Bestell-Nr. 58220

mathematik lehren

Erfolgreich unterrichten: Konzepte und Materialien

220
Juni 2020

+ MatheWelt
Das Schülerarbeitsheft
Risikostrukturausgleich – wie geht das?

Risiken begegnen

FRIEDRICH

KOLLABORATIV & DIGITAL
Daheim erhobene Daten online auswerten

IDEENKISTE
Bleistiftkonturen modellieren

MATHE AKTUELL
Corona: Wie ein Virus die Mathematik publik machte

Herausgeber des Thementeils:
Wolfgang Riemer, Hans-Stefan Siller

Liebe Leserin, lieber Leser,
„Risiko" hat viele Facetten. Vielleicht gehören Sie zur Corona-„Risikogruppe"? Oder Sie denken an „riskante Geldanlagen", ans „Zocken an der Börse", weil es den Schulbuchaufgaben zum Trotz keine Zinsen auf Erspartes gibt? Vielleicht auch an riskante Überholmanöver, Risikolebensversicherungen oder den Täuschungsversuch in der letzten Klausur? – Wie sagte neulich Max, der mehrfach aufgeflogene Spickzettelschreiber: „No Risk, No Fun!" Oder – ganz ungefährlich – einfach nur an das mögliche Rausgeschmissenwerden beim Mensch-Ärgere-Dich-Nicht?
Alle diese Aspekte sind nicht Gegenstand des Mathe*unterrichts* – aber sie haben etwas zu tun mit Wahrscheinlichkeit, mit Gewinn und Verlust … also auch mit *Mathe*. Hier modellhaft tragfähige Brücken zu schlagen, zwischen der Welt da draußen und dem Unterricht da drinnen, Sie zu spannenden Unterrichtsstunden zu verführen, die ohne Risiko gelingen – das ist das Ziel des vorliegenden Heftes.

Wolfgang Riemer Hans-Stefan Siller

Alle **Arbeitsblätter** dieser Ausgabe stellen wir Ihnen auch als **editierbares Word-Dokument** zur Verfügung. Dazu geben Sie den **Download-Code d58220ap** bei **www.friedrich-verlag.de** in die **Suchmaske** ein. So bekommen Sie auch den Zugriff auf alle ergänzenden **Online-Materialien**.

Risiken begegnen

BASISARTIKEL

Unterrichtspraxis

Magazin

Risiko

Ein Zwilling kommt selten allein. Ähnlich ist es mit dem *Risiko*. Sein Zwilling heißt *Chance*. Und wenn diese Begriffe im Mathematikunterricht fallen, steht mit hoher Wahrscheinlichkeit Stochastik auf dem Stundenplan.

WOLFGANG RIEMER, HANS-STEFAN SILLER

Begriffe wie *Chance* und *Risiko* gehören zu unserem täglichen Sprachgebrauch. Im Mathematikunterricht bezeichnen sie *Wahrscheinlichkeiten*: So nutzen Lernende in Nordrhein-Westfalen gemäß Lehrplanvorgaben „Wahrscheinlichkeiten zur Beurteilung von Chancen und Risiken", und in Thüringen begründen sie im Abitur, dass „bei der Durchführung eines Signifikanztests das Risiko, die Anzahl der Reservierungen irrtümlich zu erhöhen, höchstens 5 % beträgt und damit gering ist".

Risikomanagement: Chance oder Risiko?

Um entscheiden zu können, ob es sich bei einer Wahrscheinlichkeit um eine Chance oder um ein Risiko handelt, braucht es eine *Bewertung*. Ist das Ereignis positiv besetzt („Gewinn"), spricht man von *Chance*, ist es negativ besetzt („Verlust"), von *Risiko*. Wenn man Gewinn und Verlust „numerisch beziffern" kann, dann kann man mit *Erwartungswerten* von *Zufallsgrößen* ein Risikomanagement betreiben und versuchen, die Wahrscheinlichkeiten dort groß zu machen, wo Gewinne winken, und dort klein zu halten, wo Verluste oder Gefahren drohen oder nur kleine Gewinne zu erwarten sind.

Wie **Kasten 1** belegt, findet man außerhalb des Mathematikunterrichts weniger griffige Versuche einzugrenzen, was Risiko meinen könnte. Und das *Bundesinstitut für Risikobewertung* (**Kasten 2**) verzichtet ebenso auf eine Definition von „Risiko" wie das *Harding Zentrum für Risikokompetenz*.

Ein kompetenter Umgang mit Risiken läuft letztlich auf die Betrachtung von Wahrscheinlichkeiten für das Eintreten bedrohlicher Ereignisse hinaus – in der Regel unter Einbezug von Fachwissen aus unterschiedlichen Disziplinen. Wie können wir angesichts der „chaotischen Welt da draußen" das Thema „Risiko" konkret und sinnstiftend im Mathematikunterricht angehen? Arbeiten wir den mathematischen Kern heraus.

Spielend dem Risiko begegnen

Beginnen wir mit einem bekannten Spiel (v. d. Steinen 1980), bei dem im Gegensatz zu vielen anderen das Risiko vollständig berechenbar ist. Sein Einsatz verspricht bereits in Klasse 7 durch den handlungsorientierten Zugang spannende und erfolgreiche Unterrichtsstunden. Hier dient es – in Zusammenhang mit einigen Zeitungsmeldungen (s. u.) – zunächst zur Begriffsklärung und der Entfaltung verschiedener Aspekte des Themas „Risiko". Spätestens in der Sek. II lässt es sich über Zufallsgrößen,

1 WISSENSWERT

Was ist „Risiko"?

Risiken bezeichnen Noch-Nicht-Ereignisse, die wir uns hier und jetzt vergegenwärtigen müssen, ohne sie bereits wirklich zu kennen. Risiken lauern bösartigerweise in den Seitengängen einer Zukunft, die uns den Blick um die Ecke verweigert. *(Risknews 01/04)*

Sicher ist nur eins: Leben ist Risiko. Was wir tun, ist riskant. Was wir nicht tun, aber auch. Und – so die paradoxe Quintessenz – den größten Risiken werden wir dann begegnen, wenn wir alle Risiken vermeiden. *(Risknews 01/04)*

Risk is defined as the product:
Risk = (Value) x (Vulnerability) x (Hazard) *(UNESCO 1972)*

Eine Gefahr wird zum Risiko, wenn sie sich aufgrund mangelhafter oder fehlender Information nur unzureichend oder nicht einschätzen lässt. *(Langer 2014)*

Risiko ist die Möglichkeit einer negativen Zielabweichung. *(Kimmig 2001)*

Quellen: Romeike, Frank./Erben, Roland Franz (2004): Was ist Risiko? – In: RISKNEWS 01/04, S. 44–45, 2004; https://www.umwelt.uni-hannover.de/fileadmin/institut/Arbeitsmaterialien/3_Der_Mensch_und_das_Risiko.pdf
Jens M. Kimmig: Risiko-Kontrolling in der Unternehmung, Springer Fachmedien, 2001, ISBN 978-3824473427

Wahrscheinlichkeitsverteilungen und deren Erwartungswerte theoretisch durchdringen.

Die Böse Sechs

Beim Würfelspiel „Die Böse Sechs“ wirfst du gleichzeitig so viele (m) Würfel, wie du möchtest. Wenn keine Sechs dabei ist, dann wird dir die Summe X der gewürfelten Augenzahlen gutgeschrieben. Aber wehe, wenn (mindestens) eine Sechs dabei ist! Dann sind alle Punkte verloren, und du erhältst nichts: X = 0, also 0 Punkte!

