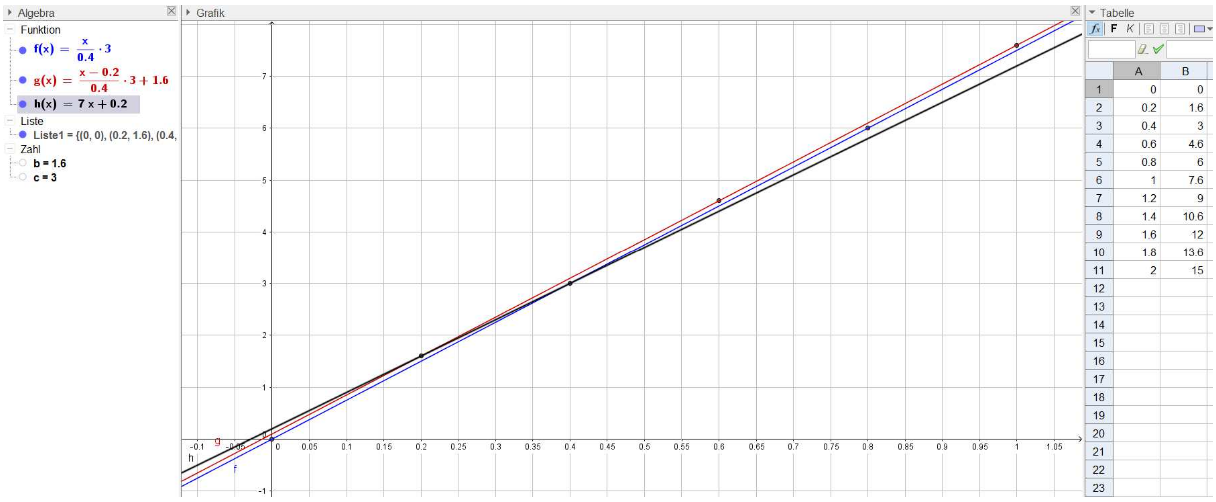


Abb. 2: Die Preismodelle 1 und 2.1

2 „das geradlinige“ ab Klasse 8

Da lineare Funktionen im Zentrum des Mathematikunterrichts stehen, ist dieses Modell bis zum Abitur besonders beliebt.

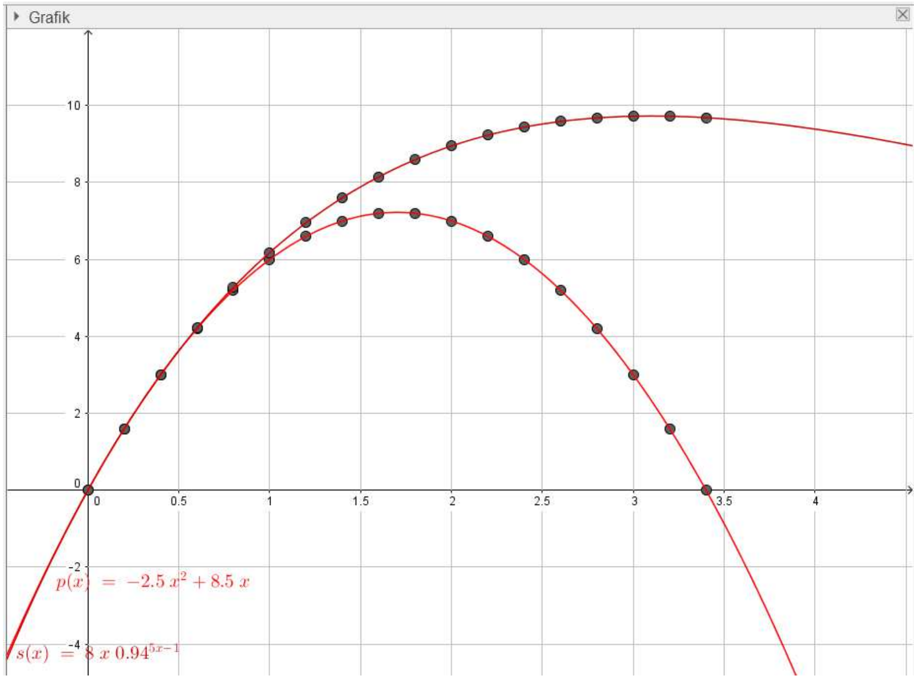
Die Gerade durch P(0.2;1.6) und Q(0.4;3) hat die Steigung $\frac{3-1.6}{0.4-0.2} = 7$. Sie wird beschrieben durch

