

LS *Stochastik*

LAMBACHER SCHWEIZER

Mathematisches Unterrichtswerk
für das Gymnasium

erarbeitet von
Manfred Baum
Dieter Brandt
Detlef Lind
Wolfgang Riemer
Peter Zimmermann

unter Mitwirkung von
Martin Bellstedt
Edmund Herd
Manfred Schwier

No 732430
(2003)

Ernst Klett Verlag
Stuttgart Düsseldorf Leipzig

Bildquellenverzeichnis:

AKG, Berlin: S. 11 – Bongarts, Hamburg: S. 34 (Frank) – Corbis, Düsseldorf: S. 14 (Robert Pelton), S. 70 (2. von oben, Philipp Gould), (2. von unten, Canadian Museum of Civilisation) – Deutsches Museum, München: S. 9, 17, 90 (unten) – dpa, Frankfurt: S. 57 (oben) – Lotterie-Treuhandgesellschaft mbH Hessen, Wiesbaden: S. 86 (Heinz Schlüter) – Moro, C., Stuttgart: S. 10, 26, 41, 43, 57 (unten), 90 (oben), 102 – Riemer, Pulheim: S. 136 – 1. Tanzclub Ludwigsburg, Ludwigsburg: S. 12 (A. Gresser) – Tony Stone Worldwide, München: S. 9 (Ernst Hohne) – Ullstein Bilderdienst, Berlin: S. 20

Nicht in allen Fällen war es uns möglich, den uns bekannten Rechtsinhaber ausfindig zu machen. Berechtigte Ansprüche werden selbstverständlich im Rahmen der üblichen Vereinbarungen abgegolten.



1. Auflage

1 8 7 6 5 4 | 2008 2007 2006 2005 2004

Alle Drucke dieser Auflage können im Unterricht nebeneinander benutzt werden, sie sind untereinander unverändert. Die letzte Zahl bezeichnet das Jahr dieses Druckes.

© Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2003.

Alle Rechte vorbehalten.

Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt. Jede Nutzung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlages. Hinweis zu § 52a UrhG: Weder das Werk noch seine Teile dürfen ohne eine solche Einwilligung eingescannt und in ein Netzwerk eingestellt werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen.

Internetadresse: <http://www.klett-verlag.de>

Zeichnungen: H. Günthner, Stuttgart; R. Hungreder, Leinfelden; R. Wartmann, Nürtingen.

Umschlaggestaltung: Alfred Marzell, Schwäbisch Gmünd.

DTP-Satz: topset Computersatz, Nürtingen.

Druck: Stürtz AG, 97080 Würzburg. Printed in Germany.

ISBN 3-12-732430-8

Wahrscheinlichkeitsverteilung bei Permutationen



Die Wahrscheinlichkeitsverteilung bei dem folgenden Glücksspiel lässt sich nicht durch eine der bisher behandelten Verteilungen beschreiben. Vier verschiedenfarbige Karten ($\clubsuit, \spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit$) eines Kartenspiels werden zufällig nebeneinander verdeckt ausgelegt. Ein Spieler legt offen vier verschiedenfarbige Karten darüber. Dann werden die Karten aufgedeckt. Ein Treffer liegt vor, wenn an derselben Position dieselbe Farbe liegt. Angenommen, die verdeckten Karten liegen in der Reihenfolge $\clubsuit, \spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit$ aus, dann zeigt Fig. 1, welche Möglichkeiten es für den Spieler gibt und wie viele Treffer k dabei jeweils erzielt werden. Daraus ergeben sich die Wahrscheinlichkeiten in Fig. 2 für die Trefferzahlen.

Reihenfolge	k	Reihenfolge	k	Reihenfolge	k	Reihenfolge	k
$\clubsuit, \spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit$	4	$\clubsuit, \clubsuit, \heartsuit, \heartsuit$	2	$\heartsuit, \clubsuit, \spadesuit, \spadesuit$	1	$\diamondsuit, \clubsuit, \spadesuit, \heartsuit$	0
$\clubsuit, \spadesuit, \heartsuit, \clubsuit$	2	$\clubsuit, \spadesuit, \heartsuit, \heartsuit$	0	$\heartsuit, \clubsuit, \spadesuit, \clubsuit$	0	$\diamondsuit, \clubsuit, \heartsuit, \spadesuit$	1
$\clubsuit, \spadesuit, \heartsuit, \clubsuit$	2	$\clubsuit, \spadesuit, \heartsuit, \clubsuit$	1	$\heartsuit, \clubsuit, \spadesuit, \clubsuit$	2	$\diamondsuit, \clubsuit, \spadesuit, \heartsuit$	1
$\clubsuit, \spadesuit, \heartsuit, \clubsuit$	1	$\clubsuit, \spadesuit, \heartsuit, \clubsuit$	0	$\heartsuit, \clubsuit, \spadesuit, \clubsuit$	1	$\diamondsuit, \clubsuit, \spadesuit, \heartsuit$	2
$\clubsuit, \spadesuit, \heartsuit, \clubsuit$	1	$\clubsuit, \spadesuit, \heartsuit, \clubsuit$	0	$\heartsuit, \clubsuit, \spadesuit, \clubsuit$	0	$\diamondsuit, \clubsuit, \spadesuit, \heartsuit$	0
$\clubsuit, \spadesuit, \heartsuit, \clubsuit$	2	$\clubsuit, \spadesuit, \heartsuit, \clubsuit$	1	$\heartsuit, \clubsuit, \spadesuit, \clubsuit$	0	$\diamondsuit, \clubsuit, \spadesuit, \heartsuit$	0

Fig. 1

Das Arbeitsblatt heißt *permutationen.xls*.

