Der Sechskantbleistift: Spannende Mathematik im Federmäppchen

Wolfgang Riemer, Köln

Abb. 1: Im Modell liegen alle Tiefpunkte der Spitzkontur auf einem Kreis mit Radius r, alle Hochpunkte auf einem größeren Kreis mit Radius R. Die Kreismittelpunkte liegen in der Miene.

Abstract

Heinrich Winters Grunderfahrungen finden sich bundesweit in den Präambeln aller Kernlehrpläne. Den Kegelschnitten geht es schlechter, sie werden nirgends mehr erwähnt. Und dass obwohl sie nicht nur „Bewegungen im Universum" beschreiben, sondern auch ganz in der Nähe leben: Als Konturen auf den Seiten gespitzter Sechskantstifte in jedem Federmäppchen.
Ergreifen Sie die Gelegenheit, Winters Vision von bildendem Matheunterricht in einer Doppelstunde einzulösen. Anschließend sieht man seine Bleistifte mit anderen Augen (Grunderfahrung 1). Man kann sich beim Problemlösen, beim Wechseln von Perspektiven erleben (Grunderfahrung 3) und lernt beim Verknüpfen der „winzigen Konturbögen" mit den „unendlichen Asymptoten" der Hyperbelgraphen Mathematik als „geistige Schöpfung eigener Art" kennen (Grunderfahrung 2).

Die Ausführungen sind in Form zweier Arbeitsblätter abgefasst, die man im Unterricht (von Klasse 9 bis zum Abitur) direkt einsetzen kann. Sie bieten zwei unterschiedliche Zugänge, einen ebenen (Arbeitsblatt A) und einen räumlichen (Arbeitsblatt B). Arbeitsteiliges Vorgehen und ein Vergleich beider Lösungswege kann reizvoll sein.

Das „Glücksgefühl", das sich einstellt, wenn es in einer weiteren Stunde gelingt, den Bleistift und seine Spitzkontur in GeoGebras 3D-Fenster nachzubauen, sollte man Schülerinnen und Schülern nicht vorenthalten. Ästhetisch ansprechender kann eine Sicherungsphase kaum ausfallen.

Spekulieren

Das Schöne an den „Zickzack-Konturen auf gespitzten Bleistiften ist, dass sie unscharf sind, etwas zerfasert - und auf jeder der sechs Seiten ein bisschen anders aussehen. Dennoch sagt unser an Symmetrien gewöhntes Gehirn: Die müssten eigentlich auf allen Seiten gleich aussehen. Und damit fällt auch dem letzten Schüler der Unterschied zwischen der Welt der „sauberen mathematischen Modelle" und der „schmutzigen Realität" gleichsam auf die Füße [1)].
Aber welches „Modell" passt hier? Stückweise lineare „ZickZack" - Funtionen, ein Sinusgraph, eine Parabel mit Tiefpunkt auf der Mittellinie der Bleistiftseite, ein Halbkreis? Schwer zu sagen! Da muss man nachdenken!

---

[1]Wenn man die Seiten des Bleistiftes mit den Augenzahlen 1, …, 6 beschriftet und anschließend durch Rollen mit den Bleistiften „würfelt", ergibt sich ein analoges Bild: Das saubere Laplace-Modell hat mit der Realität aber meist wenig zu tun. Und genau diese Diskrepanz eröffnet bei „stochastischer Nutzung" der Bleistifte einen faszinierenden Einstieg in Grundvorstellungen beurteilender Statistik [Riemer 2018, S. 223].

Arbeitsblatt A (ebene Geometrie - anspruchsvoller)

A1 Querschnitt

Normale Sechskantstifte sehen im Querschnitt aus wie in Abb. 2.
Den Abstand zwischen den Seitenflächen bezeichnen wir mit d (kleiner Durchmesser), den Abstand zwischen den Seitenkanten mit D (großer Durchmesser). Entsprechend bezeichnet r = d/2 den kleinen und R = D/2 den großen Bleistiftradius. Begründe:

