Kopie eines Artikels aus mathematik lehren Heft 85 und ml Sammelband Stochastik 2008

SEKUNDARSTUFE I/II
■ 7.–13. SCHULJAHR

Geschmackstests: Spannende und verbindende Experimente

Häufig werden beschreibende Statistik, Wahrscheinlichkeitsrechnung und beurteilende Statistik ohne Beziehung zueinander unterrichtet. Hier ist ein ausgearbeiteter Unterrichtsvorschlag, der diese Gebiete verbindet.

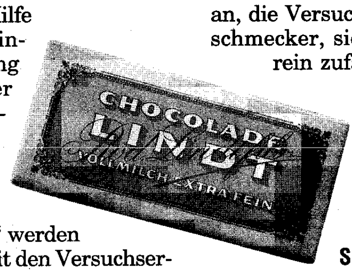
Dr. Wolfgang Riemer
unterrichtet Mathematik, Informatik und Physik am Heinrich-Mann-Gymnasium in Köln

Werner Petzolt
unterrichtet Mathematik und Deutsch an den Kaufmännischen Berufsschulen mit Gymnasialer Oberstufe in Geilenkirchen

Wie in der Geometrie und der Analysis „dümpeln" oft auch in der Stochastik strukturorientierte Kurse mit wenig Realitätsbezug lustlos vor sich hin. Wo gibt es reale Fragestellungen, an denen sich Theorie beispielhaft entwickeln lässt, an denen Theoriebestandteile zusammenwachsen, sich herauskristallisieren? Solche direkt in der Praxis verankerten Fragestellungen sind eher selten. Und wenn man versucht, sie in die Form von Schulbüchern zu pressen, zerfließt die zündende Idee allzu schnell in der Systematik der Inhaltsverzeichnisse.

Hier sei der Versuch gewagt, das Thema „Geschmackstest" für die Sekundarstufen I und II so aufzubereiten, dass Wahrscheinlichkeitsrechnung (Modellbildung auf der Grundlage von Annahmen, von Hypothesen), beschreibende und beurteilende Statistik zu einer Einheit zusammenwachsen. Dabei sind die folgenden **Leitlinien** wegweisend:

- Der Unterricht lebt von ausgewählten Experimenten.
- Die Experimente müssen echte Fragen beantworten. (Die Untersuchung, ob eine Münze mit der Wahrscheinlichkeit 0,5 auf „Kopf" landet, ist langweilig.)
- Vor Durchführung der Experimente werden Erwartungen formuliert (emotionale persönliche Bindung an das Problem).
- Man sollte Annahmen (Hypothesen) formulieren und auf ihnen aufbauend mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung Prognosen über erwartete Versuchsausgänge wagen.
- Erst nach Abschluss der „Theoriebildung" werden die Prognosen mit den Versuchsergebnissen verglichen. Die Bewertung der zugrunde liegenden Hypothesen stellt das Bindeglied zur beurteilenden Statistik dar.



Das Experiment

Vier Sorten geraspelte Vollmilchschokolade (Lindt: 2,– DM, Symbol ♣), **Milka** (0,98 DM, Symbol ♠), **Sarot**ti (0,79 DM, Symbol ♥), MAurinus (0,49 DM, Symbol ♦) werden in vier Testgläser A, B, C, D nach folgendem Modus abgefüllt: Alle vier Sorten kommen genau je einmal vor, man kann sie durch Ziehen von Spielkarten (♣ ♠ ♥ ♦) ohne Zurücklegen auf die vier Gefäße zufällig verteilen. Wer das Raspeln von Schokolade scheut, fülle die Gläser mit vier verschiedenen Cola-Sorten und benutze zur Verkostung Trinkhalme.

Die Aufgabe für die Schülerinnen und Schüler besteht darin, die vier Produkte nach sorgfältiger Prüfung den vier Gläsern zuzuordnen. Im Unterricht wird die Verkostung an separaten Tischen durchgeführt, so dass die Unabhängigkeit der Antworten sichergestellt ist. Die ausgefüllten, noch nicht ausgewerteten Testbögen werden – das ist für den Spannungsbogen sehr wichtig – in einem versiegelten Umschlag aufbewahrt. Erfahrungsgemäß bleibt dadurch die Motivation über einen längeren Zeitraum (mehrere Wochen) erhalten.

