WOLFGANG RIEMER

# Der Datenlogger radelt mit

## Grund*VORSTELLUNGEN* im Wortsinn *ERFAHREN*

Lerngruppe: Klasse 8 - 11

Idee: Kalkulationstabellen und Funktionsgraphen mit persönlichem Erleben verknüpfen

Vorwissen: Tabellenkalkulation

Arbeitsblatt: Kugelkoordinaten ?

Material: Smartphone

Zeitbedarf: 1-3 Doppelstunden

Lineare und quadratische Funktionen, gehören zur DNA der Mittelstufenmathematik. Sie helfen zu verstehen, was beim Radfahren mit Gepäck im Gegenwind und beim beschleunigenden Tritt in die Pedale passiert - und sie zeigen, was Heinrich Winter mit seiner ersten GrundERFAHRUNG im wahrsten Sinn des Wortes gemeint haben könnte.

Wir starten mit Erkenntnissen, die man aus selbst erhobenen Daten gewinnen kann. Im zweiten Teil des Beitrags geht es unabhängig von ersten darum wie viel Mathematik man alleine schon beim Sammeln der Daten lernen kann – und welche Möglichkeiten Chatbots eröffnen. Wer sich primär dafür interessiert, beginne die Lektüre mit dem Abschnitt Daten Loggen und dem Radeln durch einen Kreisverkehr.

### Rollwiderstand

Kräfte F werden in N (Newton) gemessen. Ein Newton ist ungefähr so viel wie eine 100g - Tafel Schokolade wiegt (genau sind es 0,981N). Oliver wiegt zusammen mit seinem Fahrrad m = 80 kg. Das entspricht 800 Tafeln, er wiegt ca. 800 N[1]. Ein klitzekleiner Anteil $c_r$ dieser Gewichtskraft (zwischen 0,3% und 0,7%) wirkt als Bremskraft und sorgt dafür, dass das Rad auch ohne Gegenwind irgendwann stehenbleibt. Je härter die Reifen aufgepumpt sind, je weniger Profil sie haben, je besser die Lager geschmiert sind und je glatter die Straße ist, desto kleiner ist $c_r$. Bei $c_r$ = 0,5% wird Oliver durch die Rollwiderstandskraft $F_{roll}$ = 0,005·785N ≈ 4N (4 Tafeln) gebremst. Kommt eine 20kg Packtasche hinzu, ist es eine Tafel mehr. Formal gilt $F_{roll} = c_r mg$ mit g=9,81.

### Luftwiderstand

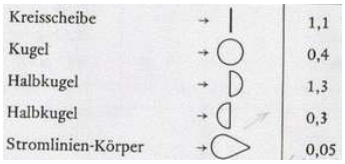



**Abb. 1** Luftwiderstands-Beiwert $c_w$

Zusätzlich zum Roll- bremst der Luftwiderstand. Wenn man bei Windstille ganz langsam fährt, spielt der keine Rolle, aber er wächst (leider) quadratisch mit der Windgeschwindigkeit v (in m/s), der einem als Fahrtwind ins Gesicht bläst: doppelt so schnell, viermal so viel. Zusätzlich ist der Luftwiderstand proportional zur Angriffsfläche A (in m²), die man dem Wind anbietet. Abb. 1 zeigt: er hängt zusätzlich davon ab, wie windschnittig die Angriffsfläche geformt ist.

Qualitativ kann man all das fühlen, wenn man eine Hand aus dem fahrenden Auto hält und „windschnittig“ verformt.

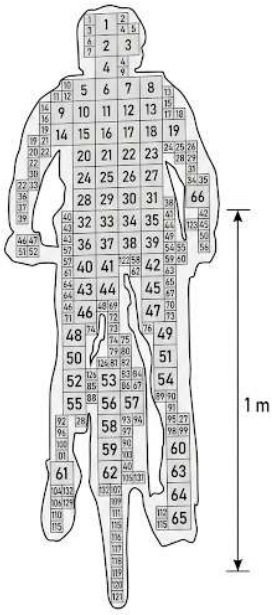



**Abb. 2** Foto ausmessen

Für Oliver ergibt sich durch Ausmessen des Frontalfotos aus Abb. 2 die „Gegenwind-Angriffsfläche“ A=0,52 m². Für den Luftwiderstandsbeiwert, bei aufrechter, also wenig windschnittiger Sitzposition veranschlagen wir $c_w \approx 0{,}95$, weil Körper und Rahmenteile etwas abgerundet sind. Damit ergibt sich $c_w \cdot A = 0{,}4962$ m².

