

# Mit Visualisierungen Vektorrechnung entdecken



WOLFGANG RIEMER – REINHARD SCHMIDT – DANIEL LEISMANN

Der Start in die Vektorrechnung gilt als mühsam und wenig motivierend. Wenn man über lineare Gleichungssysteme einsteigt und Visualisierungssoftware wie Vektoris oder GeoGebra einsetzt, kann sich das grundlegend ändern, denn mit dieser Software werden spannende Entdeckungen möglich, die dann mit »selbst zu entdeckender Theorie« zielgerichtet unterfüttert werden.

## 1 Einleitung

Der Einstieg in die Vektorrechnung wird vielfach als nicht motivierend bzw. mühsam empfunden. Vektoren werden als Verschiebungen oder als Klassen von Pfeilen »eingeführt«, wobei schon das Wörtchen »Einführung« verdächtig nach Führen klingt – ohne dass ein Ziel der Bemühungen klar im Raum steht. Entsprechend zäh verlaufen dann die Stunden. Keine Spur von Problemorientierung und nur wenig Anschlussfähigkeit an verfügbares Vorwissen. Der Werkzeugcharakter von Vektoren bleibt verborgen, eigentlich scheinen sie zu nichts nütze. Erst viele Stunden später wird dann der Richtungsvektor als Verallgemeinerung der altbekannten Geradensteigung, werden Gleichungen mit drei Variablen als Beschreibungen von Ebenen erkannt, deren Lage im Raum sich mithilfe von Vektoren ausgezeichnet charakterisieren lässt. »So kann man das aus konstruktivistischer Sicht doch eigentlich nicht machen.« Mit diesen Worten brachte ein junger Kollege, der letztgenannte Autor, sein »Unwohlsein« auf den Punkt – und uns zum Verfassen dieses gemeinsamen Diskussionsbeitrages.

## 2 Mit einem Problem starten und Vektoren als Werkzeuge entdecken

Gleichungen sind im mathematischen Schüler-Weltbild seit Grundschulzeiten verankert, ebenso die Erfahrung, dass sich

manche – wenn überhaupt – nur mit etwas Mühe lösen lassen. Und das Versprechen, dass man beim Versuch, Gleichungen zu lösen, auch Neues entdecken kann (wie negative Zahlen, Brüche, Wurzeln, das Einsetzungsverfahren der das Gauß-Verfahren ...), weckt Interesse. Bisher hat sich keine Lerngruppe einer Problemstellung, wie im Kasten 1 dargestellt, verschlossen.

## 3 Unterrichtsverlauf

Man bittet Schüler, möglichst viele Lösungen eines Systems aus zwei Gleichungen mit drei Variablen zu suchen. Durch numerisches Probieren und Einsetzen einer Gleichung in die andere reift die Erkenntnis, dass z. B. die Werte  $y$  und  $z$  linear von  $x$  abhängen, man hört Schüler von »zwei Steigungen« sprechen. Die Hypothese, dass die gefundenen Punkte jeweils auf einer Geraden im Raum liegen könnten, liegt zum Greifen nahe. Durch Visualisierung mit Vektoris oder GeoGebra (Abb. 1) wird sie zur Gewissheit.

Und wenn man dann als Lehrer schon in dieser Startstunde »die Katze aus dem Sack« lässt und visualisiert, dass die Lösungsmengen der beiden Gleichungen Ebenen beschreiben, die sich genau in der Geraden schneiden, auf der die mühsam gefundenen Punkte  $P, Q, \dots, T$  liegen, ist mit Abbildung 2 die Agenda für die kommenden Stunden umrissen.