Das „Nullschmecker"-Modell

Können wir sicher sein, dass wir „gute Schmecker" sind? Könnten unsere Ergebnisse nicht auch ebenso gut durch bloßes Raten ganz zufällig entstanden sein?

Nehmen wir für das Folgende also an, die Versuchsperson sei ein Nullschmecker, sie füllt den Testbogen rein zufällig aus: Wie groß ist unter dieser Hypothese jeweils die Wahrscheinlichkeit, dass man 4, 3, 2, 1 oder 0 Sortentreffer erhält?

Schätzen nach Gefühl

Die Schätzungen einiger Schülerinnen und Schüler (hier: Klasse 7) werden an der Tafel notiert. Ein Meinungsbild über die Bewertung der Schätzungen ist der letzten Spalte von **Tabelle 1** zu entnehmen.

Simulieren

Eine Gruppe von Nullschmeckern lässt sich wie folgt simulieren: Einem Kartenspiel werden vier Karten mit vier verschiedenen Farben (♣ ♠ ♥ ♦) entnommen, gemischt und mit der Bildseite nach unten vor vier leere

„Schokoladengläser" auf das Pult gelegt. Jede Schülerin und jeder Schüler erhält nun auch vier Karten mit vier verschiedenen Farben. Alle mischen ihre Karten und legen sie verdeckt nebeneinander vor sich. Dann werden die Pultkarten umgedreht. Die Schülerinnen und Schüler decken jetzt ihre Karten ebenfalls auf und zählen, wie viele Symbolübereinstimmungen sie haben (**Tab. 2**).

Diese Simulation wird mehrmals wiederholt. **Tabelle 3** zeigt zum Vergleich die Ergebnisse von vier Computersimulationen.

Solche Simulationen dienen dazu, Erfahrungen über die Größe von Zufallsschwankungen zu sammeln. Führt man viele Simulationen mit einem größeren Versuchsumfang (vgl. **Tab. 4**) durch, so erkennt man: Bei Nullschmeckergruppen mit 25 Personen schwanken die Mittelwerte der Trefferzahlen, die „Trefferquoten" μ', allein aufgrund von Zufallsschwankungen „meist" (genauer: mit etwa 95%iger Wahrscheinlichkeit) zwischen 0,64 und 1,36.

Ein Vergleich mit Tabelle 1 zeigt, dass die intuitiven Schätzungen deutlich von den Simulationsergebnissen abweichen. Die tatsächlich erreichten Trefferquoten liegen weit unter den Schätzwerten der Schülerinnen und Schüler. Zudem kann man drei Treffer prinzipiell nicht erhalten: Hat man nämlich drei Sorten richtig identifiziert, so muss auch die vierte Sorte stimmen.

	Trefferzahl 0	1	2	3	4	Erwartungswert μ	Abstimmung (Klasse)
Sven	10 %	45 %	20 %	20 %	5 %	1,65	9
Marcel	20 %	20 %	20 %	20 %	20 %	2,00	3
Katrin	10 %	40 %	30 %	18 %	2 %	1,62	2
Björn	10 %	40 %	25 %	15 %	10 %	1,75	10
Christine	10 %	35 %	23 %	25 %	7 %	1,84	1

Tab. 1: Schätzen der Wahrscheinlichkeiten „nach Gefühl"

Trefferzahl 0	1	2	3	4	Treffersumme	Trefferquote μ' (mittl. Trefferanzahl)
11	7	6	0	1	23	23/25 = 0,92

Tab. 2: Häufigkeitsverteilung einer Simulation in der Klasse

Simulation	Trefferzahl 0	1	2	3	4	Treffersumme μ	Trefferquote μ'
1	15	4	5	0	1	18	0,72
2	13	5	6	0	1	21	0,84
3	8	9	7	0	1	27	1,08
4	7	7	10	0	1	31	1,24

Tab. 3: Computersimulation: Ergebnisse von 4 Nullschmeckergruppen mit je 25 Teilnehmern, nach Trefferquote sortiert

Überlegen und Rechnen

Oft wird die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{24}$ für vier Treffer von Schülerinnen und Schülern selbst gefunden. Die Wahrscheinlichkeiten der übrigen Trefferzahlen ergeben sich nach **Tabelle 5**.