[1] (Physiker nutzen die Proportionalität „Gewicht F (in N) = Masse (in kg) mal Erdbeschleunigung g=9,81 (in m/s²), kurz: $F = mg$

Zusätzlich ist der Widerstand proportional zur Luftdichte, für die man $\rho = 1{,}3\ kg/m^3$ veranschlagt.
Alles zusammengenommen ergibt sich bei einer Geschwindigkeit 18 km/h = 18/3,6 m/s =5 m/s = ein Luftwiderstand von
$F_{luft} = 1{,}3\ c_w\ A \cdot v^2 =$
$1{,}3 \cdot 0{,}4962 \cdot 5^2\ N \approx 16\ N$,
etwa so viel wie 16 Tafeln wiegen, also das Vierfache des Rollwiderstandes. Bei 30 km/h beträgt er beachtliche 44,8N… und da beginnt das Krafttraining im Fitness Studio.

### Beschleunigung

Ohne Wundkanal kann man Kräfte beim Radfahren nur indirekt über ihre Wirkung, die Beschleunigung a, messen (a steht für acceleration). a gibt an, um welchen Wert die Geschwindigkeit v (in m/s) in einer Sekunde zu oder abnimmt. Sie hat damit die Maßeinheit „m/s je s“ also m/s²). Den Zusammenhang zwischen Kraft und Beschleunigung stellt die berühmte und wirklich grandios einfache Newtonsche Bewegungsgleichung her:

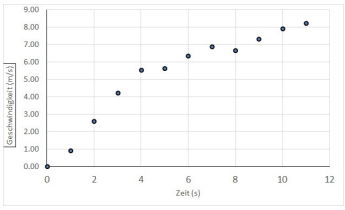
$F = m \cdot a$ oder $a = \frac{1}{m} F$

Die Beschleunigung a (in m/s²) ist also direkt proportional zur Antriebs- oder Bremskraft F (in N). Der Proportionalitätsfaktor ist der Kehrwert der Masse m (in kg). Das ist (neben dem kleineren Rollwiderstand) der Hauptgrund dafür, dass Rennräder leicht sind. Bei gegebener Antriebskraft („Tritt in die Pedale“) beschleunigt man umso stärker je kleiner die zu beschleunigende Masse ist, zu der natürlich auch der Radler nebst Gepäck zählt. Newtons Gleichung ist der Grund dafür, dass alle Gegenstände, egal wie leicht oder schwer, im Vakuum, d. h. ohne Luftwiderstand, gleich schnell fallen. Wenn sie die doppelte Masse haben, haben sie auch doppeltes Gewicht F und $a = F/m$ ist immer die Erdbeschleunigung g = 9,81 m/s², die man auf der Kirmes im Free Fall Tower oder beim Bungee-Jumping fühlt.

### Sprint - Kräftebilanz

Wie erwähnt wiegt Oliver mit seinem Fahrrad 80 kg. Er hat mit seinem Smarphone am Lenker in Abb. 3 einen Sprint aus dem Stand über 11 s protokolliert. Wie man das mit Kalkulationstabellen selber macht (wenn man als „Wissenschaftler“ Zusammenhänge wirklich verstehen will) oder durch Chatbots machen lässt, wenn nur die Ergebnisse interessieren, steht unten in Abschnitt Daten loggen.
Auf der Hochachse liest man Olivers Geschwindigkeiten in m/s ab. In den ersten 4 s hat er (recht linear) von 0






| s | m/s | a | $F_a$ | $F_{Luft}$ | $F_{roll}$ | $F_{Kurbel}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.00 | 1.39 | 110.88 | 0.00 | 0.04 | 110.92 |
| 1 | 0.92 | 1.39 | 110.88 | 0.55 | 0.04 | 111.48 |
| 2 | 2.60 | 1.39 | 110.88 | 4.38 | 0.04 | 115.30 |
| 3 | 4.22 | 1.39 | 110.88 | 11.59 | 0.04 | 122.51 |
| 4 | 5.54 | 1.39 | 110.88 | 19.98 | 0.04 | 130.90 |
| 5 | 5.65 | 0.41 | 33.04 | 20.74 | 0.04 | 53.82 |
| 6 | 6.37 | 0.41 | 33.04 | 26.38 | 0.04 | 59.45 |
| 7 | 6.89 | 0.41 | 33.04 | 30.83 | 0.04 | 63.91 |
| 8 | 6.66 | 0.49 | 39.40 | 28.81 | 0.04 | 68.25 |
| 9 | 7.32 | 0.49 | 39.40 | 34.84 | 0.04 | 74.28 |
| 10 | 7.91 | 0.49 | 39.40 | 40.70 | 0.04 | 80.14 |
| 11 | 8.24 | 0.49 | 39.40 | 44.12 | 0.04 | 83.56 |