1	Würfel				6 dabei?	Gewinn
2	3	3	5	6	1	0
3	2	3	4	6	1	0
4	1	4	1	2	0	8
5	6	5	6	5	2	0
6	5	2	1	1	0	9
7	6	5	4	4	1	0
8	4	5	5	5	0	19
9	5	4	1	3	0	13
10	5	5	1	2	0	13
11	1	2	6	1	1	0
12	5	4	1	5	0	15
13	5	3	1	2	0	11
14	6	1	3	3	1	0
15	3	5	1	5	0	14
16	2	5	2	6	1	0
17	1	6	3	4	1	0
18	1	3	1	3	0	8
19	4	1	3	1	0	9
20	5	2	3	5	0	15
21	2	1	1	1	0	5

	5,724	<- mittlerer Gewinn bei 4 Würfeln
0	52,6%	
1	0,0%	
2	0,0%	
3	0,0%	
4	0,0%	
5	0,3%	
6	0,9%	
7	1,7%	
8	2,8%	
9	4,9%	
10	3,8%	
11	5,3%	
12	6,9%	
13	4,6%	
14	5,5%	
15	4,8%	
16	3,6%	
17	0,7%	
18	0,9%	
19	0,5%	

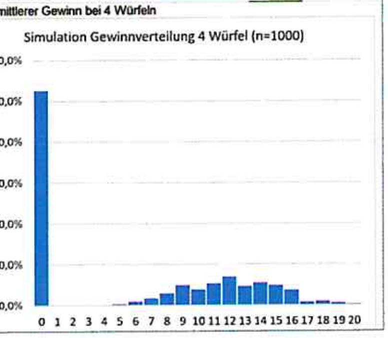


Abb. 1: Simulation des Spiels „Die Böse Sechs“

Bei wenigen Würfeln hat man eine gute Chance, dass keine Sechs dabei ist und man also eine (folglich eher kleine) Punktsumme X mitnehmen kann. Nimmt man viele Würfel, steigt das Risiko des Ereignisses $X = 0$, also dafür, dass man nichts gewinnt (vgl. **Abb. 1**).

Aber wenn trotz der vielen Würfel doch keine Sechs dabei ist, kann man sich eine eher große Punktsumme X gutschreiben. Wie viele Würfel sollte man also am besten nehmen?

Risikofreude oder Risikoscheu?

May „geht voll ins Risiko“, sie „setzt alles auf eine Karte“ und wählt $m = 15$ Würfel. Die Chance, dass sie etwas gewinnt, ist mit $\left(\frac{5}{6}\right)^{15} \approx 6{,}49\,\%$ klein, aber dann darf sie mit einem satten Gewinn von durchschnittlich $15 \cdot 3 = 45$ Punkten rechnen: Wenn nämlich keine 6 dabei ist, entspricht das dem Wurf von 15 Würfeln mit den Augenzahlen 1, …, 5, und jeder dieser Würfel steuert im Schnitt $(1+2+\ldots+5):6=3$ Punkte bei. Auf lange Sicht erwirtschaftet May mit ihrer riskanten Strategie also $E_{15}(X)=(15\cdot 3)\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{15} \approx 2{,}92$ Punkte.

Max dagegen scheut das Risiko: Er möchte nur selten nichts (also $X = 0$ Punkte) gewinnen. Deshalb wählt er $m = 2$ Würfel. Die Chance, dass er etwas gewinnt, ist dann nämlich groß: $\left(\frac{5}{6}\right)^{2} \approx 69{,}44\,\%$ – aber er gewinnt im Mittel nur $2 \cdot 3 = 6$ Punkte. Wie viel erwirtschaftet Max mit seiner Risikoscheu auf lange Sicht? $E_2(X)=(2\cdot 3)\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{2} \approx 4{,}17$ Punkte. Das ist deutlich mehr als bei der risikofreudigen May.

Das Risiko managen: Strategien entwickeln

Es gibt wohl kaum eine Schulklasse, die sich jetzt nicht von selber (also wirklich ohne Arbeitsauftrag) auf die Suche nach der gewinnträchtigsten Strategie begibt. Am besten erst einmal händisch, denn: Verstehen kommt von stehen, stehen bleiben, verlangsamen! Und arbeitsteilig, damit man ins Gespräch kommt über die Sache, die man erlebt hat.

Erst dann simulierend, etwa mit einer Tabellenkalkulation (**Abb. 1**), oder analytisch mit der Formel $E_m(X)=3\cdot m\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{m}$, was zu **Tab. 1** führt. Die Spalte 2 zeigt: Obwohl das Risiko, die böse Sechs mit $X = 0$ zu erhalten, bei 5 und 6 Würfeln mit $P_5(X=0) = 1-\left(\frac{5}{6}\right)^{5} \approx 59{,}8\,\%$ bzw. $P_6(X=0) = 1-\left(\frac{5}{6}\right)^{6} \approx 66{,}5\,\%$ recht groß ist, lassen sowohl 5 als auch 6 Würfel den größten Gewinn ($\approx 6{,}03$ Punkte) erwarten.

Würde man das Auftauchen einer Sechs statt durch 0 Punkte durch zum Beispiel -6 Punkte

② WISSENSWERT

Das Bundesinstitut für Risikobewertung (BfR)

Das *Bundesinstitut für Risikobewertung* (BfR) wurde 2002 als Anstalt des Öffentlichen Rechts im Geschäftsbereich des Bundesministeriums für Ernährung und Landwirtschaft gegründet und soll einen unabhängigen und fortschrittlichen Verbraucherschutz bieten (www.bfr.bund.de).

Sein Motto: *Risiken erkennen – Gesundheit schützen.*

Das BfR bewerten die Risiken – also die möglichen Gefahren und die Wahrscheinlichkeit ihres Eintretens – aus unterschiedlichen Bereichen des täglichen Lebens. Dazu gehört die Bewertung von Chemikalien, pflanzlichen und tierischen Lebensmitteln, Spielzeug oder Kosmetika.

Aktuelle wissenschaftliche Erkenntnisse aus internationalem Austausch mit Experten aus anderen wissenschaftlichen Einrichtungen und aus der eigenen Forschung fließen in die Bewertungen ein. Das Ziel des BfR ist die unabhängige wissenschaftsbasierte Risikobewertung.

Auch Umfragen zur aktuellen Lage werden durchgeführt, wie etwa im BfR-Corona-Monitor (https://www.bfr.bund.de/de/bfr_corona_monitor-244782.html).

Notfallpläne entwickelt das *Bundesamt für Bevölkerungsschutz und Katastrophenhilfe* (https://www.bbk.bund.de/).

m	$E_m(X)$	$F_m(X)$
1	2.50	1.50
2	4.17	2.33
3	5.21	2.68
4	5.79	2.68
5	6.03	2.44
6	6.03	2.44
7	5.86	1.54
8	5.58	0.98
9	5.23	0.40
10	4.85	−0.19

Tab. 1: Wie hoch ist der erwartete Gewinn in Abhängigkeit von der Würfelzahl m?

bestrafen, bliebe zwar das *Risiko für einen Verlust* (im Sinne der zugehörigen Wahrscheinlichkeit) unverändert, aber der erwartete Gewinn in Abhängigkeit von der Würfelzahl m wäre nun $F_m(X) = 3 \cdot m \left(\frac{5}{6}\right)^m - 6 \cdot \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^m\right)$, und er wäre maximal für 3 und für 4 Würfel, nicht mehr für 5 und für 6 Würfel (vgl. **Tab. 1**).

Manche Schülerinnen und Schüler fragen weiter: Was wäre, wenn man die Sechser noch böser macht, als sie schon sind, indem man *jeden* Sechser von der Punktsumme der übrigen Würfel abzieht? Jedenfalls: eine gute Frage …

Subjektive Bewertung

Würde man den risikoscheuen Max oder die risikofreudige May als unvernünftig bezeichnen? Nicht unbedingt! May sucht den großen Gewinn, den Nervenkitzel, vielleicht auch die Anerkennung in ihrer Gruppe – das kennt man von Mutproben (die beim Würfeln deutlich harmloser ausgehen als etwa beim Schwarzfahren oder gar beim U-Bahn-Surfen).

Lässt sich auch dies mathematisch modellieren? Hier ein „Risiko-mutiger" Modellansatz: Was wäre, wenn May zu den erwarteten $3 \cdot n$ Punkten zusätzlich – zur Modellierung ihres subjektiven Risiko-Nutzens – noch m^k „Adrenalinpunkte" addiert (nach dem Motto „Je mehr Würfel, desto eher geht's daneben, desto größer der Kick, wenn's trotzdem klappt")? Dann wäre $E_m(X) = (3m + m^k) \left(\frac{5}{6}\right)^m$ zu maximieren – und bei $k = 2{,}7$ ergäbe sich das Maximum tatsächlich für $m = 15$, also genau für Mays risikofreudige Strategie.