Dort wurden alle 24 Permutationen der vier Schokoladensorten notiert und dahinter die Anzahl der Übereinstimmungen mit einem festen Muster, hier MALS.

Da Nullschmecker alle 24 Permutationen mit gleicher Wahrscheinlichkeit ($\frac{1}{24}$) ankreuzen, ergibt sich die Verteilung für die Trefferzahl eines Nullschmeckers gemäß **Tabelle 6**.

Übrigens gibt es für die Wahrscheinlichkeit von k Treffern bei Permutation von n Sorten auch eine explizite Formel (Feller 1970):

$$P_n(k) = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{n-k}\frac{(-1)^i}{i!}.$$

Bei 25 Nullschmeckern erwartet man eine (ganzzahlige) Trefferverteilung „in der Nähe" der letzten Zeile von Tabelle 6. Was wir mit „in der Nähe" meinen, wird durch die Ergeb-

	So oft lag die Trefferquote bei 100 Nullschmeckergruppen (mit je 25 Personen) …		
Simulation	… unter 0,64	… über 1,36	… zwischen 0,64 und 1,36
1	1	1	98
2	5	5	90
3	3	4	93
4	1	6	93
5	0	2	98
6	3	3	94
7	3	2	95
8	2	5	93
9	1	5	94
10	0	1	99

Tab. 4: Ergebnisse von 10 Computersimulationen zu je 100 Nullschmeckergruppen

ALMS 1	LAMS 2	**MALS** 4	SALM 2
ALSM 0	LASM 1	**MA**SL 2	S**A**ML 1
AML**S** 2	LMA**S** 1	**M**LAS 2	SLAM 0
AMSL 0	LMSA 0	**M**LSA 1	SLMA 0
ASLM 1	LSAM 0	**M**SAL 1	SMAL 0
ASML 0	LSMA 0	**M**SLA 2	SM**L**A 1

Tab. 5: Permutationen und Sortentreffer bei der Reihenfolge MALS

Trefferzahl	0	1	2	3	4
Wahrscheinlichkeitsverteilung	$\frac{9}{24}$	$\frac{8}{24}$	$\frac{6}{24}$	0	$\frac{1}{24}$
	37,5 %	33,3 %	25 %	0 %	4,2 %
Erwartete absolute Häufigkeiten bei 25 Personen	9,38	8,33	6,25	0	1,04

Tab. 6: Wahrscheinlichkeiten eines Nullschmeckers (Laplace-Hypothese) mit Erwartungswert μ = 1 und Varianz σ^2 = 1

nisse der Simulationen verdeutlicht (Tab. 3).

Sind wir „Nullschmecker" – oder sind wir besser?

In der Schülergruppe wurde **vor** der „feierlichen" Auswertung der Testbögen (vgl. **Tab. 7**) eine Vereinbarung der folgenden Form ausgehandelt: Wenn die tatsächlichen Trefferzahlen von den erwarteten allzu sehr abweichen, wenn insbesondere die Trefferquote über 1,36 oder unter 0,64 liegt, dann wird die Annahme verworfen, dass wir eine Gruppe aus lauter Nullschmeckern sind.

Trefferzahl					Treffersumme	Trefferquote μ'
0	1	2	3	4		
2	13	9	0	1	35	1,4

Tab. 7: Versuchsergebnis in einer Klasse 7

Unsere Klasse zeigte sich mit dem Testergebnis knapp zufrieden (Petzolt 1995). Sebastian freute sich: „Wir sind keine Nullschmecker." Ulrich entgegnete: „Es ist aber knapp. Viel besser sind wir nicht!" Jens erinnerte sich an die Computersimulationen, bei denen einige „Ausreißer" einen noch höheren Mittelwert hatten. Nach unserer Vereinbarung entschied sich die Klasse: „Wir verwerfen die Hypothese, dass wir eine Nullschmeckergruppe sind".