h(x) = 7(x-0.2)+1.6 = 7x+0.2

Damit müssten 0,6l dann 4,40 € kosten und die Maß wäre mit 7,20€, etwas günstiger als im Modell 1. Wegen des günstigeren Literpreises (7€/l statt 7.5€/l) wird der y-Achsenabschnitt 0,2 als Nutzungsgebühr für ein leeres Glas (0,2€) interpretiert und akzeptiert.

3 Die Parabel und das Schlaraffenland (Ab Klasse 9)

Die zweite 0.2l Portion kostet 20ct weniger als die erste (Aufpreis 1.40€). Dann sollte doch der Aufpreis bei der dritten 1,20€ betragen u. s. w. (vgl. Abb. 3 Spalten B und C)



Tabelle

D5 =8A5 (0.9375^(5A5 - 1))

	A	B	C	D
1	x (l)	p (€)	Aufpreis (€)	s (€)
2	0	0		0
3	0.2	1.6		1.6
4	0.4	3	1.4	3
5	0.6	4.2	1.2	4.22
6	0.8	5.2	1	5.27
7	1	6	0.8	6.18
8	1.2	6.6	0.6	6.95
9	1.4	7	0.4	7.6
10	1.6	7.2	0.2	8.15
11	1.8	7.2	0	8.59
12	2	7	-0.2	8.95
13	2.2	6.6	-0.4	9.23
14	2.4	6	-0.6	9.44
15	2.6	5.2	-0.8	9.59
16	2.8	4.2	-1	9.68
17	3	3	-1.2	9.72
18	3.2	1.6	-1.4	9.72
19	3.4	0	-1.6	9.69
20				
21				

Abb. 3 Parabel p und Exponentialmodel s

Man entdeckt durch Fortsetzung des Musters die Wertetabelle der Parabel mit Funktionsgleichung

$p(x)=8.5x-2.5x^2=-2.5(x-1.7)^2$,

bei der die neunte 0.2l-Portion umsonst ist (1,6 und 1.8l kosten gleichviel) und bei der man noch Geld herausbekommt, wenn mehr als 3.4 l geordert werden. Das wäre das Schlaraffenland in Perfektion.

Den Term der Parabel erhält man formal entweder über eine Steckbriefaufgabe oder sinnstiftend, indem man den Rabatt (1+2+…+(n-1)) *0.2€ =0.2*n*(n-1)/2 von n*1.6€ subtrahiert, wobei n=x/0.2 die Anzahl der bestellten 0.2l-Portionen zählt.

Dieses Preisgestaltungsmodell weist über sich hinaus, weil es erkennen lässt, dass lineare Vernderungen mit quadratischen Abhängigkeiten verknüpft sind. Und wenn man zu den gegebenen beiden Datenpunkten eine Ursprungsparabel konstruiert, landet man bei diesem Modell.

4 das exponentielle (ab Klasse 9)

Wenn man zweimal 0,2 l ordert, zahlt man statt 3,20€ nur 3€, also nur das 3/3,2 = 0,9375-fache des eigentlich anfallenden Preises. Wenn man bei einer weiteren Portion auf den eigentlich fälligen Gesamtpreis diesen Nachlas zweimal gewährt, erhält man

$s(0,6)=3*1,60*0,9375^2=4,22$€, das Muster sinngemäß fortsetzend für die Maß

$s(1)=5*1,60*0,9375^4=6,18$€ und allgemein

$$s(x)=1{,}60\cdot\frac{x}{0{,}2}\cdot 0{,}9375^{(\frac{x}{0{,}2}-1)}=8x\cdot 0.9375^{(5x-1)}\text{€}.$$

Da die Exponentialfunktion mit Basis kleiner als 1 gewinnt, zahlt man irgendwann gar nichts mehr. Man bekommt im Gegensatz zum Schlaraffenland-Modell aber auch kein Geld heraus.