Wohlgemerkt: Der Gewinn wird damit nicht allein in Würfelpunkten gemessen, es kommt Mays Spaßfaktor hinzu. Sie verwendet also eine andere Zufallsvariable, als allein die Spielregeln es nahelegen.[1]

Risiko in der Presse

Und hier der angekündigte Versuch eines Brückenschlags zwischen der „Bösen Sechs" und der Welt da draußen. Die Zitate in **Kasten 3** stammen aus dem Kölner Stadt-Anzeiger vom 20.03.2020 (Corona-Pandemie). Sie zeigen: Risiken außerhalb des Matheunterrichts sind

- Wahrscheinlichkeiten – aber auch
- (Funktionswerte von) Zufallsgrößen oder deren
- Erwartungswerte.

Auch bei konkreten Modellierungen von Alltagssituationen können somit (schul-)mathematische Überlegungen nützlich sein.

Eine Abituraufgabe

Die Schule schenkt uns die Freiheit, die Realität unter Laborbedingungen „klinisch sauber" zu studieren. Wenn wir händisch würfeln oder das Würfeln digital simulieren, dann ist das keineswegs nur „Würfelbudenmathematik": Wir arbeiten tatsächlich mit mathematischen Modellen, managen das Risiko mithilfe von Funktionen und können dabei durchaus einiges über und für die Realität lernen.

So etwa im Kontext der Überbuchung[2] im Tourismusbereich in Anlehnung an eine Abituraufgabe aus Thüringen 2019, die wir in Richtung Risikomanagement umdeuten und sinnstiftend erweitern.

Risiko *Überbuchung*

Wie in der Branche bekannt ist, erscheinen selten wirklich alle Kunden, die einen Platz gebucht haben. Daher verkauft man mehr Plätze, als tatsächlich vorhanden sind, freut sich über die höheren Einnahmen und hofft, dass es so passt. Kommen tatsächlich mehr Kunden, als Plätze vorhanden sind, werden diese Kunden entschädigt.

In der Abituraufgabe werden bei einem Ausflugsschiff für 60 freie Plätze 64 Tickets verkauft. Unter der (durchaus fragwürdigen) Modellannahme, dass die einzelnen Kunden unabhängig voneinander mit der Wahrscheinlichkeit $p = 90\,\%$ erscheinen, werden mit der Binomialverteilung berechnet:

- die Chance, dass die 60 Plätze für die ankommenden Kunden ausreichen.
- das Risiko, dass mehr als 2 Kunden entschädigt werden müssen.

Unter der Annahme, dass der Anteil p der Ticketbesitzer, die die Fahrt antreten wollen, gesunken ist, ist im letzten Schritt der Abituraufgabe begründet zu entscheiden, ob bei der Wahl der folgenden Nullhypothese eher das Ausnutzen der Chance, die Einnahmen zu erhöhen, oder eher die Vermeidung des Risikos, Personen mit Reservierung (großzügig) entschädigen zu müssen, im Vordergrund stand: Der

③ WISSENSWERT

Verschiedene Sichtweisen auf das „Risiko"

Risiko als Wahrscheinlichkeit
Das Risiko, also die negativ besetzte Wahrscheinlichkeit, infiziert zu werden, ist bei älteren Menschen genauso hoch wie bei jüngeren Menschen. Im ersten Zeitungsausschnitt steht „Risiko" tatsächlich für eine Wahrscheinlichkeit. Aber das Ereignis „Infektion" verursacht bei älteren Menschen höhere Kosten.

„Diese Patientengruppe ist gefährdet, einen schweren Verlauf zu erleiden, wenn sie infiziert wird. Das Risiko einer Infektion selbst ist dagegen nicht höher als bei anderen Personen."
aus: „Die große Hoffnung auf den Impfstoff", Kölner Stadt-Anzeiger vom 20.03.2020 © DuMont Mediengruppe

Risiko als Wert einer Zufallsgröße
Hier werden nicht nur die Wahrscheinlichkeiten, sondern auch die *Kosten*, also die *Werte von Zufallsgrößen,* als Risiken bezeichnet. Das belegt der Ausdruck „erhöhtes Risiko" bei gleicher Infektionswahrscheinlichkeit.
(Beim Würfelspiel *Die Böse Sechs* entspräche das einer stärkeren Bestrafung: So könnte man das Auftreten mindestens einer Sechs statt durch 0 Punkte durch –6 Punkte bewerten – oder sogar so viele Punkte abziehen, wie alle Sechserwürfel zusammen zeigen. Dadurch steigt umgangssprachlich das Risiko, das mit dem Ereignis „mindestens eine 6" verbunden ist, obwohl die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis selbst gleich geblieben ist.)

„Was mit Risikogruppe gemeint ist, muss man sich genau anschauen. Das heißt nicht, dass es besonders wahrscheinlich ist, sich zu infizieren. Vielmehr ist gemeint, dass das Risiko höher ist, schwer zu erkranken, wenn man infiziert ist. Das Missverständnis kursiert in der Bevölkerung, wir sprechen lieber von einem erhöhten Risiko als von einer Risikogruppe."
aus: „Die große Hoffnung auf den Impfstoff", Kölner Stadt-Anzeiger vom 20.03.2020 © DuMont Mediengruppe

Risiko und Erwartungswert
„Ins Risiko gehen" meint hier: so entscheiden, dass der *Erwartungswert des Gewinns* nicht mehr maximal ist. Wenn man das „Begleichen der Schuld" durch positive Punkte, die das Image verbessern, mit berücksichtigt, erhält man eine neue Bewertungsfunktion (Zufallsgröße) – und dieses Ins-Risiko-Gehen kann durchaus entsprechend maximiert werden. (Das ist wie bei der risikofreudigen May, die zusätzlich zu den gewonnenen Würfelpunkten auch den Nervenkitzel positiv bewertet.)

„Jetzt ist die Stunde gekommen, in der die Banker ihr angekratztes Image ablegen und gleichsam ihre Schuld begleichen können gegenüber einer Gesellschaft, die ihnen einst aus der größten Patsche ihrer Geschichte half. In der Stunde der Not müssen die Banken ins Risiko gehen."
aus: „25 Milliarden Euro für NRW-Wirtschaft", Kölner Stadt-Anzeiger vom 20.03.2020 © DuMont Mediengruppe

Reeder des Ausflugsschiffs möchte nur dann mehr als 64 Tickets verkaufen, wenn man die Nullhypothese H_0: $p \leq 0{,}9$ gegen die Alternative H_1: $p > 0{,}9$ bei einer Stichprobe vom Umfang 200 auf dem Signifikanzniveau von 5 % verwerfen kann.

Die ersten beiden Aufgabenteile prüfen also die Sicherheit im Umgang mit der Binomialverteilung ab; im letzten Aufgabenteil müssen die Schülerinnen und Schüler nachweisen, dass sie die einseitigen Testalgorithmen beherrschen und sich daran erinnern, dass nach der Logik einseitiger Signifikanztests H_0 stets die „konservative" Hypothese ist, an deren Gültigkeit man „so lange wie möglich" festhalten sollte – denn es hat fatale Folgen („bringt große Verluste"), wenn man sie fälschlich verwirft, also die Gültigkeit von H_1 unterstellt, obwohl H_0 gilt. Das Risiko, mehr Tickets zu verkaufen, obwohl nach wie vor $p = 90\,\%$ der Kunden ihre Buchung wahrnehmen, wird durch das Signifikanzniveau 5 % nach oben begrenzt.

Wie dieses Beispiel zeigt, sind die schulüblichen Signifikanztests Paradebeispiele für Risikomanagement, bei aller gerechtfertigten Kritik an der „Testeritis" (Amrhein u. a. 2019). Da man die Risiken – insbesondere in Abituraufgaben – aber nicht durch Zufallsgrößen quantitativ bewertet, gleicht das Entscheiden eher einem „Blindflug im Nebel" (Moßburger 2014).