Normalverteilung, Zentraler Grenzwertsatz

Für eine Begründung der zentralen Aussage, dass die Trefferquote in Nullschmeckergruppen aus 25 Personen mit ca. 95 %iger Wahrscheinlichkeit zwischen 0,64 und 1,36 liegt, zieht man in der S I Computersimulationen heran (vgl. Tab. 3 und 4).

In der S II, wo Normalverteilung und σ-Regel zu den zentralen Themen gehören sollten, kann man diese Wahrscheinlichkeit auch (rekursiv) berechnen: $P_n(k)$ bezeichne die Wahrscheinlichkeit, dass n Nullschmecker zusammen k Treffer erreichen. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung P_1 für die Treffer eines Nullschmeckers wurde in Tabelle 6 angegeben:

$$P_1(0) = \frac{9}{24}, \ldots, P_1(4) = \frac{1}{24}.$$

Da n + 1 Personen zusammen genau dann k Treffer erreichen, wenn die letzte Person i Treffer und die n ersten Personen zusammen k – i Treffer erhielten, gilt die Rekursionsformel

$$P_{n+1}(k) = \sum_{i=0}^{4} P_n(k-i)\, P_1(i),$$

die zu den **Tabellen 8** und **9** führt.

Diese Tabellen sind ganz ähnlich zu Tabellen der Binomialverteilung, für die die Rekursionsformel

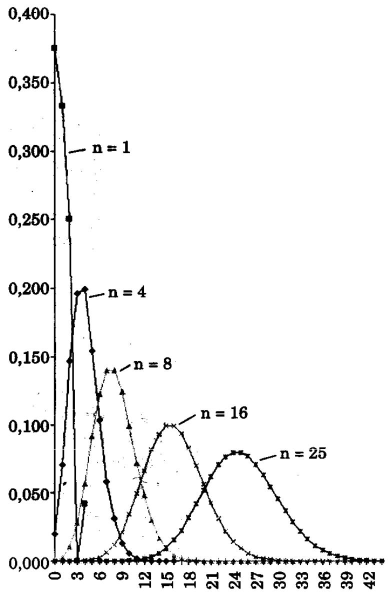


Abb. 1: Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Treffersumme k zu n = 1, 4, 8, 16, 25 Versuchspersonen

$$B_{n+1,p}(k) = \sum_{i=0}^{1} B_{n,p}(k-i)\, B_{1,p}(i)$$
$$= B_{n,p}(k)\cdot(1-p) + B_{n,p}(k-1)\cdot p$$

gilt. Setzt man die Tabelle 8 bis zur Spalte n = 25 fort, ergibt sich beispielsweise $P_{25}(16 \le k \le 34) = 0{,}944$.

Abbildung 1 zeigt die Histogramme der Treffersummen zu n = 1, 4, 8, 16,

Sortentreffer	Testpersonen n = 0	n = 1	n = 2	n = 3	**n = 4**
k = 0	1,000	0,375	0,141	0,053	0,020
k = 1		0,333	0,250	0,141	0,070
k = 2		0,250	0,299	0,230	0,146
k = 3		0,000	0,167	0,225	0,196
k = 4		0,042	0,094	0,171	0,199
k = 5			0,028	0,094	0,154
k = 6			0,021	0,053	**0,104**
k = 7			0,000	0,021	0,058
k = 8			0,002	0,010	0,031
k = 9				0,002	0,013
k = 10				0,001	0,006
k = 11				0,000	0,002
k = 12				0,000	0,001
k = 13					0,000
k = 14					0,000
k = 15					0,000
k = 16					0,000

Tab. 8: Wahrscheinlichkeiten für k Sortentreffer bei n Personen; Beispiel: Die Wahrscheinlichkeit, dass n = 4 Nullschmecker zusammen genau k = 6 Sortentreffer erhalten, beträgt 0,104