Ein Beweis des Satzes befindet sich auf der nächsten Seite.

Führt man das Spiel mit mehr als vier Farben durch, dann wird das beschriebene Verfahren zur Ermittlung der Wahrscheinlichkeiten zu aufwändig. Man kann sich die verschiedenen Möglichkeiten auch ausgehend von der Reihenfolge der verdeckten Karten durch Vertauschung einiger oder aller Farben entstanden denken. Daher spricht man hier auch von **Permutationen** der Farben. Bei k Treffern liegt eine Permutation vor, bei der k Farben fest bleiben. Statt der Farben werden Zahlen $1, 2, \dots, n$ verwendet. $P_n(k)$ bedeutet dann die Wahrscheinlichkeit, dass k Zahlen fest bleiben. Man erhält:

Satz: Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Permutation von n Zahlen k Zahlen fest bleiben, beträgt

$$P_n(k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!}, \quad 0 \leq k \leq n.$$

Trefferzahl k	Wahrscheinlichkeit $P_4(k)$ für k Treffer
0	$\frac{9}{24}$ 37,5 %
1	$\frac{8}{24}$ 33,3 %
2	$\frac{6}{24}$ 25 %
3	$\frac{0}{24}$ 0 %
4	$\frac{1}{24}$ 4,2 %

Fig. 2

Eine Permutation heißt **fixpunktfrei**, wenn keine Zahl an ihrem Platz bleibt.

Beispiel:

a) Bei einem Tanzkurs nehmen fünf Ehepaare teil. Jeder Herr wird einer Dame zugelost. Mit welcher Wahrscheinlichkeit tanzt kein Ehepaar gemeinsam?

b) Die Ziffernfolge 24531 soll bedeuten: Herr 1 tanzt mit Dame 2, Herr 2 mit Dame 4, Herr 3 mit Dame 5 usw. Schreiben Sie auf diese Weise alle Möglichkeiten von Teil a) auf, bei denen Herr 1 nicht mit Dame 2 und Herr 2 mit Dame 1 tanzt.

Lösung:

a) Nach dem Satz ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $P_5(0) = \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} = \frac{11}{30}$.

b) Es handelt sich um folgende neun fixpunktfreie Permutationen der Ziffern 12345, bei denen auf Platz 1 nicht die 2 und auf Platz 2 die 1 steht.

31254, 31452, 31524, 41253, 41523, 41532, 51234, 51423, 51432.

1 Fünf Briefe werden rein zufällig in fünf adressierte Umschläge gesteckt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gelangen mindestens ein Brief in den richtigen Umschlag?

2 Einem Schüler werden fünf Literatúrauszüge und fünf zugehörige Verfasser vorgelegt. Der Schüler ordnet alle (vier der fünf, drei der fünf) Auszüge den Verfassern richtig zu. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hätte er allein durch Raten so ein gutes Ergebnis erzielt?

Mathematische Exkursionen

Die Näherung ist brauchbar, falls $k \leq n-5$. Verwenden Sie zur Begründung die von EULER entdeckte Formel

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!}.$$

PIERRE RÉMOND DE MONTMORT (1678–1719), um 1700 Domherr von Notre Dame in Paris, lernte Mathematik und Physik im Selbststudium. 1708 gab er sein Essay „D'Analyse sur les jeux de Hasard“ heraus.

- 3 a) Zeigen Sie: Die Wahrscheinlichkeiten für n Permutationen mit k Fixpunkten sind näherungsweise poissonverteilt mit Parameter $\mu = 1$, d. h. $P_n(k) \approx \frac{1}{k!} e^{-1}$.
 b) Für ausreichend große n ist insbesondere $P_n(0)$ nach Teil a) nahezu unabhängig von n . Interpretieren Sie die Aussage anhand von Beispielen.
- 4 Beim Treize-Spiel, das auf MONTMORT zurückgeht, werden 13 Karten mit den Nummern 1 bis 13 gut gemischt und eine Karte nach der anderen abgehoben. Der Spieler gewinnt, wenn kein Kartenwert mit der Ziehungsnummer übereinstimmt. Ist das Spiel fair?
- 5 a) Berechnen Sie die Anzahl f_n der fixpunktfreien Permutationen für $n \leq 10$.
 b) Berechnen Sie $P_n(k)$ für $n = 5$ ($n = 6$) exakt. Vergleichen Sie mit der Näherung aus Aufg. 3.
 c) Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung $P_n(k)$ für $n = 5$ und $n = 10$ grafisch dar.