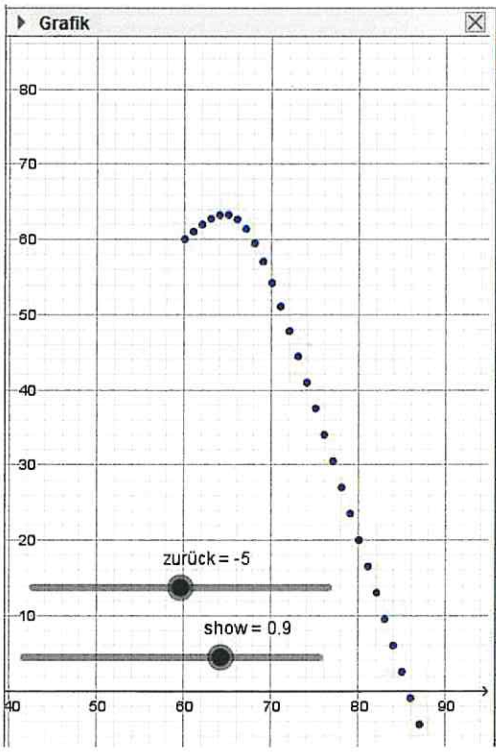
Das Überbuchungs-Risiko wirklich bewerten: Die Abituraufgabe sinnstiftend neu interpretieren

Kein Touristikmanager und auch kein Statistiker wird im Kontext Überbuchung auch nur im Traum auf die Idee kommen, einseitige Signifikanztests mit aus dem Hut gezauberten Hypothesenwahrscheinlichkeiten und willkürlich festgelegten Stichprobenumfängen zu bemühen. Der Testansatz bedient hier normierte Aufgabenformate, nicht den gesunden Menschenverstand. Für einen Betriebswirt ist das Risiko, das Überbuchungskontingent zu erhöhen, Name: ______________________ Datum: ______________________

Risikomanagement beim Verkauf nicht vorhandener Plätze

Ein Ticket kostet einen Zaster. Daher werden bei 64 verkauften Tickets 64 Zaster eingenommen. Es sind 60 Plätze vorhanden. Sollten tatsächlich zufällig mehr als 60 Ticketbesitzer die Fahrt antreten wollen, so erhalten diejenigen, die nicht mitfahren können, ihren Fahrpreis zurück und dazu noch das Vierfache des Fahrpreises als Entschädigung (insgesamt also jeweils 5 Zaster).

1. **Berechnen Sie, wie viele *Zaster* Gewinn man bei 64 verkauften Tickets (nach Abzug der Erstattungen) erwarten darf. Vergleichen Sie Ihre Lösung mit dem unten stehenden Bild.**
2. **Vergleichen Sie die Gewinnerwartungen im Falle von 62, 63, …, 66 verkauften Tickets.**
3. **Welche Überbuchung sollte man – bei gleichen Rückerstattungsmodalitäten – dem Touristikunternehmen empfehlen, wenn nur *p* = 80 % der Ticketbesitzer erscheinen (*Show-Quote p* = 0,8)?**
4. **Bestimmen Sie umgekehrt die Höhe der Rückerstattung, die bei der *Show-Quote p* = 0,8 beim Verkauf von 66 Tickets einen maximalen Gewinn garantiert.**
5. **Der Graph scheint ab etwa 70 Tickets annähernd linear zu verlaufen. Begründen Sie! Bestimmen Sie den zugehörigen linearen Term.**



Tabelle

B6 =Summe(Folge((i - 60) B$2 Binomial(A6, B$1, i, false), i, 60, A6))

	A	B	C	D	E	F
1	show	0.9				
2	zurück	-5				
3	verkauft	erstattung	gewinn			
4	60	0	60			
5	61	-0.008	60.992			
6	62	-0.065	61.935			
7	63	-0.269	62.731			
8	64	-0.78	63.22			
9	65	-1.772	63.228			
10	66	-3.38	62.62			
11	67	-5.657	61.343			
12	68	-8.563	59.437			
13	69	-11.997	57.003			
14	70	-15.83	54.17			
15	71	-19.937	51.063			
16	72	-24.219	47.781			
17	73	-28.605	44.395			
18	74	-33.048	40.952			

obwohl sich an der sogenannten „Show-Quote" der erscheinenden Kunden $p = 0{,}9$ nichts geändert hat, herzlich irrelevant. Er wird

1. das Risiko, dass mehr Kunden kommen, als Plätze vorhanden sind, durch die Höhe der zu zahlenden Entschädigung bewerten, dann
2. die Show-Wahrscheinlichkeit p schätzen und
3. so viele Tickets verkaufen, dass er unter Berücksichtigung der Entschädigungen mit maximalen Einnahmen rechnen kann.

Wenn man sich diese Sichtweise zu eigen macht, kann man die Aufgabe wie in **Arbeitsblatt 1** weiterdenken. Man erkennt unschwer, wie sich das Thema „Risiko" in die Abiturvorbereitung integrieren lässt.

Doch das Thema passt bereits in Klasse 7 (vgl. Arbeitsblatt-Variante im **Online-Material**): Für 6 Plätze in einem Heißluftballon bieten wir 9 Tickets an, weil jeder Kunde nur mit Wahrscheinlichkeit 2/3 erscheint (damit lässt sich gut würfeln) ...

Und noch mehr Risiko

Quantitative Bewertungen von Risiken

Der Beitrag **Die Katze im Sack kaufen** zeigt, wie Schülerinnen und Schüler – in spielerischem Kontext – durch händisches Simulieren und Kosten-Nutzen-Analysen die Grundgedanken der Spieltheorie erleben. Nash-Gleichgewicht und Minimax-Konzept werden einander gegenübergestellt. Dazu braucht man nur lineare Funktionen und Erwartungswerte. Im Beitrag **Risikoveränderungen** werden ~~wie~~ absolute und relative Veränderungen von Risiken mit Bildgittern visualisiert. Die Skizze eines in Klasse 12/13 erprobten Unterrichts, in dem mithilfe von Risikobewertungen die unterschiedlichen Rollen der Nullhypothese H_0 und der Alternative H_1 selbstständig entdeckt werden, findet sich im Beitrag **Die Suche nach H_0**. Die spielerische Lernumgebung gestattet sinnvolle A-priori-Bewertungen von Hypothesen und macht erlebbar, wie die Resultate von Signifikanztests zu deuten sind – und wie man sie eben nicht deuten darf. So „impft" man gegen weit verbreitete Fehldeutungen der Ergebnisse statistischer Signifikanztests (Amrhein u. a. 2019). Eine auf empirischen Daten – und ethischen Überlegungen – basierte Wertung wird im Beitrag **Ein Baby als Klima-Risiko?** vorgestellt.

Risikokompetenz, Risikobereitschaft

In der Literatur stolpert man schnell über den Begriff „Risikokompetenz", die es schon im Grundschulalter zu fördern gilt (Martignon/Hoffrage 2019, S. 135). Empfohlen werden dazu leichte Würfelspiele, mit denen Kinder durch rein qualitative Bewertung von Ereignissen lernen, nach Spielstrategien zu suchen, bei denen negative (verlustträchtige) Ereignisse mit möglichst kleinen Wahrscheinlichkeiten, aber auch positive Ereignisse mit möglichst hohen Wahrscheinlichkeiten vorkommen. In der Tat ist das schon präformales Risikomanagement. Das Entscheidungsspiel **Gehst du gern ein Risiko ein?** widmet sich der „Risikoscheu" und ermuntert, Spielprotokolle mit Strichlisten anzufertigen, um so zu reflektiertem Handeln in unsicheren Entscheidungssituationen zu kommen. Dabei wird mit subjektivistisch interpretierten Laplace-Wahrscheinlichkeiten argumentiert, und der Erwartungswert wird gleichsam nebenbei entdeckt und genutzt. Als spieledidaktischen „Knaller" kann man **Qwixx: Kreuzen oder nicht?** ab Klasse 9 einsetzen.

Abgerundet wird unser Blick auf Risiken durch die MatheWelt, die mit Glück, Pech, Bruch- und Prozentrechnung erleben lässt, wie gesetzliche Krankenkassen mit Gesundheitsfonds und Risikostrukturausgleich funktionieren. Und damit wir (oft privat versicherten) Lehrerinnen und Lehrer kompetent auf die möglicherweise offen gebliebenen Fragen unserer Schülerinnen und Schüler antworten können, bietet der Begleitartikel **Wie versichert man fair?** die nötigen Hintergrundinformationen. Und vielleicht wirft ja bei diesem Thema sogar einmal ein eingeladener Sozialwissenschaftler einen Blick durch die Türspalte des geöffneten Klassenzimmers ...

Literatur

Amrhein, V./Greenland, S./McShane, B. (2019): Retire statistical significance. – In: Nature 567, S. 305–307.