**Abb. 3** Sprint

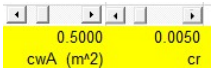
auf 5,54 m/s, also mit a = 1,39 m/s² beschleunigt. In jeder Sekunde stieg die Geschwindigkeit um 1,39 m/s = 5 km/h. Nach einem Schaltvorgang stieg sie während der folgenden 2 s von 5,65 auf 6,89 m/s, was einer Beschleunigung von 0,41 m/s² entspricht. Nach einem weiteren Schaltvorgang stieg sie von 8 bis 11 s von 6,6 auf 8,24 m/s, was der Beschleunigung 0,49 m/s² entspricht. Wenn man diese Beschleunigungen mit der Masse 80 kg multipliziert, ergibt sich die Antriebskraft $F_a$, die das Rad nach vorne zieht. Oliver musste aber noch kräftiger kurbeln, weil er zusätzlich den (wachsenden) Luftwiderstand $F_{Luft}$ und den (konstant bleibenden) Rollwiderstand $F_{Roll}$ überwinden musste. Man erhält die Kurbelkraft (letzte Spalte der Tabelle aus Abb. 3) als Summe der drei oben genannten Kräfte die in den Salten 4, 5 und 6 stehen. Wir halten fest: Wenn man von der Kraft, die man der Kurbel zur Verfügung stellt, die Rollreibung und den Luftwiderstand abzieht, erhält man die Kraft, die das Rad beschleunigt.

### Modellrechnung

Wie müsste die Fahrt weitergehen, wenn Oliver nach Erreichen einer bestimmten Geschwindigkeit $v_0$ (8,36 m/s) zu treten aufhört, dann also nur durch den Luftwiderstand und die Rollreibung gebremst ausrollt? Wenn man $c_r$ (0,005) und $c_wA$ (0,5 m²) kennt, dann kann man diese Frage mit der im Sekundentakt ablaufenden Modellrechnung aus Abb. 4 beantworten: In der ersten Sekunde wirkt die Bremskraft
$F_{Brems} = F_{Roll} + F_{luft} =$
$c_r mg + 1{,}3\ c_w\ A \cdot v^2 =$
$9{,}81 \cdot 80 \cdot 0{,}005 + 1{,}3 \cdot 0{,}5 \cdot 8{,}6^2 N =$
25,76 N
Die zugehörige Beschleunigung
$a_{Brems} = \frac{1}{m} F_{Brems} = 0{,}37 \frac{m}{s^2}$
gibt an, um welchen Wert dv sich die Geschwindigkeit während der ersten Sekunde verringert.
Die Geschwindigkeit $v_1 = v_0 - dv$ =8,3 m/s ist dann die Startgeschwindigkeit für die zweite Sekunde.
Die Modellrechnung geht dann Zeile für Zeile so lange weiter bis das das Rad zum Stillstand gekommen ist

und in der Modellrechnung mit negativer Geschwindigkeit zurückzurollen beginnt. Das passiert in Abb. 4 nach 86 s.

Durch Addieren der sekundenweise zurückgelegten Wegstückchen (letzte Spalte), erhält man den Rollweg in Abhängigkeit von der verstrichenen Zeit. Wie in der Modellrechnung der Rollweg (in m) und die Rollgeschwindigkeit (in m/s) von der Zeit (in s) abhängen, zeigen die Graphen aus Abb. 4.