Sortentreffer	Testpersonen n = 0	n = 1	n = 2	n = 3	**n = 4**
k = 0	1,000	0,375	0,141	0,053	0,020
k = 1		0,708	0,391	0,193	0,090
k = 2		0,958	0,689	0,424	0,237
k = 3		0,958	0,856	0,648	0,433
k = 4		1,000	0,950	0,820	0,632
k = 5			0,977	0,913	0,786
k = 6			0,998	0,966	**0,889**
k = 7			0,998	0,987	0,948
k = 8			1,000	0,997	0,979
k = 9				0,999	0,992
k = 10				1,000	0,997
k = 11				1,000	0,999
k = 12				1,000	1,000
k = 13					1,000
k = 14					1,000
k = 15					1,000
k = 16					1,000

Tab. 9: Kumulierte Wahrscheinlichkeiten für k Sortentreffer bei n Personen; Beispiel: Die Wahrscheinlichkeit, dass n = 4 Nullschmecker zusammen höchstens 6 Treffer erhalten, beträgt 0,889

25 Versuchspersonen. Man erkennt, wie nach und nach die Normalverteilung mit Erwartungswert $\mu = n$ und $\sigma = \sqrt{n}$ entsteht.

Exkurs für S II: Man kann an dieser Stelle ergänzend auch prüfen, wie gut der Zentrale Grenzwertsatz als Näherungsformel brauchbar ist. Er liefert

$$P_{25}(16 \le k \le 34)$$
$$\approx \Phi\left(\frac{34,5-25}{\sqrt{25}}\right) - \Phi\left(\frac{15,5-25}{\sqrt{25}}\right)$$
$$\approx 0,9426,$$

was dem exakten Wert sehr nahe kommt.

Ein anderes Testdesign

Wer es vorzieht, sich auf Binomialverteilungen zu konzentrieren, wählt ein anderes Testdesign: Die vier Schokoladensorten werden durch „Ziehen von vier Karten mit Zurücklegen" auf die vier Gläser verteilt. Die Sorten brauchen folglich nicht mehr alle vertreten zu sein, ja es ist sogar möglich, dass alle vier Gläser gleich gefüllt sind. Ein Nullschmecker wird dann bei jedem der Gläser mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ treffen. Die Sortentreffer einer Versuchsperson sind dann binomialverteilt mit $\mu = 1$ und $\sigma = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}$, die Summe der Sortentreffer aller 25 Testpersonen ist binomialverteilt nach $B_{100,\frac{1}{4}}(k)$ mit $\mu = 25$ und $\sigma = \frac{5}{2}\cdot\sqrt{3}$. Der Unterrichtsgang ist im Übrigen mit dem oben skizzierten identisch. Insbesondere bräuchte man in der Kalkulationstabelle nur die Spalte n = 1 zu $B_{4,\frac{1}{4}}(k)$ verändern, und es entstünde die Tabelle zu der Binomialverteilung $B_{4n,\frac{1}{4}}(k)$ für n = 0, 1, 2, 3, ...

Würde man nur zwei Schokoladensorten zufällig auf die vier Gläser verteilen, würde der einzelne Nullschmecker durch $B_{4,\frac{1}{2}}(k)$ mit $\mu = 2$ und $\sigma = 1$ modelliert werden. Es gibt viele Variationsmöglichkeiten.

Qualitätsstufentreffer eines Nullschmeckers

Wir bleiben bei dem „Permutationsdesign" und der „Nullschmeckerhypothese", fragen aber nun nicht nach der Anzahl der Sortentreffer, sondern nach der Anzahl der Qualitätsstufentreffer.

a) Man unterscheidet eine hohe Qualitätsstufe (Lindt), zwei mittlere (Sarotti, Milka) und eine niedrige (Maurinus). Die Verwechslung von Milka und Sarotti gilt nun nicht als „Fehler".
b) Man unterscheidet eine hohe Qualitätsstufe (Milka, Lindt) und eine niedrige (Sarotti, Maurinus). Verwechslungen von Lindt und Milka gelten nun ebensowenig als Fehler wie die Verwechslung von Sarotti mit Maurinus.

Die zu den Permutationen gemäß a) und b) gehörenden Qualitätsstufentreffer zeigt **Tabelle 10**. Daraus erhält man **Tabelle 11**.