5 Das potente (numerisch Klasse 9, formal LK 12)

Wenn man die Getränkemenge 0,2 l verdoppelt, wächst der Preis nicht um den Faktor 2, sondern nur um den Faktor $k = \frac{3}{1.6} = 1.875$. Wenn man sie zweimal verdoppelt, könnte man ihn um k² wachsen lassen. Diesen Gedanken fortsetzend erhält man das Preismodell

$f(0{,}2 \cdot 2^n) = 1{,}60 \cdot k^n$.

Mit $x = 0{,}2 \cdot 2^n$, also $n = \log_2(5x)$ ergibt sich

$$f(x) = 1.6 \cdot k^{\log_2(5x)} = 1.6 \cdot 2^{\log_2(k) \cdot (\log_2(5) + \log_2(x) \cdot}$$

$$= 1.6 \cdot 2^{\log_2(k) \cdot \log_2(5) \cdot} \cdot 2^{\log_2(k) \log_2(x)} =$$

$$= 1.6 \cdot 5^{\log_2(k) \cdot} \mathrm{x}^{\log_2(k)} \approx 6.89 \cdot \mathrm{x}^{0,91}$$

also eine monoton wachsende Potenzfunktion, deren Graph durch den Ursprung verläuft
In diesem Modell müsste die Maß dann 6.89€ kosten.

6 das betriebswirtschaftliche (Analysisk-LK)

Bisher fand der Einkaufspreis, den der Gastwirt selber zahlen muss, keine Berücksichtigung. Wir nehmen an, es gelte e_{lit} = 1 € (Einkaufspreis je Liter).
Dann beträgt der Gewinn bei Verkauf von 0,2 l g_2=1,6-e_{lit}*0,2 und bei 0,4 l g_4=3,0-e_{lit}*0,4.
Der Gewinn soll mit der Verkaufsmenge steigen. Man sucht also eine monoton steigende (realistischer Weise rechtsgekrümmte) Gewinnfunktion, die bei den vorgegebenen Biermengen diese Gewinnwerte g_2 bzw. g_4 annimmt und zusätzlich durch den Ursprung verläuft.

$g(x) = k \cdot x^b$

Man erhält $b = \log_2(g_4 / g_2) = 0{,}89$ und $k = g_2 / 0{,}2^b = 5{,}89$

Für den Verkaufspreis schlägt man den Einkaufspreis dazu

$preis(x) = k \cdot x^b + e_{lit} \cdot x$ und kann auch den Rabatt berechnen, den der Kunde im Vergleich mit 0,2l-Portionen erhält, wenn er x Liter kauft

$$rabatt(x) = 1 - \frac{preis(x)}{1.60 \cdot \frac{x}{0{,}2}} = 1 - \frac{5{,}89 \cdot x^{0{,}89} + e_{lit} \cdot x}{8x}$$

Da der Rabattt mit der gekauften Menge x steigt, regt die Preisgestaltung den Konsum an und sorgt für steigenden Gewinn. Für den Wirt und den Gast gleichermaßen eine Win-Win-Situation.
Wie man sieht gilt

$$rabatt(x) = 1 - (\frac{5{,}89}{8} \cdot x^{-0{,}11} + \frac{e_{lit}}{8}) -> 1 - \frac{e_{lit}}{8} = 1 - \frac{1}{8} = 87{,}5\%$$

Bei doppelt so hohem Einkaufspreis wäre der Grenzrabatt, den man in diesem Modell gewähren könnte mit $1 - \frac{2}{8} = 75\%$ etwas geringer.

