Archimedes und die Orangenschale – Versuchsauswertung mit Computeralgebra[1]

Verfasser: StD Dr. Wolfgang Riemer,
August-Bebel-Straße 80, 50259 Pulheim

AUS DEM INTERNET:

(Die Quelle: http://www.shu.edu/projects/reals/history/archimed.html ist momentan nicht mehr verfügbar.)

ARCHIMEDES is considered one of the three greatest mathematicians of all time along with NEWTON and GAUSS. In his own time, he was known as "the wise one," "the master" and "the great geometer" and his works and inventions brought him fame that lasts to this very day. He was one of the last great Greek mathematicians.

Born in 287 B.C., in Syracuse, a Greek seaport colony in Sicily, ARCHIMEDES was the son of PHIDIAS, an astronomer. Except for his studies at EUCLID's school in Alexandria, he spent his entire life in his birthplace. ARCHIMEDES proved to be a master at mathematics and spent most of his time contemplating new problems to solve, becoming at times so involved in his work that he forgot to eat. Lacking the blackboards and paper of modern times, he used any available surface, from the dust on the ground to ashes from an extinguished fire, to draw his geometric figures. Never giving up an opportunity to ponder his work, after bathing and anointing himself with olive oil, he would trace figures in the oil on his own skin. Much of ARCHIMEDES fame comes from his relationship with HIERO, the king of Syracuse, and GELON, HIERO's son. The great geometer had a close friendship with and may have been related to the monarch. In any case, he seemed to make a hobby out of solving the king's most complicated problems to the utter amazement of the sovereign. At one time, the king ordered a gold crown and gave the goldsmith the exact amount of metal to make ist. When HIERO received it, the crown had the correct weight but the monarch suspected that some silver had been used instead of the gold. Since he could not prove it, he brought the problem to ARCHIMEDES. One day while considering the question, "the wise one" entered his bathtub and recognized that the amount of water that overflowed the tub was proportional the amount of his body that was submerged. This observation is now known as ARCHIMEDES' Principle and gave him the means to solve the problem. He was so excited that he ran naked through the streets of Syracuse shouting "Eureka! eureka!" (I have found ist!). The fraudulent goldsmith was brought to justice.

1. Übersetze den Text, besorge Dir weitere Informationen über ARCHIMEDES, indem Du in Büchern oder im Internet unter dem Stichwort »Archimedes« suchst (z. B. http://www.mcs.drexel.edu/~crorres/Archimdes/Crown/CrownIntro.html).
2. Hat der Autor das Archimedische Prinzip Deiner Meinung richtig wiedergegeben? Vergleiche mit folgendem Text:

ARCHIMEDISCHES PRINZIP:

Jeder Körper verliert in einer Flüssigkeit scheinbar so viel von seinem Gewicht wie die von ihm verdrängte Flüssigkeit wiegt.

Im Hinblick auf eigene Experimente verwenden wir statt Hieros Gold-Silber-Krone handelsübliche Orangen, die wir uns aus Fruchtkern und Schale zusammengesetzt denken. Der Fruchtkern entspricht dem schwereren Gold, die Schale dem leichteren Silber. Mit dem Archimedischen Prinzip sollte es möglich sein, die Zusammensetzung von Orangen vorherzusagen, ohne die Früchte zu zerstören. Schließlich konnte auch Archimedes die Krone seines Königs nicht in ihre Bestandteile zerlegen.

1 Experiment

Prüfe, daß Orangen im Wasser schwimmen. Wenn man sie schält, schwimmt nur die Schale, die Frucht »geht unter«.

ZUR INFORMATION:

Bei Orangen beträgt die Dichte des Fruchtkerns $\varrho = 1{,}04$ g/cm³: 1 cm³ Fruchtkern wiegt 1,04 g. Die Gewichtskraft beträgt $1{,}04 \cdot 0{,}00981$ N $\approx 0{,}0102$ N, die Dichte der Schale liegt zwischen 0,75 g/cm³ und 0,8 g/cm³. Die Dichte von Wasser beträgt 1 g/cm³, die von Styropor ist 0,017 g/cm³.

