

Mit GeoGebra graphisch ableiten ... eine „Sternstunde“ zu Beginn der Analysis

Reinhard Schmidt & Wolfgang Riemer

Ein Applet für „DIE“ Einführungsstunde in die Analysis sorgt für Verbalisierungsanlässe, Entschleunigung und Vertiefung im Bereich der grundlegenden Begriffsbildung „Ableitungsfunktion“.

Taschenrechner liefern Ableitungen auf Knopfdruck. Animierte Grafiken, die Tangenten an Funktionsgraphen entlangrutschen lassen, zeichnen Graphen der Ableitungsfunktionen „vollautomatisch“. Bei der Beschleunigung, die Unterricht dabei erfährt, kann das Verstehen von Zusammenhängen auf der Strecke bleiben. Das händische „graphische Differenzieren“ sorgt hier für Entschleunigung: Zu einem gegebenen Funktionsgraphen versucht man, „mit Augenmaß und Geodreieck“ Tangentenstückchen einzuzichnen, deren Steigungen zu schätzen, Steigungs-Wertetabellen aufzustellen und funktionale Abhängigkeiten zu entdecken. So können in der ersten Analysisstunde *Hypothesen* heranreifen wie: Die „Steigungsfunktion“ (=Ableitung) eines Polynoms vom Grad 3 hat einen „parabelförmigen“ Graphen oder etwas später: Die Ableitung einer Exponentialfunktion ist (vermutlich) wieder eine Exponentialfunktion. Solche anschaulich gewonnenen Grundeinsichten sichern Verständnis - auch bei Schülern mit weniger ausgeprägtem Sinn für Mathematik. Sie reizen gerade durch - dem Augenmaß innewohnende - Ungenauigkeit, durch ihren hypothetischen Charakter, zum anschließenden numerischen Nachprüfen mithilfe von Differenzenquotienten und zum Begründen von Ableitungsregeln. Die Ungenauigkeit erzeugt – ähnlich wie händisches Zeichnen in der Geometrie – Beweisbedürfnis.

Das GeoGebra Applet "Tangentenstückchen.ggb"