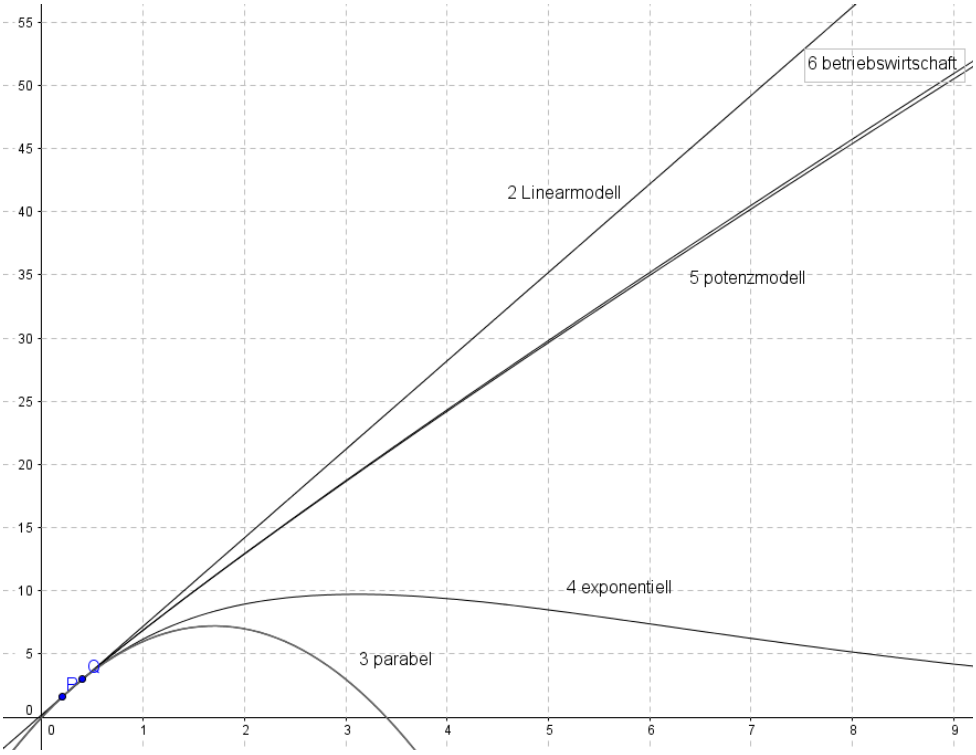
Resümee

Der Blick auf Getränkekarten regt an zum Spekulieren über Rabatt- und Preismodelle beim Bestellen größerer Portionen. Phantasie und Neugier werden geweckt. Verfügbare Funktionenklassen dienen als Modellierungs-Werkzeugkoffer.

Autor: Dr. Wolfgang Riemer, ZfsL Köln, w.riemer@arcor.de

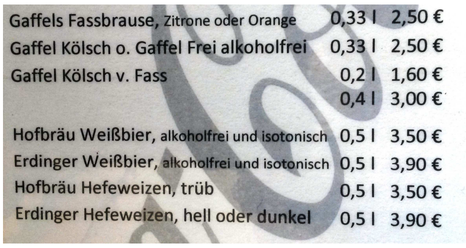
Anhang 1:

Graphen und Tabellen der diskutierten Funktionen. Die gwärhrten Rabatte sind gelb unterlegt.