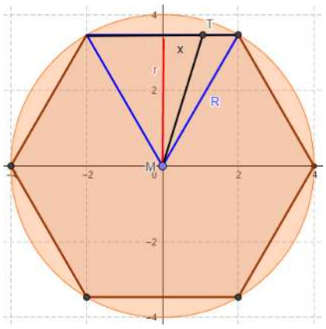


Abb. 2: Querschnitt mit Miene bei M

a. Die Bleistiftseiten sind genauso breit wie der große Bleistiftradius R.
b. Es gilt $R = \frac{2}{\sqrt{3}}\, r \ \approx 1.15\, r$
c. Miss für Deinen Bleistift d, D und kotrolliere die Aussagen 1. und 2.
(Für „normale“ Stifte ist D = 8 mm, für „dicke Buntstifte“ D = 12 mm gebräuchlich)
d. Begründe: Wenn ein Punkt T(x;r) auf einer Bleistiftseite den Abstand x von der Mittellinie der Bleistiftseite hat, dann ist sein Abstand zur Miene (M) gegeben durch
$r(x) = \sqrt{r^2 + x^2}$ mit $-\frac{R}{2} \le x \le \frac{R}{2}$ bzw. $-\frac{1}{\sqrt{3}} r \le x \le \frac{1}{\sqrt{3}} r$.
e. Kontrolliere diese Formel, indem Du prüfst, dass sie für Punkte auf der Bleistiftkante und Punkte auf der Mittellinie der Seite die richtigen Abstände liefert.

A2 Längsschnitt

Die beiden Hochpunkte der Spitzkontur (auf der Vorderseite des Bleistiftes) liegen auf den Bleistiftkanten. Sie haben den Abstand R zur Miene. Zu ihnen gehört auf dem Spitzkegel die längste Mantellinien L und die größte Kegelhöhe H.
Der Tiefpunkt der Spitzkontur liegt auf der Seitenmitte und hat den Abstand r zur Miene. Zu ihm gehört auf dem Spitzkegel die kürzeste Mantellinie l und die kleinste Kegelhöhe h.

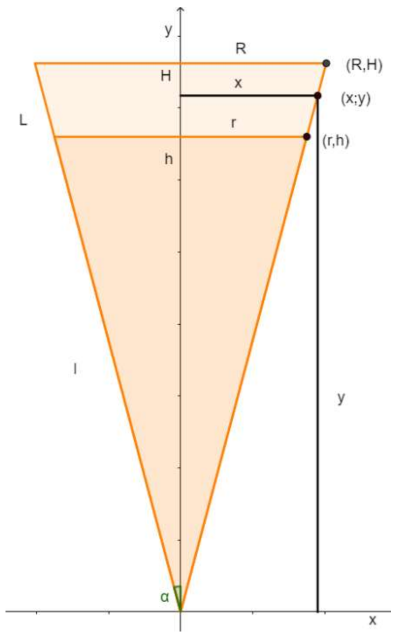


Abb. 3: Längsschnitt.
Die Miene liegt auf der y-Achse

a. Begründe: Wenn man den Winkel an der Bleistiftspitze mit 2α bezeichnet, dann gilt:
$\tan(\alpha) = \frac{r}{h} = \frac{R}{H}$, $\sin(\alpha) = \frac{r}{l} = \frac{R}{L}$, $\cos(\alpha) = \frac{h}{l} = \frac{H}{L}$.
b. Miss eine der Größen α, l, L, h, H möglichst genau. Berechne anschließend die anderen Größen mithilfe der Formeln aus a. Kontrolliere die Rechenergebnisse durch Nachmessen so genau es geht.
c. Hannah: „Die Differenz H-h der Spitzkegelhöhen muss die Amplitude der periodischen Spitzkontur sein.“ Erläutere, was Hannah meint. Überprüfe durch Nachmessen an deinem Bleistift.
d. Niklas: Da ich zu jedem Punkt (x;y) der Kontur (mit Abstand x von der Seitenmitte) den Radius r(x) kenne, kann ich mit Abb. 3 die zugehörige Höhe y über der Bleistiftspitze berechnen.

Begründe die Gleichung $\frac{y}{h} = \frac{r(x)}{r}$ und folgere $y = h \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{x}{r}\right)^2}$ mit $-\frac{R}{2} \le x \le \frac{R}{2}$.

Arbeitsblatt B (räumliche Geometrie)

Damit man die Spitz-Kontur auf der Vorderseite des Bleistiftes (Abb. 1) durch eine Gleichung der Form y=f(x) beschreiben kann, wird der Ursprung des Koordinatensystems in die Minenspitze gelegt. Die x-Achse zeigt nach rechts, die y-Achse liegt in der Miene und die z-Achse zeigt nach vorne. Die Tiefpunkte der Konturen liegen dann alle bei y=h auf einem Kreis mit Radius r.

a. Begründe: P(x,y,z) liegt genau dann auf dem Kegel, wenn gilt $x^2 + z^2 = \frac{r^2}{h^2}y^2$.
b. Begründe: P(x,y,z) liegt genau dann auf der durch die vordere Bleistiftseite festgelegten Ebene, wenn gilt z=r.
c. Die (x;y)-Koordinaten der Punkte P(x,y,r) auf der Vorderseite der Spitzkontur erfüllen daher die Gleichung die Gleichung $x^2 + r^2 = \frac{r^2}{h^2}y^2$. Folgere hieraus durch eine Termumformung die Gültigkeit der Gleichungen $\frac{y^2}{h^2} - \frac{x^2}{r^2} = 1$ und $y = h \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{x}{r}\right)^2}$.
d. Begründe: der zugehörige Funktionsgraph hat den Tiefpunkt (0;h) und die Asymptoten $y = \pm\frac{h}{r} \cdot x$.
e. Baue ein 3D Modell des Stiftes in GeoGebra nach und visualisiere die Spitzkontur mitsamt der Asymptoten.