Henze, N./Vehling, R. (2017): Eine möglichst große Augensumme, aber bitte ohne Sechs! – In: Stochastik in der Schule Bd. 37, Heft 2, S. 2–11.

Krey, S. (2001): Konzeption und Anwendung eines risikoorientierten Prüfungsansatzes in der internen Revision. Verlag für Wirtschaftskommunikation, Berlin.

Langer, H. (2014): Der Mensch und das Risiko, S. 10. https://www.umwelt.uni-hannover.de/fileadmin/institut/Arbeitsmaterialien/3_Der_Mensch_und_das_Risiko.pdf

Martignon, L./Hoffrage, U. (2019): Wer wagt, gewinnt? – Wie Sie die Risikokompetenz von Kindern und Jugendlichen fördern können. Bern, Hogrefe Verlag.

Moßburger, M. (2014): Unklare Begriffe und Wunschdenken bei Signifikanztests. – In: Stochastik in der Schule Bd. 34, Heft 1, S. 2–8.

Romeike, F./Erben, R.F. (2004): Was ist Risiko? – In: RISKNEWS 01/04, S. 44–45, (Zugriff: 16.04.2020) http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/risk.200490008/pdf

v. d. Steinen, J. (1980): Erwartungswert als zentraler Begriff. – In: Mathematiklehrer 1, S. 30–33. (Die ersten Hefte von *mathematik lehren* hießen „Mathematiklehrer".)

Anmerkungen

1 Exkursion mit Tiefgang: Für nicht allzu viele Würfel kann man die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Zufallsgröße „Gewinn" mit Pfad und Summenregel oder auch rekursiv berechnen. Wer sich für „erzeugende Funktionen" interessiert und eine geschlossene Formel sucht, wird fündig bei (Henze/Vehling 2017, S. 3). Dort steht auch, wie man aus „Die Böse Sechs" durch die neue Regel „Wer die höhere Punktzahl erreicht, gewinnt" ein faszinierendes Partnerspiel macht. Das überraschende Ergebnis: Wer der Partnerin „höflich, aber berechnend" den Vortritt lässt, ist im Vorteil, weil er seine Würfelzahl auf die zuvor von der Partnerin gewählte Zahl abstimmen kann. Und die schlichte Strategie der Gewinnmaximierung ist hier nicht die optimale.

2 Zur Überbuchungsproblematik gibt es im Internet interessante Artikel, z. B. https://www.general-anzeiger-bonn.de/freizeit/reise/von-freien-plaetzen-in-vollen-flugzeugen-profitieren_aid-43134321

WOLFGANG RIEMER

Auf der Suche nach H_0

Signifikanztests und das Risiko falscher Entscheidungen

LERNGRUPPE: 12. Schuljahr

IDEE: Mit einem Entscheidungsspiel die „Philosophie" einseitiger Signifikanztests entdecken

ARBEITSBLATT: Spielstrategien analysieren

WEITERES MATERIAL: Beutel mit roten/weißen Kugeln

VORWISSEN: Pfadregel, Binomialverteilung, evtl. Regel von Bayes

ZEITBEDARF: 4 Stunden

In vielen Bundesländern wird „beurteilende Statistik" durch das einseitige Testen von Hypothesen abgedeckt. Die Wahl der Nullhypothese H_0 und der Alternative H_1 bringt nicht nur Lernende oft zur Verzweiflung, weil sie von (meist versteckt formulierten) Interessenlagen abhängt, die bei der Abiturvorbereitung aus eingekleideten Aufgabentexten zu decodieren sind. Wenn man aber die Interessen durch explizite Bewertung von Fehlentscheidungen im Rahmen eines authentischen Gewinnspiels offenlegt und berechenbar macht, werden die unterschiedlichen Rollen der Hypothesen transparent. Schülerinnen und Schüler entdecken so die hinter Rezepten versteckten Konzepte.

Eine Spielsituation hat dabei einen lernpsychologischen Vorteil: Man kann den Hypothesen A-priori-Wahrscheinlichkeiten zuordnen und in Abhängigkeit von Testergebnissen A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten berechnen. So wird quantifizierbar, was es bedeutet, Hypothesen auf dem 5 %-Signifikanzniveau (mit 5 % Irrtumswahrscheinlichkeit) zu verwerfen: Die verworfene Hypothese H_0 wird unwahrscheinlicher, aber die Alternative H_1 gilt weit verbreiteten Fehlvorstellungen zum Trotz beileibe nicht mit 95 %iger Sicherheit. Last but not least führt das Verlassen der Spielsituation zu einer kritischen Bewertung der häufig völlig überschätzten Aussagekraft von Signifikanztests und wirkt daher im besten Sinne allgemeinbildend.

Einseitige Hypothesentests

Zur Einstimmung auf das Thema erinnert ein Beispiel (Alkohol-Stichprobe, Bamberg 2009) an das Ritual, nach dem Hypothesentests ablaufen:

Eine Fabrik erzeugt Alkopop-Getränke mit einem Alkoholgehalt von 5 %. Dabei treten beim Alkoholgehalt Schwankungen auf. Die Hypothese H_0, der Alkoholgehalt sei gleich dem Sollwert $p_0 = 0{,}05$, soll anhand einer Stichprobe überprüft werden. Aufgrund der *Interessenlage* der Personen, die die Untersuchung vornehmen, sind drei Fälle zu unterscheiden: Die Überprüfung geschieht durch

a) eine Eichkommission, die an einer Abweichung vom Sollwert $p_0 = 0{,}05$ sowohl nach unten als auch nach oben interessiert ist,

b) eine Verbraucherorganisation, die daran *interessiert* ist, dass tatsächlich die 5 % Alkohol in den Flaschen sind. Sie stellt *misstrauisch* die Frage, ob der wahre Alkoholgehalt *kleiner* als der Sollwert ist,

c) eine Jugendschutzkommission, die *befürchtet*, dass zu viel Alkohol in den Flaschen ist, um die Konsumenten möglichst schnell alkoholabhängig zu machen. Sie stellt – ebenfalls *misstrauisch* – die Frage, ob der wahre Alkoholgehalt *größer* als der Sollwert ist.

Der Alkoholinhalt 5 % ist zwar keine Wahrscheinlichkeit, aber der Kontext ist authentischer als die Untersuchung von Hypothesen, die aus Gründen geforderter Aufgabenformate meist „aus dem Hut gezaubert" werden (wie etwa die berüchtigte „Reinlich & Sohn"-Aufgabe aus dem NRW-Abitur 2007, Stoyan 2011). Diesen Kontext kann man wie folgt in Testverfahren übersetzen (Bamberg 2009):

$$H_0\colon p = p_0\,,\quad H_1\colon p \neq p_0$$
$$H_0\colon p \leq p_0\,,\quad H_1\colon p > p_0$$
$$H_0\colon p \geq p_0\,,\quad H_1\colon p < p_0$$

Dabei ist aber aus der Aufgabenstellung gar nicht klar ersichtlich, mit welchem Ziel die Beteiligten ihre Untersuchungen anstellen. So könnten die Jugendschützer, die beruhigt schlafen wollen, versuchen, H_0: $p = 0{,}05$ zugunsten von H_1: $p < 0{,}05$ zu verwerfen, andere, die erfolgreich klagen wollen, H_0: $p = 0{,}05$ zugunsten von H_1: $p > 0{,}05$ zu verwerfen. Mit welcher Sorte Jugendschützer man es zu tun hat, ist einzig aus dem Signalwort *„misstrauisch"* zu erraten. Gleiches gilt für die Verbraucherschützer.

Der gesunde Menschenverstand fragt sich aber: Ist nicht der zweiseitige Test der Eichkommission unabhängig von unterstellten Interessenlagen für Verbraucher- und Jugendschützer gleichermaßen interessant? Schließlich läuft ein zweiseitiger Test auf dem 10 %-Signifikanzniveau rechnerisch auf einen einseitigen auf dem 5 %-Niveau hinaus.

Warum sollte man also vorher über die Alternativen spekulieren? Wenn der Alkoholgehalt unterhalb des zweiseitigen Prognoseintervalls liegt, werden die Verbraucherschützer klagen und die Jugendschützer beruhigt schlafen; wenn er oberhalb liegt, werden die Verbraucherschützer ruhig schlafen und die Jugendschützer klagen. Wenn der Alkoholgehalt innerhalb des 90 %-Prognoseintervalls liegt, wird man die Sache auf sich beruhen lassen – oder größere

Stichproben nutzen, bis evtl. irrelevant kleine Abweichungen signifikant werden. (Trotz der allgegenwärtigen Forderung nach Allgemeinbildung in Lehrplan-Präambeln wird der Unterschied zwischen Signifikanz und Relevanz derzeit in keinem Bundesland thematisiert).

