

Chance und Risiko - Gewinn besiegt Wahrheit

Oft muss man sich im Leben zwischen Alternativen entscheiden. In der Stochastik ist das nicht anders. Wenn mit richtigen Entscheidungen Gewinnchancen und mit falschen Entscheidungen Verlustrisiken verbunden sind, dann kann man in die „Zwickmühle“ geraten. Denn nicht immer lässt die Regel, mit den meisten richtigen Entscheidungen auch den größten Gewinn bzw. den kleinsten Verlust erwarten. Diese Zusammenhänge werden an einem Ratespiel erforscht, das durch Gewinne und Verlust zum Gewinnspiel wird - und sich mit etwas Phantasie auf die Wirklichkeit übertragen lässt.

1 Ratespiel

Hannah wählt zufällig einen der beiden Beutel A mit $p=1/3$ oder B mit $p=2/3$ roten Kugeln (Treffer). Dann zieht sie (mit Zurücklegen und Mischen vor dem nächsten Zug) fünfmal hintereinander aus ihrem Beutel und nennt die Ergebnisse (Treffer T bzw. Niete N), z. B. TNNTT. Ihr Spielpartner muss nun tippen, ob Hannah aus Beutel A oder Beutel B zieht.

a) Max tippt wie in Fig. 2 immer nach der gleichen Strategie „gesunder Menschenverstand“. Erläutert, wie diese Tippstrategie funktioniert.
b) Bestimmt in Partnerarbeit durch 20-maliges Spielen und Ausfüllen einer Vierfeldertafel wie in Fig. 3 einen Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit, dass Max nach den 5 Zügen richtig tippt.

c) Fasst die Versuchsergebnisse der ganzen Klasse auf einem gemeinsamen Plakat zusammen. Verbessert eure Schätzung. Vergleicht eure Schätzung mit den Ergebnissen aus Fig. 4.

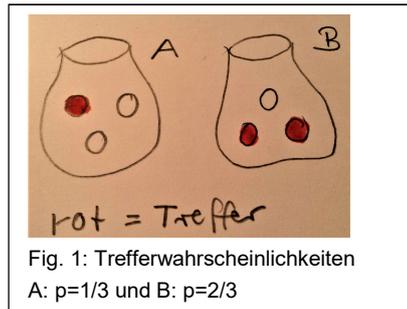


Fig. 1: Trefferwahrscheinlichkeiten
A: $p=1/3$ und B: $p=2/3$

Statt aus Beuteln zu ziehen könnt ihr auch würfeln. Bei A gelten die Augenzahlen 5, 6 als Treffer, bei B 3,4,5,6.

| Hannah sagt | Anzahl Treffer | Max tippt | Tipp Max | |
|-------------|----------------|-----------|----------|---|
| | | | A | B |
| TNNTT | 3 | B | | |
| NNTNN | 1 | A | | |
| NNTNN | 1 | A | | |
| TNTTT | 4 | B | | |
| TTTTT | 5 | B | | |
| NNNNT | 1 | A | | |
| TNTNN | 2 | A | | |

Fig. 2

Fig. 3

| | | Tipp Max | | |
|--------------|---|----------|-----|-----|
| | | A | B | |
| Hannah hatte | A | 124 | 27 | 151 |
| | B | 36 | 113 | 149 |
| | | 160 | 140 | 300 |

Fig. 4

2 Gewinnspiel

Dadurch, dass man richtige Tipps belohnt und falsche bestraft, wird das Rate- zu einem Gewinnspiel.

a) Schätzt ab, welchen Punkterfolg Max' bei Gewinnregel 1 mit seiner Strategie des gesunden Menschenverstandes durchschnittlich pro Spiel erwarten kann. Nutzt die Versuchsergebnisse aus 1c) bzw. Fig. 4.

b) Die Gewinnregel wird verschärft: Ein Fehltipp auf Beutel A wird richtig teuer. Er kostet nun 10 Punkte (Regel 2). Untersucht, ob man mit Max' Strategie des gesunden Menschenverstandes auf lange Sicht immer noch Gewinn machen kann.

c) Mara: „Est ist bei Regel 2 riskant, zu schnell auf Beutel A zu tippen. Man sollte mit solchen Tipps vorsichtig sein. Erläutert, was Mara meint. Schlagt „vorsichtigere“ Tippstrategien vor. Erprobt, ob sie gewinnversprechender als die Strategie von Max..“

Gewinnregel 1:
Für jeden richtigen Tipp gewinnst du einen Punkt, für jeden falschen Tipp verlierst du einen Punkt

Gewinnregel 2:
Für jeden richtigen Tipp gewinnst du einen Punkt, für jeden falschen Tipp auf B verlierst du wieder einen Punkt. Wenn du aber auf A tippst, obwohl Hannah Karte B hatte, also bei einem falschen Tipp auf A, verlierst du 10 Punkte.