Parameter einstellen

| t (s) | v (m/s) | Fluft+Froll (N) | dv (m/s) | s (m) |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 8.63 | 26.25 | 0.33 | 0 |
| 1 | 8.30 | 24.59 | 0.31 | 8.63 |
| 2 | 7.99 | 23.09 | 0.29 | 16.93 |
| 3 | 7.70 | 21.73 | 0.27 | 24.92 |
| 4 | 7.43 | 20.49 | 0.26 | 32.62 |
| 5 | 7.18 | 19.37 | 0.24 | 40.05 |
| 6 | 6.93 | 18.35 | 0.23 | 47.23 |
| 7 | 6.70 | 17.41 | 0.22 | 54.16 |
| 8 | 6.49 | 16.55 | 0.21 | 60.87 |
| 9 | 6.28 | 15.75 | 0.20 | 67.35 |
| 10 | 6.08 | 15.02 | 0.19 | 73.63 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 84 | 0.08 | 3.93 | 0.05 | 253.22 |
| 85 | 0.03 | 3.92 | 0.05 | 253.30 |
| 86 | -0.02 | 3.92 | 0.05 | 253.33 |
| 87 | -0.07 | 3.93 | 0.05 | 253.31 |
| 88 | -0.12 | 3.93 | 0.05 | 253.24 |
| 89 | -0.17 | 3.93 | 0.05 | 253.12 |

Modellrechnung

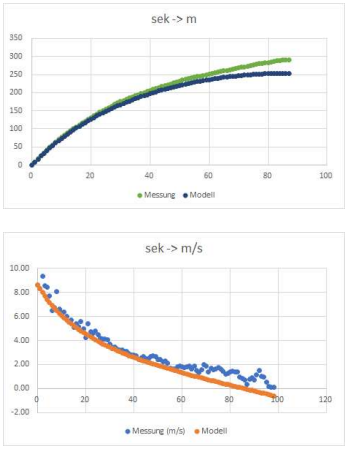



**Abb. 4** Modellrechnungen

**Modell (rot) und Messung (blau)**

Fazit: Ein Radler, der mitsamt Rad m = 80 kg wiegt, dem Wind die effektive Angriffsfläche $c_w$ $A = 0{,}5$ m² bietet, bei dem $c_r = 0{,}5\%$ des Gewichtes als Rollwiderstand wirken, müsste bei einer Startgeschwindigkeit von 8,6 m/s = 30,6 km/h 235 m weit rollen und nach 82 Sekunden zur Ruhe kommen.

**Realität, Parameter bestimmen**

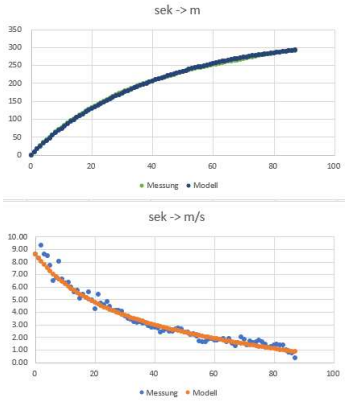



**Abb. 5:** Modellanpassung

Die blauen Graphen zeigen in Abb. 4, wie Olivers Ausrollversuch tatsächlich verlief. Man erkennt, dass seine Geschwindigkeit am Ende, wo der Luftwiderstand keine Rolle mehr spielt, nicht ganz so schnell absank wie die Modellrechnung prognostiziert. Das spricht dafür, dass Olivers Rad besser rollte als im Modell angesetzt. Tatsächlich passt die Modellrechnung zu $c_r = 0{,}33\%$ deutlich besser zu Olivers Messwerten.

Fazit: Durch Modellanpassung kann man Olivers Roll- und Luftwiderstandsparameter $c_r$ und $c_wA$ experimentell bestimmen.

**Forschungsauftrag**

Führt Ausrollversuche durch:

a) mit hart und mit weich aufgepumpten Reifen

b) ohne und mit Regencape.

Erforscht durch Auswerten der Zeit-Weg-Geschwindigkeitsdaten, die der GPS-Tracker deines Smartphones bereitstellt, ob/ wie stark sich der Rollwiderstandsbeiwert $c_r$ durch Reduzieren des Reifendrucks und der Luftwiderstandsparameter $c_wA$ durch ein Regencape (da sind echte Windfänger) verändert.

Achtung: Es muss absolut windstill sein. Die Teststrecke muss horizontal verlaufen. Sportplätze sind ideal.

**Daten loggen**

und Kugelkoordinaten erleben.

Apps wie GPS-Logger (Abb. 7) speichern im Sekundentakt die Position P auf der Erdoberfläche in Kugelkoordinaten (λ; φ) gemäß Abb. 6. Diese bestehen aus geographischer Breite latitude φ, 90°≤ φ ≤+90° und geographischer Länge longitude λ, -180°≤ λ ≤ 180°. φ = 90° entspricht dem Nordpol, φ = 0° dem Äquator. Greenwich, ein Londoner Vorort, liegt auf dem Nullmeridian λ = 0°.