Aus didaktischer Sicht – da sind sich im Gegensatz zu Lehrplankommissionen viele Fachleute einig – spricht vieles dafür, in der Schule auf einseitige Hypothesentests zu verzichten (Buth u. a. 2002). Sinnvoller ist die *Arbeit mit Konfidenzintervallen*, weil man (im Gegensatz zu Testverfahren) den Einfluss des Stichprobenumfangs an der Länge des Konfidenzintervalls unmittelbar ablesen kann – und weil Konfidenzintervalle die Idee des Messens und der Messungenauigkeit aus der Geometrie (Messen von Längen) in die Stochastik (Messen von Wahrscheinlichkeiten) übertragen (vgl. hierzu Henze u. a. 2020).

Konzeptvergleich

In Bezug auf die Wirklichkeit haben alle Wahrscheinlichkeitsangaben hypothetischen Charakter. Sie sind stets nur Modelle, mit denen man versucht, die Wirklichkeit zu beschreiben, die aber „nie" genau stimmen. *Zweiseitige* Tests und *Konfidenzintervalle* sind Werkzeuge, mit deren Hilfe man (vorurteilsfrei, unter Einsatz von Fingerspitzengefühl und Sachverstand) die Güte von Modellen vergleichen und bewerten kann. Sie helfen bei der Suche nach besseren Modellen.

Hinter *einseitigen* Signifikanztests steckt ein anderes Grundkonzept. Es geht nicht mehr um die Suche nach Wahrheit, sondern um das Entscheiden zwischen verschiedenen Modellen mit dem Ziel einer Optimierung des Nutzens oder der Begrenzung des Schadens.

Diesen prinzipiellen Unterschied unter dem Motto „Gewinn schlägt Wahrheit" am eigenen Leibe (im Unterricht tatsächlich mit Glücksgefühlen bei richtigen und Frusterlebnissen bei falschen Tipps) zu erleben, ist das Anliegen des Entscheidungsspiels aus der Kopiervorlage. Im Rahmen des Spiels lassen sich Bewertungen von Fehlentscheidungen gezielt variieren und die zugehörigen optimalen Entscheidungsregeln bestimmen.

Man erkennt, dass die Entscheidungsregeln mit der größten Gewinnerwartung nicht die meisten richtigen Entscheidungen garantieren. Aber sie halten die Wahrscheinlichkeit gravierender Fehler klein. Man entdeckt und erlebt beim einseitigen Test die Bedeutung von Nullhypothese und α-Fehler.

Ein Transfer der Erkenntnisse auf Realsituationen liegt nahe, und es wird deutlich, auf welche (von den meisten Anwendern herbeigewünschten) Aussagen man bedauerlicherweise verzichten muss, wenn man beim einseitigen Hypothesentest wichtige Parameter nicht kennt und – wie in einem Blindflug im Nebel – trotzdem gezwungen wird, Entscheidungen zu fällen.

Ein Entscheidungsspiel

Entscheidungsspiel

Man spielt in Tandems (**Arbeitsblatt 1**). Der erste Partner, „Hannah", wählt zufällig eine Trefferwahrscheinlichkeit A (mit $p < \frac{1}{2}$) oder B ($p > \frac{1}{2}$) und nennt die Ergebnisse einer Bernoulli-Kette fester Länge n. Der zweite Partner „Florian" muss auf A oder auf B tippen. Der gesunde Menschenverstand tippt auf A, wenn die relative Trefferhäufigkeit h unter $\frac{1}{2}$ liegt, sonst auf B. Wenn die beiden Alternativen A und B spezifiziert sind und (wegen der Zufallsauswahl) selber mit bekannter A-priori-Wahrscheinlichkeit auftreten (in der Spielsituation treten A: $p = \frac{1}{3}$ und B: $p = \frac{2}{3}$ je mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ auf, s. **Abb. 1**), ist die Situation mit der Binomialverteilung komplett berechenbar. Bei $n = 11$ beträgt die Wahrscheinlichkeit richtiger Tipps 88 %, und die Gegenwahrscheinlichkeit 12 % ist tatsächlich (im eigentlichen Wortsinn) die Irrtumswahrscheinlichkeit, also die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man sich bei der Entscheidung irrt.

Gewinnspiel

Durch Belohnung richtiger und Bestrafung falscher Entscheidungen wird aus dem Entscheidungsspiel ein Gewinnspiel, dessen Gewinnerwartung man gemäß **Arbeitsblatt 1** leicht berechnen kann. Wenn man nach einer symmetrischen Bestrafung von Fehlentscheidungen zu einer unsymmetrischen übergeht, dann hat man den Schlüssel für ein selbstständiges Entdecken und Analysieren der Grundidee einseitiger Hypothesentests. So werden in der Kopiervorlage richtige Tipps stets mit 1 P belohnt, der falsche Tipp auf B stets mit –2 P … und der falsche Tipp auf A nacheinander mit –2 P, –20 P, –40 P, –100 P … bestraft.

Der gesunde Menschenverstand legt dann nahe, im Zweifel eher auf B zu tippen als auf A. In der Sprache der Signifikanztests wächst der Annahmebereich von B:

> B wird zur Nullhypothese H_0, bei der man „konservativ" möglichst lange bleiben sollte und deren fälschliches Verwerfen man vermeiden sollte.

Dass diese Strategie aufgeht, zeigen Experimente und Simulation: Bei symmetrischer Bestrafung von Fehlentscheidungen (je –2 P) und der Strategie „Tippe auf A: $p = \frac{1}{3}$ bei $X \leq 5$ (von 11) Treffern, sonst auf B" wächst der Gewinn bei einer Folge von Spielen stetig, mit kleinen Rückschlägen. So hat man in der Simulation aus **Abb. 2** in 100 Spielen 86-mal richtig getippt, 5-mal falsch auf A, 9-mal falsch auf B und dabei $86 \cdot 1 + 5 \cdot (-2) + 9 \cdot (-2) = 58$ Punkte gewonnen. Bei $b = -20$ hätte man bei der gleichen Tippstrategie und gleichem Spielverlauf $86 \cdot 1 + 5 \cdot (-2) + 9 \cdot (-20) = -104$ Punkte verloren (**Abb. 3**).

Die vorsichtigere Strategie „Tippe auf A: $p = \frac{1}{3}$ bei $X \leq 4$ (von 11) Treffern"

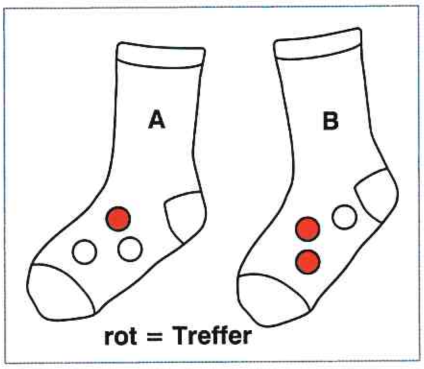


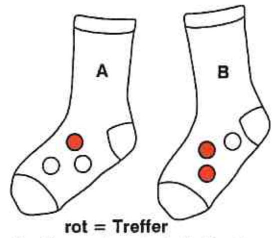
Abb. 1: Im Spiel werden die Trefferwahrscheinlichkeiten im Urnen-Modell realisiert.