2 Vorüberlegung

a) Welche Gewichtskraft müßte nach dem Archimedischen Prinzip auf einen 100 cm³ »dicken« Fruchtkern in der Luft bzw. unter Wasser wirken? Zeige, daß er unter Wasser nur noch den 0,038ten Teil wiegt.

b) Mit welcher Kraft müßte man eine Orangenschale mit Volumen 40 cm³ unter Wasser drücken, wenn man von der Dichte 0,78 g/cm³ ausgeht? Zeige, daß die Schale unter Wasser den −0,28ten Teil wiegt. Der Faktor ist negativ, weil die Schale unter Wasser nach oben drückt.

c) Heike beantwortet die Fragen a) und b) über die Formel: Faktor $= (\varrho - 1)/\varrho = 1 - 1/\varrho$. Begründe und kontrolliere Deine Rechenergebnisse.

[1] Die Fußnote mit Lösungen findet der Leser am Ende des Textes.

 ISSN 0025-5866

3 Analyse der Zusammensetzung

Auf eine Orange wirkt in Luft die Gewichtskraft 1,64 N, unter Wasser aber −0,12 N. (Man muß sie nach unten ziehen, damit sie unter Wasser bleibt.)

a) Wie schwer ist die Schale, wie schwer ist der Fruchtkern, wenn man bei der Schale von einer Dichte 0,78 g/cm³ ausgeht?

Begründe den Ansatz: $x + y = 1{,}64$; $-0{,}28x + 0{,}038y = -0{,}12$ und löse das Gleichungssystem.

b) Berechne Volumen und Radius des Fruchtkerns

c) Berechne Volumen und Radius der gesamten Orange

d) Wie dick ist die Schale? Wie dick wäre die Schale, wenn sie aus Styropor bestanden hätte?

4 Fehlerabschätzung (Gleichungssystem mit Parameter)

Leider ist die Schalen-Dichte ϱ der Orange aus Aufgabe 3 nicht genau bekannt. Sie liegt zwischen 0,75 g/cm³ und 0,8 g/cm³.

a) Berechne das Gewicht von Schale und Fruchtkern in Abhängigkeit vom Parameter ϱ.

b) Kontrolliere Dein Ergebnis anhand von Abbildung 1. Wie würdest Du die Ergebnisse für $\varrho = 0$ und $\varrho = 1{,}04$ deuten?

c) Fertige eine Ausschnittsvergrößerung im Bereich $0{,}75 \leq \varrho \leq 0{,}8$ an. Zwischen welchen Werten muß das Schalengewicht liegen?

d) Zwischen welchen Werten liegt die Schalendicke?

5 Eigene Experimente (auch in Kleingruppen)

a) Führe das Experiment der Aufgaben 3 und 4 selber durch und kontrolliere die Vorhersagen über Gewicht und Dicke der Schale durch Zerlegen der Frucht.

Tip: Die Kraft, die man aufwenden muß, um eine Orange unter Wasser zu drücken, bestimmt man als scheinbare Gewichtsreduktion, die Blei unter Wasser erfährt, wenn man es mit der Orange zusammenbindet. Um Orangen zu wiegen und durch Gewicht zu beschweren, kann man mit Nadel und Faden Schlaufen »annähen«. Wer klebrige Finger scheut, kann auch Mischungen aus Glas und Blei auf ihre Gewichtsbestandteile hin untersuchen. Ein Versuchsleiter wickelt die Kugeln zuvor in undurchsichtige Alufolie ein.

b) Überprüft die Angaben zur Dichte von Fruchtkern und Schale bei Orangen.

---

1 Computeralgebra ermöglicht in hervorragender Weise Untersuchungen zur Auswirkung von Meßfehlern. Ohne technische Hilfsmittel scheint der Rechenaufwand bei den Modellrechnungen mit Parametern wie in 4 unverhältnismäßig hoch. Die Lösungen werden daher in Form eines Maple-Protokolls präsentiert.

Lösungen

2a) Luft: 1,020 N; Wasser: 0,039 N; Quotient 0,038

2b) Luft: 0,306 N; Wasser: −0,086 N; Quotient: −0,28

2c) V sei das Volumen, dann ist die Gewichtskraft in Luft $0{,}00981 \cdot \varrho \cdot V$. Die scheinbare Gewichtsreduktion ist $0{,}00981 \cdot \varrho \cdot V$. Subtrahieren und anschließendes Dividieren führen auf die angebene Formel.