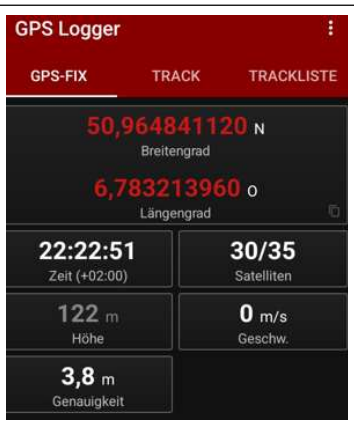
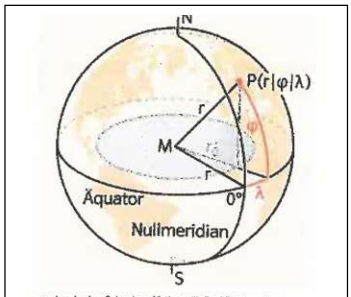



**Abb. 7:** GPS-Logger schenken uns (in Verbindung mit Abb. 6) spannende Fragen, deren Antworten man dann praktisch kontrollieren kann.

Beispiel:
„Wie müsste sich die Anzeige ändern, wenn man 100 m nach Osten / nach Norden geht?
Prüfe nach!“

Beim Speichern entstehen gpx-Dateien wie in Abb. 8. Das sind Textdateien, die man per Mail teilen, im




aus: Lambacher-Schweizer: Mathematik Qualifikationsphase Leistungskurs/Grundkurs, ISBN 978-3-12-735401-0, Seite 435 Fig. 1

$\varphi = lat$ = Breite…Richtung → Norden
$\lambda = lon$ = Länge…Richtung → Osten

$$y = \frac{lat - lat_0}{180}\pi \cdot r \text{ (Erdradius } r = 6370000)$$

$$x = \frac{lon - lon_0}{180}\pi \cdot r \cdot \cos\left(\frac{lat}{180} \cdot \pi\right)$$

**Abb. 6** Kugelkoordinaten

```
<trkpt lat="50.967786" lon="6.758713">
<time>16:11:25</time></trkpt>
<trkpt lat="50.967818" lon="6.758715">
<time>16:11:26</time></trkpt>
<trkpt lat="50.967852" lon="6.758708">
<time>16:11:27</time></trkpt>
```

**Abb. 8** Anfang der gpx-Datei zur vierfachen Umrundung eines Verkehrskreisels. Start und Ende im Osten.

Browser oder einem Texteditor öffnen und dann auch bearbeiten kann.
Die Umwandlung von gpx-Dateien in Excel-Tabellen erledigen Internet-Portale wie gpsvisualizer.com oder seit kurzem auch Chatbots wie ChatGPT, vgl. Abb. 9. Letztere wandeln die Kugelkoordinaten auf Wunsch auch gleich in kartesische Koordinaten um, wobei man den Ursprung (z. B als den ersten Datenpunkt) und die Richtung der Koordinatenachsen vorgeben kann.
Beim Durchfahren eines Verkehrskreisels bietet sich als Ursprung auch der Kreiselmittelpunkt an, den man als Mittelwert von Minimum und Maximun der gemessenen Kugelkoordinaten festlegt.

### ChatGPT befragen

Ich habe eine gpx Datei hochgeladen. Erzeuge daraus eine Excel Tabelle mit den Spalten
Zeit, Latitude, Longitude und
no: verstrichene Zeit in s beginnend bei -1
x: Koordinate Richtung Osten,
y: Koordinate Richtung Norden
beides in m. Ursprung ist der zweite Trackpunkt
s: zurückgelegter Weg in m
v: Geschwindigkeit in m/s

**Abb. 9**: Prompt zur Umwandlung einer gpx-Datei in eine Excel-Tabelle. Auch die Berechnung des zurückgelegten Weges, der Geschwindigkeiten kann man dem Chatbot übertragen.