Name: ______________________ Datum: ______________________

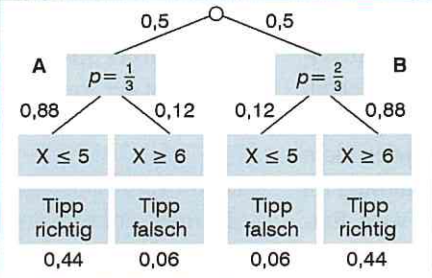
Das Risiko begrenzen – Gewinn schlägt Wahrheit

1. Entscheidungsspiel

Hannah zieht zufällig eine der Socken A oder B. Dann zieht sie daraus n = 11-mal mit Zurücklegen und nennt die Ergebnisse (rote Kugel = Treffer), zum Beispiel T N N T N N T N T T N (das heißt, 5 von 11 Ergebnissen sind Treffer).
Florian muss tippen, ob Hannah Socke A oder Socke B erwischt hat. Er muss sich also bzgl. der Trefferwahrscheinlichkeit zwischen den Hypothesen A: p = 1/3 und B: p = 2/3 entscheiden.



rot = Treffer
Trefferwahrscheinlichkeiten
A: p = 1/3 und B: p = 2/3



Regel von Bayes

Nachdem man B (wegen X ≤ 5) auf dem Signifikanzniveau α = 12 % verworfen hat, gilt A mit der Wahrscheinlichkeit 0,44 : (0,44 + 0,06) = 88 %.

für die optionale Aufgabe d)

a) Der gesunde Menschenverstand rät Florian, bei X ≤ 5 Treffern auf Socke A: p = 1/3 zu tippen und bei X ≥ 6 Treffern auf Socke B. Erproben Sie diese Strategie (wir nennen sie A5) und schätzen Sie (in %), wie häufig Florian dann richtig tippt.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Strategie A5 richtige Tipps liefert.

c) Man könnte auch bei X ≤ 4 Treffern auf A und bei X ≥ 5 Treffern auf B oder aber bei X ≤ 6 Treffern auf A und bei X ≥ 7 Treffern auf B tippen.
Zeigen Sie, dass diese Strategien (wir nennen sie A4 und A6) auf lange Sicht weniger richtige Tipps liefern.

d) Exkurs (Bayes): Da Hannah zufällig auswählt, ordnet Florian vor dem Versuch der Socke A die subjektive A-priori-Wahrscheinlichkeit 50 % zu. Berechnen Sie mithilfe der Bayes´schen Regel, auf welchen Wert Florians Wahrscheinlichkeit für A ansteigt, wenn Hannah eine Trefferzahl X ≤ 5 meldet. (Man bezeichnet diese als A-posteriori-Wahrscheinlichkeit).

2. Gewinnspiel

a) **Symmetrische Bestrafung von Fehlentscheidungen**
Aus dem Entscheidungsspiel wird ein Gewinnspiel, wenn man – zum Beispiel – bei jedem richtigen Tipp 1 P gewinnt und für jeden falschen Tipp 2 P verliert. Suchen Sie die Tippstrategie, die dann maximalen Gewinn sichert. Bestimmen Sie den maximalen Gewinn.

b) **Asymmetrische Bestrafung von Fehlentscheidungen**
Suchen Sie die Strategie, die den maximalen Gewinn (minimalen Verlust) garantiert, wenn
- wie in Aufgabenteil a) ein richtiger Tipp 1 P einbringt, aber
- ein falscher Tipp auf B (also das fälschliche Verwerfen von A) 2 P kostet (a = –2) und
- ein falscher Tipp auf A (also das fälschliche Verwerfen von B) 20 P bzw. 40 P bzw. 60 P kostet (b = –20 bzw. b = –40 bzw. b = –60).

Bestimmen Sie jeweils den maximalen Gewinn.

c) Fassen Sie die Ergebnisse tabellarisch zusammen und erläutern Sie die Bedeutung der Überschrift: „Das Risiko begrenzen – Gewinn schlägt Wahrheit".

a	b	optimale Strategie	erwarteter Gewinn	richtige Tipps	B wird fälschlich verworfen mit	A wird fälschlich verworfen mit	nach Verwerfen von B gilt a-posteriori für A
–2	–2						
–2	–20						
–2	–40						
–2	–69						

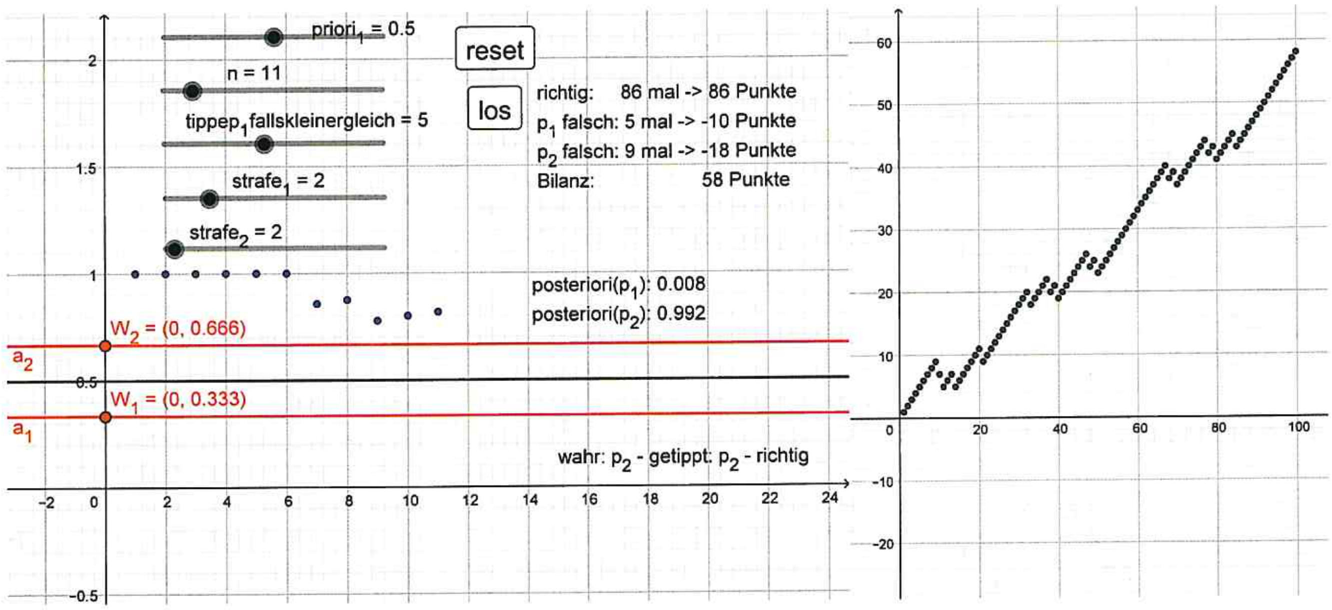


Abb. 2: Gewinnverlauf bei symmetrischer Bestrafung

tippe A bei	richtige Tipps	Gewinnerwartung bei **priori (A) = 0.5**					α	P(A)	α + P(A)
		$b = -2$	$b = -20$	$b = -40$	$b = -60$	$b = -100$			
$X \leq 2$	61.6%	−0.151	−0.163	−0.177	−0.191	−0.218	0.1%	99.4%	99.6%
$X \leq 3$	73.2%	0.196	0.116	0.028	−0.060	−0.237	0.9%	98.2%	99.0%
$X \leq 4$	83.6%	0.509	0.161	−0.225	−0.612	−0.384	3.9%	94.8%	98.7%
$X \leq 5$	87.8%	0,634	−0.465	−1.686	−2.907	−5.384	12.2%	87.8%	100.0%
$X \leq 6$	83.6%	0.509	−2.092	−4.982	−7.872	−13.652	28.9%	76.9%	105.8%

Tab. 1.: Markiert ist die optimale Gewinnerwartung bei A-priori-Gleichverteilung.

tippe A bei	richtige Tipps	Gewinnerwartung bei **priori (A) = 0.8**					α	P(A)	α + P(A)
		$b = -2$	$b = -20$	$b = -40$	$b = -60$	$b = -100$			
$X \leq 2$	38.7%	−0.839	−0.844	−0.849	−0.855	−0.866	0.1%	99.9%	100.0%
$X \leq 3$	57.6%	−0.271	−0.303	−0.338	−0.374	−0.444	0.9%	99.5%	100.4%
$X \leq 4$	76.1%	0.283	0.144	−0.010	−0.165	−0.474	3.9%	98.7%	102.5%
$X \leq 5$	87.8%	0.634	0.194	−0.294	−0.782	−1.759	12.2%	96.6%	108.8%
$X \leq 6$	91.1%	0.734	−0.306	−1.462	−2,618	−4.930	28.9%	93.0%	121.9%

Tab. 2.: Markiert ist die optimale Gewinnerwartung bei priori (A) = 0,8.