Zum Beweis des Satzes

Es wird zunächst der Spezialfall $k = 0$ der fixpunktfreien Permutationen betrachtet, bei dem gar kein Treffer auftritt. Zugehörige Permutationen und ihre Anzahlen f_n kann man für kleine n ohne Weiteres bestimmen:

n	fixpunktfreie Permutationen	f_n
1	keine	0
2	21	1
3	231, 312	2
4	2143, 2341, 2413, 3142, 3412, 3421, 4123, 4132	9

Um auf eine Gesetzmäßigkeit für größere n zu gelangen, kann man die fixpunktfreien Permutationen für $n = 5$ systematisch aufschreiben und beobachten, wie sie aus denen bei $n = 4$ hervorgehen.

Zunächst werden alle fixpunktfreien Permutationen betrachtet, bei denen auf Platz 1 die Zahl $r \in \{2, 3, 4, 5\}$ und auf Platz r die Zahl 1 steht. Steht z. B. auf Platz 1 die 2 und auf Platz 2 die 1, so haben die möglichen fixpunktfreien Permutationen die Form 21xyz. Dabei steht xyz für die f_3 fixpunktfreien Permutationen der drei Zahlen 3, 4, 5. Entsprechendes gilt, wenn $r \in \{3, 4, 5\}$. Daher ergeben sich auf diese Weise $4f_3 = 8$ fixpunktfreie Permutationen.

Nun werden die restlichen fixpunktfreien Permutationen betrachtet. Bei diesen steht auf Platz 1 nicht die Zahl r , $r \in \{2, 3, 4, 5\}$, und auf Platz r die Zahl 1. Ist z. B. $r = 2$, steht also auf Platz 2 die 1, so müssen die Zahlen 2, 3, 4, 5 so verteilt werden, dass auf Platz 1 nicht die 2, auf Platz 3 nicht die 3, auf Platz 4 nicht die 4 und auf Platz 5 nicht die 5 kommt. Das entspricht gerade dem fixpunktfreien Vertauschen von 4 Zahlen und geht daher auf $f_4 = 9$ Möglichkeiten, die oben in Beispiel b) aufgelistet sind. Da für r vier Zahlen möglich sind, ergeben sich ins-

gesamt $4 \cdot f_4$ Möglichkeiten für die restlichen Permutationen. Insgesamt gilt daher:

$$f_5 = 4 \cdot f_4 + 4 \cdot f_3 = 4 \cdot (f_4 + f_3).$$

Mit den gleichen Überlegungen erhält man allgemein für $n \geq 3$ die Rekursionsformel

$$f_n = (n-1) \cdot (f_{n-1} + f_{n-2}).$$

Damit kann man f_n nacheinander, beginnend mit $f_1 = 0$ und $f_2 = 1$, berechnen.

Es ist sogar möglich, aus der Rekursionsformel eine geschlossene Formel herzuleiten. Dazu setzt man für die Differenz $f_n - n \cdot f_{n-1}$ zur Abkürzung d_n . Aus der Rekursionsformel folgt $f_n - n \cdot f_{n-1} = -f_{n-1} + (n-1) \cdot f_{n-2}$, also $d_n = -d_{n-1}$.

Diese Beziehung für ausreichend großes n mehrfach angewandt ergibt

$$d_n = (-1) d_{n-1} = (-1)^2 d_{n-2} = \dots = (-1)^{n-2} d_2.$$

Da $d_2 = f_2 - 2f_1 = 1$ und $(-1)^{n-2} = (-1)^n$, folgt daraus

$$d_n = f_n - n \cdot f_{n-1} = (-1)^n \text{ und somit}$$

$$f_n = n \cdot f_{n-1} + (-1)^n.$$

Division durch $n!$ ergibt $P_n(0)$, und durch wiederholte Anwendung erhält man:

$$P_n(0) = \frac{f_n}{n!} = \frac{f_{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(-1)^n}{n!} = \frac{f_{n-2}}{(n-2)!} + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(-1)^n}{n!} = \dots = \dots = \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} = \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!}.$$

Dabei wurde $\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} = 0$ eingefügt.

Es fehlt noch die Bestimmung der Werte $P_n(k)$, $k > 0$, für die Permutationen mit genau k Fixpunkten. Zunächst müssen k Plätze für die k Fixpunkte bestimmt werden, das geht auf $\binom{n}{k}$ Arten. Die restlichen $n-k$ Plätze müssen fixpunktfrei sein, das geht auf f_{n-k} Arten. Also ergibt sich nach Division durch alle $n!$ Möglichkeiten die Behauptung des Satzes aus

$$P_n(k) = \frac{1}{n!} \binom{n}{k} \cdot f_{n-k} = \frac{1}{n!} \cdot \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} f_{n-k} = \frac{1}{k!} \frac{f_{n-k}}{(n-k)!}.$$

Zu beachten ist noch, dass hier $f_0 = 1$ zu setzen ist.