	A	B	C	D	E	F
1		linear	potenz	parabel	exponentiell	betrieb
2	0	0.2	0	0	0	0
3	0.2	1.6	1.6	1.6	1.6	1.6
4	0.33	2.53	2.54	2.56	2.55	2.54
5	0.4	3	3	3	3	3
6	0.5	3.7	3.67	3.63	3.63	3.67
7	0.6	4.4	4.33	4.2	4.22	4.33
8	1	7.2	6.89	6	6.18	6.89
9	10	70.2	55.58	-165	3.39	56.07
10	100	700.2	448.53	-24150	0	460.19
11	1000	7000.2	3619.77	-2491500	0	3815.93
12	10000...	7000000.2	190262...	-249999150...	0	2345477....
13		Rabatte			litereinkaufspr...	1
14	0.2	0	0	0	0	0
15	0.33	0.05	0.05	0.04	0.04	0.05
16	0.4	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06
17	0.5	0.08	0.08	0.09	0.09	0.08
18	0.6	0.08	0.1	0.12	0.12	0.1
19	1	0.1	0.14	0.25	0.23	0.14
20	10	0.12	0.31		0.96	0.3
21	100	0.12	0.44		1	0.42
22	1000	0.12	0.55		1	0.52
23	10000...	0.12	0.76		1	0.71

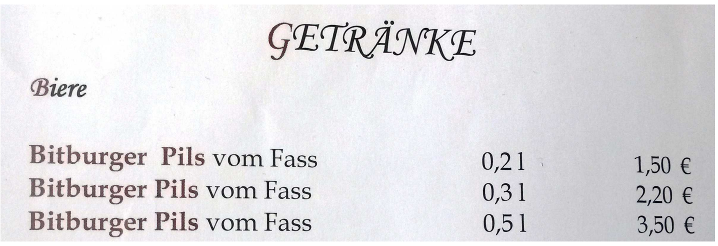
Anhang 2: Kopiervorlagen mit zwei Mengenangaben

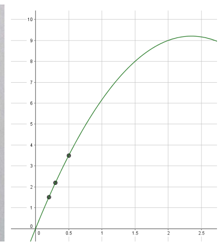


Schwimmbad De Bütt, Hürth Bahnhofsshop Mülheim/Ruhr

Das Bierpreisbeispiel ist durch die Verdoppelung von 0,2 auf 0,4 l attraktiv. Es regt Modell 4 an.

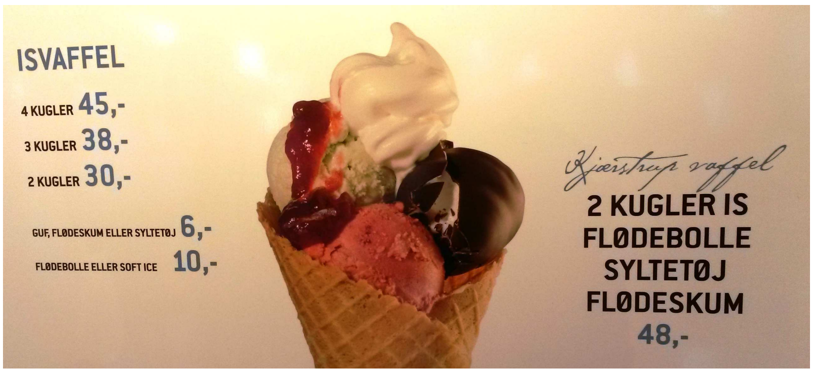
Anhang 3: Kopiervorlagen mit drei Mengenangaben

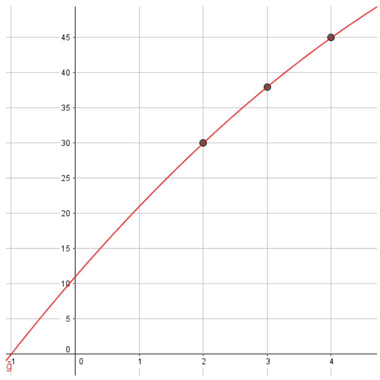




Gülser Weinstube, Koblenz

Die drei Datenpunkte liegen auf einer Ursprungsparabel (Modell 3)





Kjerstrup Eis, Bornholm - Dänemark

Wenn die Preise zu 5, 4 und 3 Kugeln gehören würden, hätte man auch hier eine Ursprungs-Preisparabel, So aber würde die Waffel mehr kosten als eine Eiskugel – was bei der handgemachten Waffel durchaus gerechtfertigt wäre.