3a) Gewichtskraft: Schale x = 0,571 N; Kern 1,069 N

3b) Kern: Volumen 104,76 cm³; Radius 2,92 cm

3c) Kern und Schale zusammen: Volumen 179,41 cm³; Radius 3,49 cm

3d) Schalendicke: 0,76 cm, im Falle von Styropor: 0,13 cm

4a) Maple Protokoll, Gewichtskräfte in N, Längen in cm, Volumina in cm³:

```
> rhoKern:=1.04:
> glsys:={x+y=1.64,
  (rhoSchale-1)/rhoSchale*x+(rhoKern-1)/rhoKern*y=-0.12};
```

$$glsys := \left\{x + y = 1.64, \frac{(rhoSchale - 1)\,x}{rhoSchale} + .03846153846\,y = -.12\right\}$$

```
> loesung:=solve(glsys,{x,y});
```

$$loesung := \left\{y = .2000000000\,10^{10} \frac{44.rhoSchale - 41.}{.4807692308\,10^{11}\,rhoSchale - .5000000000\,10^{11}},\right.$$

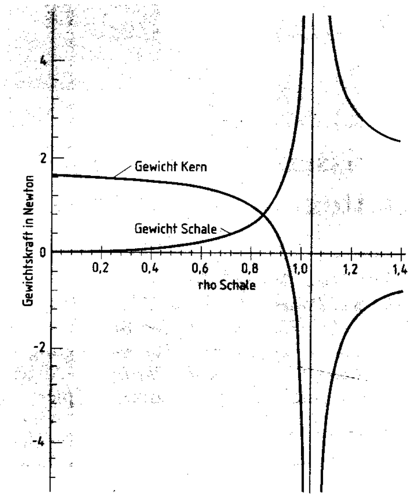

Abb. 1. Gewicht von Kern und Schale in Abhängigkeit von der Dichte ϱ der Schale

$$\left. x = -.9153846154\,10^{10} \frac{rhoSchale}{.4807692308\,10^{11}\,rhoSchale - .5000000000\,10^{11}}\right\}$$

```
> GewichtSchale:=unapply(subs(loesung,x),rhoSchale);
  GewichtKern:=unapply(subs(loesung,y),rhoSchale);
```

$$GewichtSchale := rhoSchale \to -.9153846154\,10^{10} \frac{rhoSchale}{.4807692308\,10^{11}\,rhoSchale - .5000000000\,10^{11}}$$

$$GewichtKern := rhoSchale \to .2000000000\,10^{10} \frac{44.rhoSchale - 41.}{.4807692308\,10^{11}\,rhoSchale - .5000000000\,10^{11}}$$

4b) Falls die Dichte der Schale Null wird, wird auch die Gewichtskraft der Schale 0, alles Gewicht entfällt auf den Kern. Falls die Dichte der Schale zu groß wird, kann die Schale nicht mehr für den nötigen Auftrieb sorgen. Rechnerisch schlägt sich das in negativen Werten für die Gewichtskraft des Kernes nieder. Falls die Dichte den Wert 1,04 annimmt, widersprechen sich die Gleichungen des Systems.

4c)

```
> GewichtSchale(0.75); GewichtSchale(0.8);
```

.4924137932
.6346666666

4d)

```
> VolumenKern:=GewichtKern/0.00981/rhoKern;
```

$$VolumenKern := 98.01615307\,GewichtKern$$

```
> RadiusKern:=evalf((VolumenKern/(4/3*Pi))^(1/3));
```

$$RadiusKern := 2.860243549\,GewichtKern^{1/3}$$

```
> VolumenSchale:=unapply(GewichtSchale(rhoSchale)/
0.00981/rhoSchale,rhoSchale);
```

$$VolumenSchale := rhoSchale \to -.9331137773\,10^{12} \frac{1}{.4807692308\,10^{11}\,rhoSchale - .5000000000\,10^{11}}$$

```
> VolumenFrucht:=VolumenKern+VolumenSchale;
```

$$VolumenFrucht := 98.01615307\,GewichtKern + VolumenSchale$$

```
> RadiusFrucht:=evalf(( (VolumenFrucht)/(4/3*Pi) )^(1/3));
```

$$RadiusFrucht := .9085602963\,(31.19951052\,GewichtKern + .3183098861\,VolumenSchale)^{1/3}$$

```
> Schalendicke:=RadiusFrucht-RadiusKern;
```

$$Schalendicke := .9085602963\,(31.19951052\,GewichtKern + .3183098861\,VolumenSchale)^{1/3} - 2.860243549\,GewichtKern^{1/3}$$

```
> Schalendicke(0.75); Schalendicke(0.8);
```

.504244603
.633474403

□