Der Prompt aus Abb. 9 verwandelt die gpx-Datei der Kreiselfahrt in eine Excel-Tabelle wie in Abb. 10 im Bereich A4:H10. Wenn man die Spalten

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | Erde | Breitenkreis | | |
| 2 | | | | | 6370000 | 4011551 | < Radius (m) | |
| 3 | | | | | 6.758716 | 50.967818 | < Ursprung | |
| 4 | Zeit | no | φ (Latitude) | λ (Longitude) | x (m) | y (m) | s (m) | v (m/s) |
| 5 | 16:11:25 | -1 | 50.967786 | 6.758713 | 0 | -4 | | |
| 6 | 16:11:26 | 0 | 50.967818 | 6.758716 | 0 | 0 | 0.00 | 3.68 |
| 7 | 16:11:27 | 1 | 50.967853 | 6.758708 | -1 | 4 | 3.82 | 4.06 |
| 8 | 16:11:28 | 2 | 50.967889 | 6.758684 | -2 | 8 | 8.18 | 4.47 |
| 9 | 16:11:29 | 3 | 50.967923 | 6.758646 | -5 | 12 | 12.82 | 4.97 |
| 10 | 16:11:30 | 4 | 50.967946 | 6.758576 | -10 | 14 | 18.37 | 5.31 |

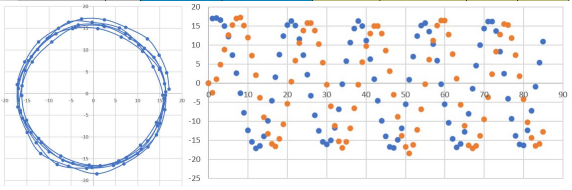


**Abb. 10** Excel Auswertung einer Kreiselfahrt. Für die Grafiken wurde der Ursprung (Zellen E3:F3) in den Kreismitte verlegt.

x und y dann als Punktdiagramm darstellt, entsteht eine „Excel-Landkarte“. Wenn man x und y in Abhängigkeit der durchfahrenen Strecke darstellt, entstehen die Graphen trigonometrischer Funktionen.
Wenn es sich - wie am Anfang dieses Beitrags - um einen Ausrollversuch handelt, kann man auch das dem Chatbot mitteilen und nach einer Gewichtsangabe in kg den Rollwiderstandsbeiwert $c_r$ und die effektive Stirnfläche $c_wA$ berechnen lassen und - extrem spannend - mit dem vergleichen, was die händische Modellrechnung lieferte.

### Mathe hat mit mir zu tun

Selbstverständlich kann man auf Chatbots verzichten und

- nur die im Sekundenabstand gemessenen Kugelkoordinaten in eine Exceltabelle kopieren,
- den Schülerinnen und Schülern das Umrechnen in kartesische Koordinaten als herausforderndes Problem „schenken“ (!),
- dabei die in Abb. 6 erkennbaren Umrechnungsformeln entdecken (ggf. entschlüsseln) lassen,
- Pythagoras nutzen, um den zurückgelegten Weg sekundenweise zu berechnen und
- Geschwindigkeiten (sinnvollerweise über symmetrische, 2 Sekunden umfassende) Differenzenquotienten berechnen…

Das ist das klassische bottom-up Vorgehen, das hier auch deswegen motiviert, weil man den Umgang mit Kalkulationstabellen an eigenen Daten erlernt und Zeile für Zeile erlebt „Mathe hat mit mir zu tun“.
Chatbots schenken uns aber auch die nicht weniger faszinierende Alternative des Bottom up (Blackbox-Whitebox) Vorgehens: Man gibt vor, was der Chatbot geliefert hat und lässt Schülerinnen und Schüler herausfinden, wie die KI gerechnet hat und wie genau deren Ergebnisse mit den eigenen zusammenpassen. Ein solches Vorgehen ist bei aller Offenheit präzise und zielführend ist. Es kann nicht misslingen, weil das Ergebnis ja gegeben ist und „nur“ die Frage im Mittelpunkt des Unterrichtsgeschehens steht, wie man dorthin kommt … und wie genau.

### Resümee

Mit einen Datenlogger holt man im Fahrradsattel Erlebtes in den Matheunterricht so hinein, dass sich R. v. Hofes Grund*vorstellungen* mit H. Winters Grund*erfahrungen* zu Mathematik verknüpfen.

**Methode:**

• Eigene Experimente in Kleingruppen durchführen, Forschungsergebnisse präsentieren

**Praxistipp:**

• Top-Down Vorgehen oder Bottom Up; 10 HZ Logger liefern noch bessere Ergebnisse

### Literatur

Riemer, W.: Radeln mit dem Computer im Rucksack MNU 1995/2.