Einen Eindruck der Lösung zur Aufgab e (Blatt B) vermittelt Abb. 4:

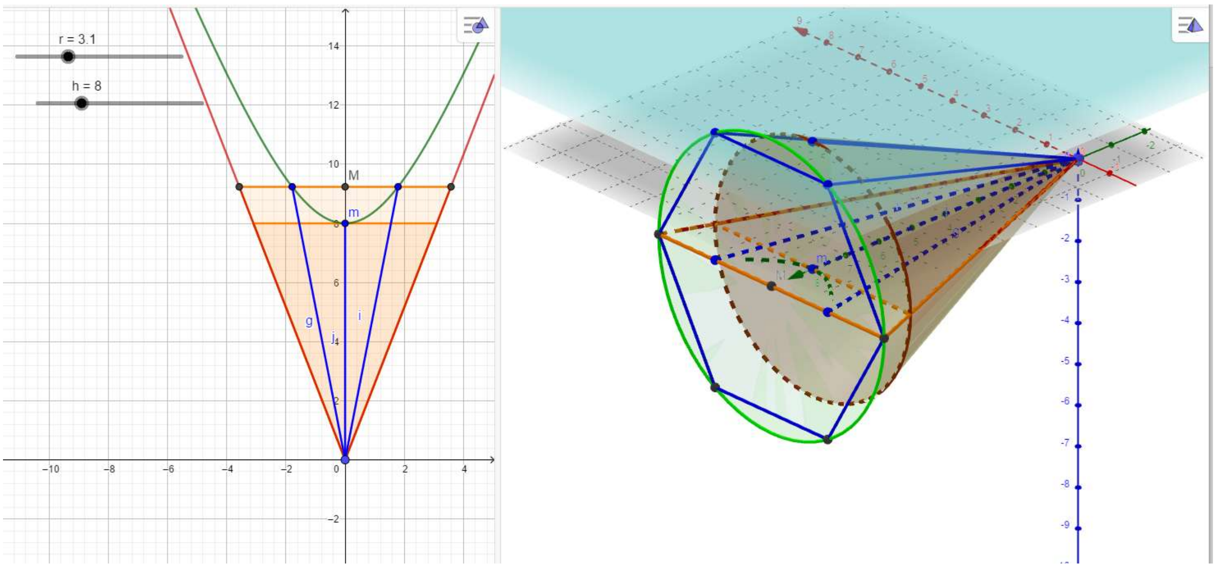


Abb. 4: 3D-Modell des Sechskantstiftes (mit GeoGebra erstellt)

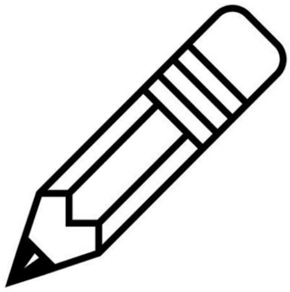
Literatur:

Wolfgang Riemer: Statistik verstehen. In G. Greefrath, Hans-Stefan Siller (Hrsg.). Digitale Werkzeuge, Simulationen und mathematisches Modellieren. Wiesbaden, Springer Spektrum 2018.

Die GeoGebra-Datei zu Abb. 4 findet man bei www.riemer-koeln.de

Dr. Wolfgang Riemer, ZfsL Köln
August-Bebel-Str. 80, 50259 Pulheim
w.riemer@arcor.de
www.riemer-koeln.de

Und wer nach Lektüre dieses Artikels im Netz nach Bleistiftgrafiken sucht, der wird manchen Anlass zum Schmunzeln finden...

… oder beginnt über Ellipsen nachzudenken. Die treten nämlich auf, wenn man Stifte mit dem Messer spitzt…

Quellen:
https://de.123rf.com/clipart-vektorgrafiken/bleistift_vektorgrafik.html?alttext=1&safe_search=off&orderby=3&sti=lpjwbshepbp1rz6hgq|&mediapopup=58841974

https://de.123rf.com/lizenzfreie-bilder/56582762.html?oriSearch=photo+56582762&sti=luh0g4l8o3i2omevjw|

https://www.smalsresearch.be/wp-content/uploads/2014/11/Pen.png