Findet möglichst viele Lösungen  $(x|y|z)$  der folgenden Gleichungen:

einfach

$$\begin{cases} 1x + 2y - 3z = -3 \\ 2x - 2y + 0z = 0 \end{cases}$$

Schülerlösung:

$P(1|1|2), Q(0|0|1), R(-2|-2|-1), S(3|3|4), \dots$

»Wenn man  $x$  um 1 erhöht, erhöhen sich auch  $y$  und  $z$  um eins!«

Lehrerimpuls:

$$T(t|t|t) \quad U(t|t|t)$$

Schülerantwort:

$$T(t|t|t+1) \quad U(t-1|t-1|t)$$

mühsamer

$$\begin{cases} 1x + 0y + 2z = 3 \\ 2x - 1y - 1z = 0 \end{cases}$$

Schülerlösung:

$P(3|6|0), Q(1|1|1), R(-1|-4|2), S(-3|-9|3), \dots$

»Wenn man  $x$  um 2 erniedrigt, erniedrigt sich  $y$  um 5 und  $z$  erhöht sich um 1!«

Lehrerimpuls:

$$T(t|t|t) \quad U(t|t|t)$$

Schülerantwort:

$$T(t|2,5t-1,5|-0,5t+1,5) \quad U(-2t+3|-5t+6|t)$$

Kasten 1. Problemstellung und bewährter Lehrerimpuls



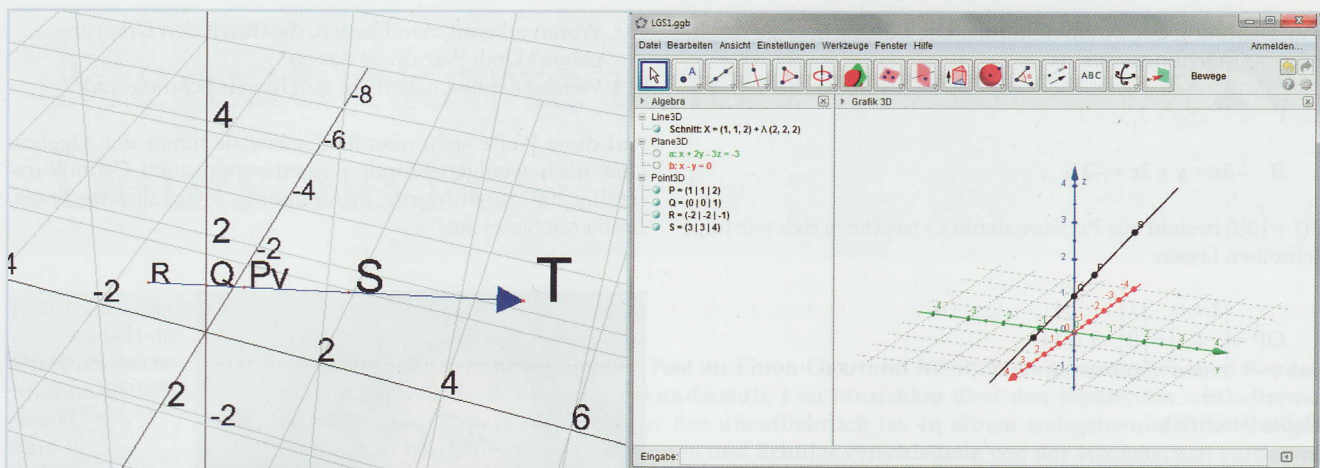


Abb. 1. Visualisierung der gefundenen Lösungspunkte in Vektoris und GeoGebra-3D

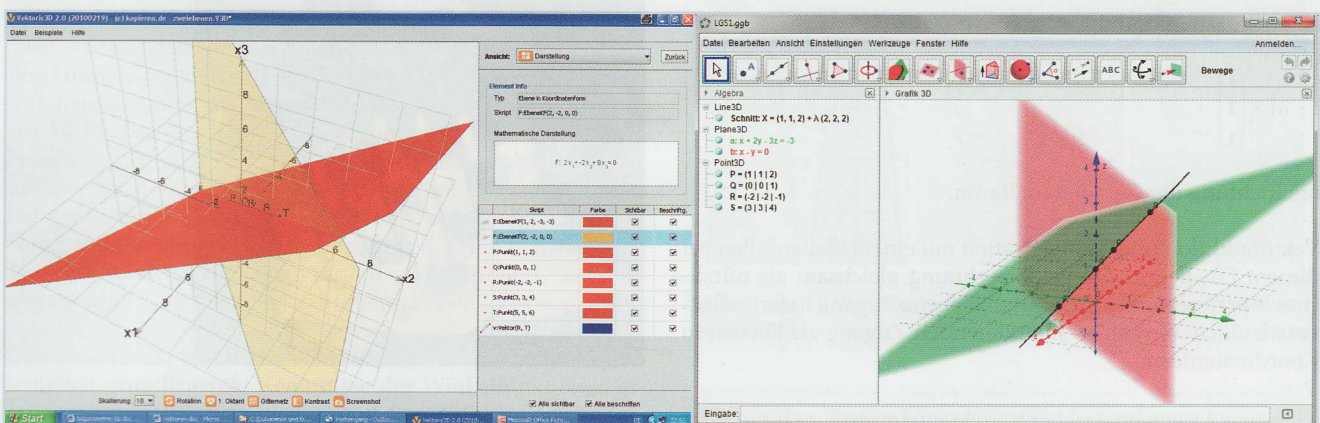


Abb. 2. Die Lösungsmenge als Ebenenschnitt in Vektoris und GeoGebra-3D

#### 4 Sicherung

Als Sicherung dieser Einstiegsstunde hält man z. B. fest: Die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems:

$$\text{I} \quad x + 2y - 3z = -3$$

$$\text{II} \quad 2x - 2y = 0$$

besteht aus den Punkten  $P(t|t+1)$ , die alle auf einer Gerade liegen.

Die beiden Gleichungen lassen sich als Ebene deuten, deren Schnitt diese Gerade ist.

In der Folgestunde löst man zum Zweck der Sicherung z. B. das Gleichungssystem:

$$\text{I} \quad x - 3,5y + 2,5z = 1$$

$$\text{II} \quad -3x + y + 2z = -3$$

durch  $P(t+1; t; t)$  und führt als Lehrerimpuls eine neue Schreibweise für inhaltlich gesicherte Zusammenhänge ein, die Vektorschreibweise, die natürlich von GeoGebra und Vektoris unterstützt wird:

$$\vec{OP} = \begin{pmatrix} 1+t \\ t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Frage nach der inhaltlichen Bedeutung von

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

führt in genetischer Weise auf die Deutung von Vektoren als Verschiebung, denn man muss den Startpunkt  $P$  in Richtung  $\vec{u}$  tatsächlich verschieben, um die übrigen Punkte der Geraden zu erhalten. Der Unterschied zwischen Punkten und Vektoren wird griffig und einprägsam formuliert:

- Punkte werden horizontal, Vektoren vertikal geschrieben.
- Mit Vektoren kann man rechnen, mit Punkten nicht.
- Zu jedem Punkt  $P(x|y|z)$  gehört nach Festlegung eines Koordinatenursprungs der »Orts«-Vektor

$$\vec{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$



Zur Sicherung der zweiten Stunde: Die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\text{I} \quad x - 3,5y + 2,5z = 1$$

$$\text{II} \quad -3x + y + 2z = -3$$

$P(t+1|t|t)$  besteht aus Punkten, deren Ortsvektoren sich wie folgt schreiben lassen:

$$\vec{OP} = \begin{pmatrix} 1+t \\ t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dabei beschreibt

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

einen Stützpunkt und

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

die Richtung der Geraden im Raum.

Vektoraddition und Multiplikation mit einem Skalar fallen bei diesem Einstieg in die Vektorrechnung gleichsam als nützliches Nebenprodukt ab. Der beschriebene Zugang liefert selbstverständlich auch einen motivierenden Zugang zu Ebenen in Koordinatenform.

## 5 Die Koordinatenform der Ebenengleichung

Die Frage nach dem Zusammenhang zwischen einer Gleichung mit drei Unbekannten und dem durch sie beschriebenen geometrischen Objekt liegt in der Luft. Während die Frage, welche Punkte zu einer vorgegebenen Ebenengleichung passen, auch im beschriebenen Frühstadium der Vektorgeometrie noch eine eher leichte Knobelei für die Schüler darstellt, ist die Aufgabe, warum sich z. B. mit der Gleichung

$$x + 2y + 3z = 6$$

tatsächlich eine Ebene beschreiben lässt, an dieser Stelle sehr mathemathisch. Die Argumentation kann sehr unterschiedlich ausfallen:

- Die Schülerinnen und Schüler können den Nachweis führen, dass vier beliebig aus der Ebene herausgegriffene Punkte ein ebenes Viereck festlegen, oder
- sie argumentieren mit den Spurgeraden, oder
- sie finden eine Formel für einen beliebigen Ebenenpunkt (und damit eine Parameterform der Ebenengleichung).