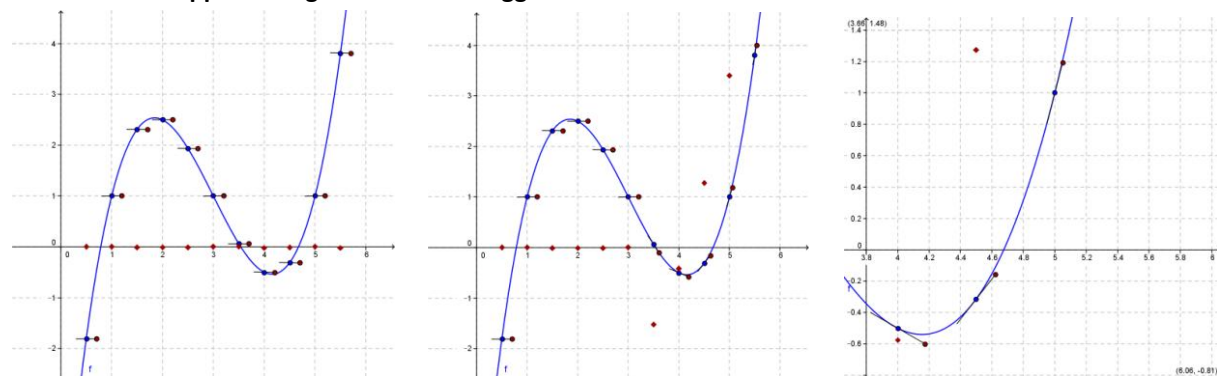


Abb. 1a: Ausgangslage

Abb. 1b: tangentiales Ausrichten

Abb. 1c: Zoomen

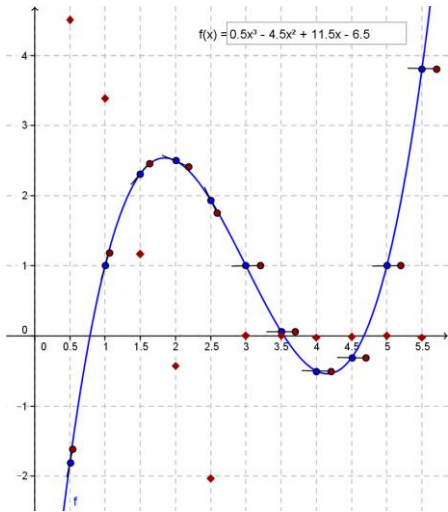
- (a) Auf dem Graphen einer (beliebig festzulegenden) Funktion f sind verschiebbare Punkte $P(x|f(x))$ mit drehbaren Geradenstückchen zu sehen.
- (b) Die Steigungen m der Geradenstücke werden als Punkte $Q(x|m)$ visualisiert. Wenn man die Geradenstücke nacheinander nach Augenmaß „tangential“ ausrichtet, entstehen (in einer gewollten, die Phantasie und das Hypothesenbilden anregenden Ungenauigkeit) Punkte $Q(x|m)$ des „entstehenden“ Graphen der Ableitungsfunktion f' : Die Bildung des Begriffs „Ableitung“ wird konstruktivistisch angeregt.
- (c) Die numerische Ungenauigkeit, die durch Zoomen reduziert, aber nicht beseitigt werden kann, fordert das analytische Untersuchen von Differenzenquotienten heraus ... aber erst, nachdem die Sinnhaftigkeit des Bemühens eingesehen wurde.

Funktion und Bedeutung des GeoGebra-Applets entschlüsseln Schüler eines Einführungskurses in der Regel völlig selbstständig. Mit einer ergänzenden Aufgabenstellung (vgl. Kasten) wird die Einführungsstunde in den Begriff „Ableitung“ zu einem Selbstläufer. Aber auch die Folgestunden, in denen man die gewonnenen Hypothesen etwa durch numerisches Auswerten von Differenzenquotienten der Form $f'(a) \approx \frac{f(a+0,0001)-f(a)}{0,0001}$ auf den Prüfstand stellt, gelingen problemlos auf einer Sinn stiftenden, visuell vorentlasteten Basis. Probieren Sie es aus!

Die Ableitung

Wenn man die kleinen (roten) Geradenstückchen tangential zum Graphen der Funktion f (blau) ausrichtet, entstehen durch Auswerten der Geradensteigungen (rote) Punkte des Graphen einer neuen Funktion f' .

Die entstehende Funktion f' heißt Ableitung der Funktion f .



1. Erläutern und demonstrieren Sie (unter Rückgriff auf Augenmaß und den Begriff der Geradensteigung), wie die neue „rote“ Funktion f' aus der alten „blauen“ Funktion f entsteht.

2. Stellen Sie mit Hilfe des Applets Hypothesen über mögliche Terme der Ableitung f' auf, wenn man für die Ausgangsfunktionen wählt:

	a) $f_1(x) = x^2$	b) $f_2(x) = x^3$	c) $f_3(x) = x^4$
vermuteter Term der Ableitung:			

	d) $f_4(x) = x^3 - x$	e) $f_5(x) = 2^x$	f) $f_6(x) = \sin(x)$
vermuteter Term der Ableitung:			

3. Kontrollieren Sie Ihre Vermutungen, indem Sie Ihre hypothetischen Ableitungen (durch GeoGebra) zeichnen lassen und mit den durch das Applet gezeichneten (roten) Punkten vergleichen.

MÜNDLICHE ABITURPRÜFUNG



**ERLÄUTERN SIE,
WAS DIE ABLEITUNG IST!**

**ICH VERSTEH' DIE FRAGE NICHT...
DIE ABLEITUNG VON WAS???**



Verfasser

Dr. Wolfgang Riemer

ZfsL Köln, Claudiusstr. 1, 50678 Köln

w.riemer@arcor.de

Reinhard Schmidt

ZfsL Engelskirchen, Hindenburgstr. 28, 51766 Engelskirchen

schmidt@mathe-nrw.de