ALMS 1;2	LAMS 2;4	MALS 4;4	SALM 4;2
ALSM 1;0	LASM 2;2	MASL 2;2	SAML 2;2
AMLS 2;2	LMAS 1;2	MLAS 2;2	SLAM 2;0
AMSL 0;0	LMSA 0;2	MLSA 1;2	SLMA 1;2
ASLM 2;2	LSAM 1;2	MSAL 1;2	SMAL 1;0
ASML 0;2	LSMA 0;4	MSLA 2;4	SMLA 2;2

Tab. 10: Qualitätsstufentreffer gemäß a) bzw. b) bei der Reihenfolge MALS

Sortentreffer eines Milka-Schmeckers

Viele Schülerinnen und Schüler meinen, sie könnten Milka mit Sicherheit herausschmecken, viele Erwachsene glauben dies hingegen für Lindt. Für den sicheren Milkaschmecker erhalten wir z. B. als sechselementige Grundmenge die dritte Spalte von Tabelle 5, in der alle Permutationen bei Milka einen Treffer aufweisen.

	Qualitätsstufentreffer 0	1	2	3	4	Erwartungswert	Varianz
Modell a	$\frac{4}{24}$	$\frac{8}{24}$	$\frac{10}{24}$	0	$\frac{2}{24}$	$\mu = \frac{36}{24} = 1,5$	$\sigma^2 \approx 1,08$
Modell b	$\frac{4}{24}$	0	$\frac{16}{24}$	0	$\frac{4}{24}$	$\mu = 2$	$\sigma^2 \approx 1,33$

Tab. 11: Wahrscheinlichkeitsverteilung der Qualitätsstufentreffer eines Nullschmeckers

Resümee

Wie man sieht, sind viele Fragestellungen möglich. Dabei kommt es darauf an,

- ein Modell gründlich zu analysieren,
- den **zentralen Stellenwert von Simulationen** für die beurteilende Statistik herauszuarbeiten und
- deutlich zu machen, dass es sich bei allen Wahrscheinlichkeitsverteilungen (bei den intuitiv aufgestellten, aber grundsätzlich auch bei den nach Laplace berechneten) „nur" um **Hypothesen** handelt, die man möglicherweise verwerfen muss, wenn sie die Wirklichkeit nicht gut beschreiben.

Hätte man die Testbögen sofort auszählen lassen, wäre kein Spannungsbogen entstanden, die Theoriebildung hätte kaum noch Sinn, die Lernsequenz wäre in den Bereich deskriptiver Statistik abgerutscht.

Die Simulationsprogramme, Tabellenkalkulationsblätter und die Examensarbeit (Petzolt 1995) sind gegen 20 DM und einen mit 4,40 DM frankierten A4 Rückumschlag bei W. Petzolt, Balinger Str. 18, 50739 Köln, erhältlich. Auch Kunert (1995) ist sehr lesenswert.
Ein Schulbuch, das in den Stochastik-Kapiteln „alternative Wege" zu einer Integration von Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik beschreitet, ist das von Weidig (1996)

Literatur

Feller, W.: An introduction to Probability Theory and its Applications, Vol I. – New York Third Edition 1970.
Kunert, J. u. a.: Ein statistisches Experiment mit Schülern auf Bevorzugung von Erfrischungsgetränken. – In: Stochastik in der Schule, Band 15 (1995), Heft 3, S. 23 f.
Petzolt, W.: Einführung in die Stochastik – Feinplanung und unterrichtliche Erprobung des Riemer'schen Konzepts in einer Klasse 7. – Studienseminar Leverkusen, Examensarbeit 1995.
Riemer, W.: Schmeckt Lindt-Schokolade besser als Alpia? – In: mathematik lehren 62 (1994), S. 14 f.
Riemer, W.: Geschmack und Image – In: mathematik lehren 67 (1994), S. 64 f.
Weidig, I. (Hg.): Lambacher-Schweizer. Klett-Verlag, Stuttgart 1996. Ausgabe NRW, Bände 7, 8, 9, 10.