Im Anschluss bietet sich Kopfgeometrie an, angeregt durch Fragestellungen wie:

- Welche »besondere« Lage haben Ebenen, die durch die Gleichung  $z = 3$  oder  $x + y = 0$  oder  $x + y = 1$  oder  $x + y + z = 2$  beschrieben werden?

- Woran erkennt man Ebenen, die durch den Ursprung gehen? Und: Warum ist das so?
- Welche Ebenen haben die z-Achse als Schnittgerade?

Auf diese Weise sieht man die Geometrie hinter der Algebra. Und nach wenigen Stunden beantworten auch Grundkurs-schüler die durch Moritz in Abbildung 3 visualisierte Frage. Probieren Sie es aus!

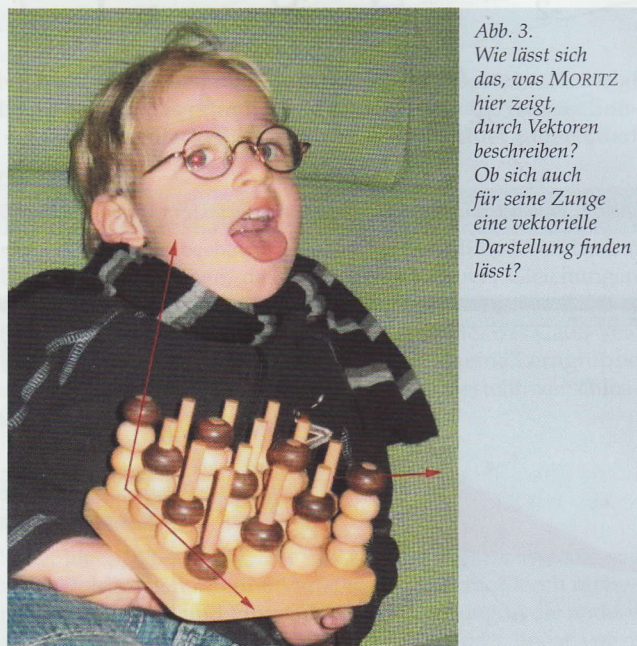


Abb. 3.  
Wie lässt sich das, was MORITZ hier zeigt, durch Vektoren beschreiben? Ob sich auch für seine Zunge eine vektorielle Darstellung finden lässt?

## 6 GeoGebra-3D und Vektoris

Wer nicht selber »programmieren« möchte, kann die Vektoris- und GeoGebra-Dateien bei den Autoren per Mail anfordern oder als Online-Ergänzung herunterladen.

Vektoris gibt es bei <http://produkte.kapieren.de/>

und auf den Begleit-CDs des Lehrwerkes Lambacher-Schweizer, Klett-Verlag.

GeoGebra-3D gibt es momentan in der Beta-Version. Diese hat zwar bei komplexeren Rechnungen noch Schwierigkeiten, aber für Visualisierungen, wie sie in diesem Artikel beschrieben werden, funktioniert die Version ausgezeichnet.

GeoGebra3D kann man unter [http://wiki.geogebra.org/en/Release\\_Notes\\_GeoGebra\\_5.0](http://wiki.geogebra.org/en/Release_Notes_GeoGebra_5.0) kostenlos herunterladen.

Dr. WOLFGANG RIEMER, ZfsL Köln, Claudiusstr. 1, 50678 Köln, [w.riemer@arcor.de](mailto:w.riemer@arcor.de), [www.riemer-koeln.de](http://www.riemer-koeln.de)

REINHARD SCHMIDT, ZfsL Engelskirchen, Hindenburgstr. 28, 51766 Engelskirchen, [schmidt@mathe-nrw.de](mailto:schmidt@mathe-nrw.de), [www.hirnwindungen.de](http://www.hirnwindungen.de)

DANIEL LEISMANN, EVT Nikolausstr. 51, 50973 Köln, [danki.leismann@gmx.de](mailto:danki.leismann@gmx.de)