3 Computersimulation

In der Tabellenkalkulation aus Fig. 1 wird das Gewinnspiel 1000-mal simuliert. Man kann die Punkte (-10), die man verliert, wenn man auf A tippt, obwohl B richtig ist, in Zelle I1 verändern. Ebenso in Zelle H1 die Trefferzahl, bis zu der man auf A tippt. In Fig. 1 gilt $H1 = 2$, es wird also bei ≤ 2 Treffern auf A getippt. Fig. 1 simuliert also die Strategie von Max mit Gewinnregel 2.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | |
|---|--------|-------------------------------|---|---|---|---|---------|------|--------|-----|
| 1 | Hannas | tippe auf A falls Trefferzahl | | | | | | | 2 | -10 |
| 2 | Karte | Ergebnisse | | | | | Treffer | Tipp | Punkte | |
| 3 | A | T | N | T | N | N | 2 | A | 1 | |
| 4 | B | T | T | T | T | N | 4 | B | 1 | |
| 5 | A | N | N | N | T | N | 1 | A | 1 | |
| 6 | A | N | T | T | T | N | 3 | B | -1 | |
| 7 | A | N | N | N | N | N | 0 | A | 1 | |
| 8 | B | N | N | T | N | T | 2 | A | -10 | |
| 9 | B | T | N | T | N | T | 3 | B | 1 | |

Fig. 1

- a) Prüfe, dass die Einträge in den Spalten H und I stimmen - und beantworte die Fragen in 2a, b und c auf der Grundlage einiger Simulationen. Summiere dazu die Punkte in Spalte I.
- b) Suche mithilfe der Simulation nach der besten (bzw. am wenigsten verlustreichen) Strategie für den Fall, dass die Gewinnregel 2 dadurch noch weiter verschärft wird, dass man bei jedem falschen Tipp auf A 20 Punkte verliert. Wähle dazu $I1 = -20$ und variiere die Zelle H1.

4 Theorie (Wahrscheinlichkeit)

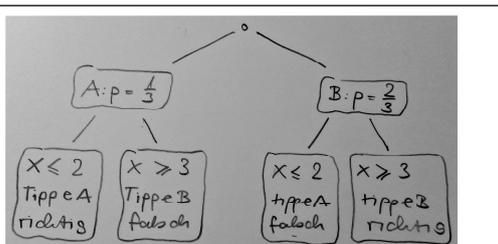
a) Fig. 2 zeigt die Wahrscheinlichkeiten, mit denen Hannah bei ihrem fünfmaligen Ziehen 0, 1, ..., 5 Treffer erhält.

| Treffer | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| A: $p=1/3$ | 13.17% | 32.92% | 32.92% | 16.46% | 4.12% | 0.41% |
| B: $p=2/3$ | 0.41% | 4.12% | 16.46% | 32.92% | 32.92% | 13.17% |

Fig. 2

Fasse die Aussagen von Fig. 2 in Worte und erläutere ohne Rechnung, warum die Angaben plausibel sind.

b*) Kontrolliere Fig. 2 mithilfe eines fünfstufigen Wahrscheinlichkeitsbaums mit 32 Ästen.



c) Max tippt bei ≤ 2 Treffern auf A. Vervollständige mit den Angaben aus Fig. 2 den Wahrscheinlichkeitsbaum aus Fig. 3a und kontrolliere, dass sich die Vierfeldertafel aus Fig. 3b ergibt.

| | | Tipp Max | |
|--------|---|----------|--------|
| | | A | B |
| Hannah | A | 39.51% | 10.49% |
| hatte | B | 10.49% | 39.51% |

- c) Begründe: Max
- tippt zu ca. 79% richtig,
 - kann bei Gewinnregel 1 durchschnittlich mit 0,580 Punkten Gewinn je Spiel,
 - Bei Gewinnregel 2 mit durchschnittlich -0,364 Punkten (Verlust) rechnen.

Fig. 3a, b Baumdiagramm und Vierfeldertafel zur Strategie: Tippe bei ≤ 2 Treffern auf A

5 Optimieren der Strategie

a) Bestimme mithilfe von Fig. 2 die Vierfeldertafel die zur vorsichtigeren Strategie „Tippe bei ≤ 1 Treffern auf A" passt. Zeige, dass bei der vorsichtigeren Strategie die Wahrscheinlichkeit für einen richtigen Tipp auf 70,78% sinkt, dass man auf diese Weise aber auch bei der Gewinnregel 2 langfristig noch Gewinn machen kann.

b) Untersuche entsprechend, wie sich die Situation ändert, wenn man bei Gewinnregel 2 statt der 10 Punkte 20 Punkte verliert und erläutere, inwiefern die Überschrift „Gewinn schlägt Wahrheit das Spiel treffend beschreibt“.

c) Sucht nach alltagsnahen Entscheidungssituationen, in denen Wahrscheinlichkeiten und Kosten von Fehlentscheidungen eine Rolle spielen - und nach Analogien zu obigem Entscheidungsspiel.

| | | Tipp Max | |
|--------|---|----------|---------|
| | | A | B |
| Hannah | A | 23.05% | 26.95% |
| hatte | B | 2.26% | 47.74% |
| | | 0.25309 | 0.74691 |

Lösung zu 5a