hätte bei gleichem Spielverlauf immerhin noch 81 Treffer und einen Gewinn von +25 Punkten erbracht (**Abb. 4**). Mithilfe des Baumdiagramms aus dem Arbeitsblatt und der Binomialverteilung berechnet man für verschiedene Tippstrategien die Wahrscheinlichkeiten richtiger Tipps (**Tab. 1**, Spalte 2) und die Gewinnerwartungen bei verschiedenen Bestrafungen *b* der falschen Tipps auf A – das heißt des fälschlichen Verwerfens von B – (**Tab. 1**, Spalten 3 bis 7). Die für jede der genannten Bestrafungen maximal möglichen Gewinnerwartungen sind in den Spalten 3 bis 7 farbig unterlegt. Spalte 8 zeigt, auf welchem Signifikanzniveau α man beim Tipp auf A die Hypothese H_0 verwirft. Spalte 9 zeigt die Wahrscheinlichkeit, mit der (bei vorausgesetzter A-priori-Gleichwahrscheinlichkeit beider Hypothesen) nach

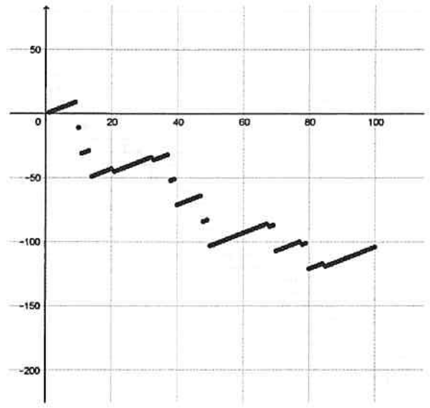


Abb. 3: Fehlentscheidungen werden bestraft

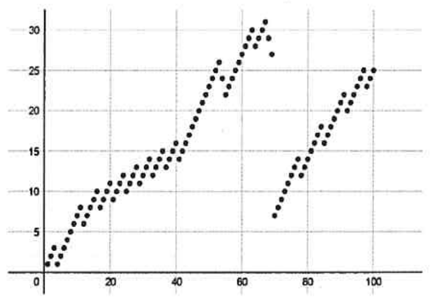


Abb. 4: Die vorsichtigere Strategie gewinnt

Verwerfen von H_0 dann H_1 gilt. Spalte 10 dokumentiert, dass A (H_1) nach dem Verwerfen von B (H_0) nicht mit der Gegenwahrscheinlichkeit des Signifikanzniveaus ($1-\alpha$) gilt.

Man erkennt: Je stärker man das fälschliche Verwerfen von B (H_0) durch $b = -2, -20, -40, -60, -100$ bestraft, desto konservativer sollte man sich bei Tipps auf A (H_1) verhalten. Bei $b = -40$ ist mit Tipps auf A im Falle $X \leq 3$ langfristig noch ein kleiner Gewinn zu erwirtschaften. Bei noch höheren Bestrafungen kann man aber auch bei noch vorsichtigeren Tippstrategien langfristig nur verlieren.

Wenn A (H_1) a-priori wahrscheinlicher wird (80 % statt 50 %, indem man in der Kopiervorlage vier Socken der Sorte A und nur eine der Sorte B zur Auswahl anbietet), braucht man beim Tipp auf A nicht mehr ganz so vorsichtig sein, um den Gewinn zu maximieren. Die Veränderungen dokumentiert **Tab. 2**.

Aus Spiel wird Ernst

Das Spiel funktioniert natürlich auch, wenn der erste Partner die Trefferwahrscheinlichkeit p für seine Bernoulli-Kette „frei Schnauze" bzw. durch einen unbekannten Zufallsgenerator festlegt (also nicht mehr nur mit $p = 0{,}5$ zwischen $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$ wählt) und der zweite Partner unter Androhung von Strafe bei falschen Entscheidungen gezwungen wird, nach Bekanntgabe der Trefferzahl X auf A: $p < 0{,}5$ oder B: $p > 0{,}5$ zu tippen.

Genau das ist die Situation, in der sich Schülerinnen und Schüler wiederfinden, wenn sie Abituraufgaben zu einseitigen Signifikanztests zu bearbeiten haben. Sie müssen aus dem Aufgabentext herausschälen, ob der Aufgabenautor das fälschliche Verwerfen von A oder das fälschliche Verwerfen von B für „schlimmer" hält und stärker „bestraft". Dabei sind

- weder Informationen über mögliche Trefferwahrscheinlichkeits-Alternativen,
- schon gar nicht über deren A-priori-Gültigkeit,
- und auch keine Informationen über die Stärke der Bestrafung von Fehlentscheidungen verfügbar.

Max, der im GK 12 die Zusammenhänge anhand des Entscheidungsspiels durchschaut hatte, konstatierte lakonisch, dass „man dann eigentlich nichts Interessierendes mehr berechnen kann", und brachte damit die Situation auf den Punkt. Noch kritischer formuliert: „Signifikanztests werden durchgeführt, wenn man fast keine Information über die vorliegende Situation hat, mit der Folge, dass man sich mit Antworten auf falsch gestellte Fragen zufriedengeben muss, aber auf die eigentlich interessierenden Fragen (nach der Wahrscheinlichkeit, mit der Hypothesen gelten) keine Antwort erhält" (Buth 2002).

Tatsächlich ist man bei einseitigen Signifikanztests gezwungen, der im Entscheidungsspiel als tragfähig entdeckten Strategie in ritualisierter Weise weiterhin zu folgen: Falls man das fälschliche Verwerfen von H_0 für „schlimm" hält, testet man auf dem 5 %-Signifikanzniveau, und falls man es für „sehr schlimm" hält, auf dem 1 %-Signifikanzniveau. Falls man dann die Hypothese verwerfen kann, weiß man aber rein gar nichts über die Wahrscheinlichkeit, mit der sie (oder eine der Alternativen) gilt. Eine Hypothese zu verwerfen bedeutet de facto nichts anderes, als dass man ein „schlechtes Gewissen" oder ein „mulmiges Bauchgefühl" haben sollte, wenn man trotzdem bei ihr bleibt, ... und lieber weitere Untersuchungen anstellen sollte, als routinemäßig auf „die Alternative" zu vertrauen.

Resüme

Das Entscheidungsspiel ermöglicht durch transparente Bewertung von Fehlentscheidungen das selbstständige (daher lernpsychologisch nachhaltige) Entdecken des Konzepts, das hinter einseitigen Signifikanztests steckt – und der unterschiedlichen Rollen, welche die Nullhypothese H_0 und deren Alternative H_1 dabei spielen.

Über die im Spielkontext naheliegende Bewertung der Gültigkeit von Hypothesen durch A-priori-Wahrscheinlichkeiten gelingt es, naheliegende und weitverbreitete Fehlvorstellungen bei der Interpretation signifikanter Testergebnisse aufzuspüren: Bei nicht spezifizierter Alternative und fehlender A-priori-Bewertung weiß man NICHTS über die Gültigkeit einer Hypothese, wenn ein Ergebnis im Ablehnungsbereich liegt. „Mathematikunterricht sollte aufklären, wie wenig ein Signifikanztest aussagt" (Mossburger 2013).

Zu dieser Aufklärung leistet das Entscheidungsspiel einen substanziellen Beitrag.

Hinweis

Die verwendeten Programme sind im Download zu diesem Heft verfügbar. Gleiches gilt für eine ausführliche Kopiervorlage, die das Entscheidungsspiel elementarer mit (händischen) Simulationen, ohne bedingte Wahrscheinlichkeiten (Regel von Bayes) und ohne Bezug zu Signifikanztests nutzt, um Risiken beim Entscheiden unter Unsicherheit schon in der Sek I erleben und erforschen zu lassen.

Literatur

Bamberg, G./Baur, F./Krapp, M. (2009): Statistik. München.

Buth, M. (2002): Anmerkungen zum Testen von Hypothesen – In: Stochastik in der Schule 2002/2, S. 27–29.

Henze, N./Hotz, T./Riemer, W./Skorsetz, B./Vehling, R. (2020): Schickt die statistische Signifikanz in den Ruhestand. – In: Der Mathematikunterricht 4/2020.

Mossburger, M. (2014): Unklare Begriffe und Wunschdenken bei Signifikanztests. – In: Stochastik in der Schule 2014/1, S. 2–8.

Stoyan, D. (2011): Statistische Tests in Gymnasiallehrbüchern. – In: Stochastik in der Schule 2011/1, S. 28–32.