Aus ml 12, S. 39–43

Der Varianz-Abakus

von Wolfgang Riemer

Warum mißt man die Streuung einer Verteilung mit Hilfe der mittleren quadratischen Abweichung (Varianz), die große Abweichungen vom Mittelwert viel stärker gewichtet als kleine?

Daß sich die Varianz theoretisch viel besser bewährt als die mittlere lineare (absolute) Abweichung, kann man Schülern bei der Einführung des Begriffs nicht klarmachen, da sie die Theorie noch nicht kennen. Infolgedessen erscheint die Begriffsbildung willkürlich; sie leuchtet nicht ein.

Der Varianz-Abakus ist ein Spiel, mit dem man die Varianz als Streumaß anschaulich motivieren kann. Insbesondere erklärt er die in der Varianzformel auftretenden Quadrate. Darüber hinaus macht er die Additivität der Varianz, die der Grund für ihre theoretische Bedeutung ist, unmittelbar verständlich. Aus dieser folgt dann leicht die Formel $V = npq$ für die Varianz der Binomialverteilung, deren Kenntnis für die Behandlung einfacher Probleme der beurteilenden Statistik wichtig ist, die aber auf elementarem Wege sonst nur schwer hergeleitet werden kann.

Die entwickelnde Begründung des Abakus in den Abschnitten 2–4 ist für einen Unterricht gedacht, in dem der Begriff der Varianz erarbeitet werden soll.

Abschnitt 1 zeigt umgekehrt, wie man den Abakus nutzen kann, wenn der Begriff der Varianz schon bekannt ist. Im Unterricht kann man also – alternativ – zwei Wege beschreiben, je nachdem, welche Intentionen man verfolgt.

1 Eine Aufgabe – die Idee des Abakus

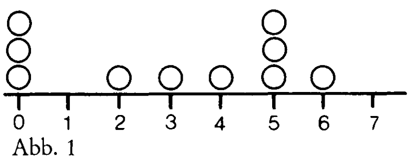


Abb. 1

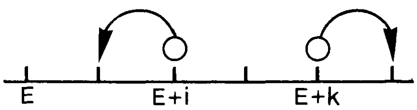
Ein Chip ◯ repräsentiert die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{10}$.

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung aus Abb. 1 hat den Erwartungswert $E = \Sigma p_i \cdot x_i = 3$ und die Varianz $V = \Sigma p_i \cdot (x_i - E)^2 = 5$.

Aufgabe: Man ändere die Verteilung ab, ohne Erwartungswert und Varianz zu beeinflussen!

Lösung: Während Umgruppierungen, die den Erwartungswert nicht verändern, leicht zu finden sind (vgl. [5]), machen Umgruppierungen, die zugleich auch die Varianz nicht beeinflussen, Schwierigkeiten. Die Darstellung der Verteilung durch Chips legt einen operativen Ansatz nahe: Bewegen wir zwei beliebige Chips um je eine Einheit auseinander, so bleibt der Erwartungswert unverändert. Um welchen Betrag sich die Varianz verändert, sagt Abb. 2:

Abb. 2



Beitrag der Chips zur Varianz

vorher: $\frac{1}{10}(i^2 + k^2)$

nachher: $\frac{1}{10}\left((i-1)^2 + (k+1)^2\right)$

$= \frac{1}{10}(i^2+k^2) + \frac{2}{10}(k-i) + \frac{2}{10}$

Zunahme der Varianz: $\frac{2}{10}(k-i) + \frac{2}{10}$

Die Änderung der Varianz ist von der Differenz k–i der Stellen k, i abhängig, auf denen die bewegten Chips lagen. Wenn wir aber zwei Chips von der gleichen Stelle auseinanderbewegen (i=k), dann nimmt die Varianz unabhängig von der Lage (i) um den Betrag $\frac{2}{10}$ zu. Diese Zunahme läßt sich durch einen Sprung in umgekehrter Richtung (mit einem anderen Chip-Paar, in Abb. 3 schwarz markiert) kompensieren. Daher haben alle Verteilungen aus Abb. 3 gleichen Erwartungswert und gleiche Varianz.

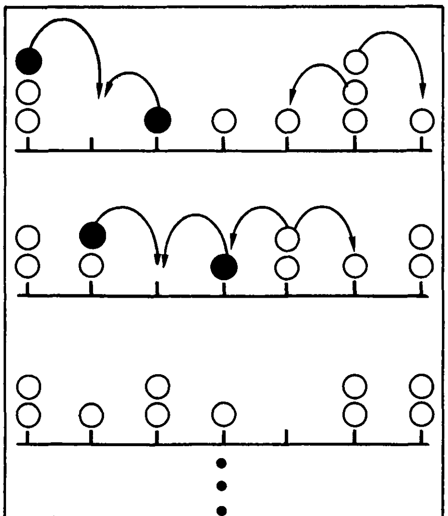


Abb. 3

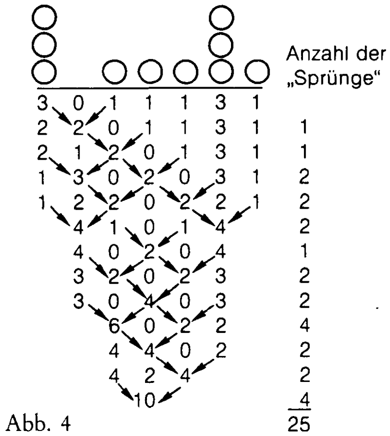
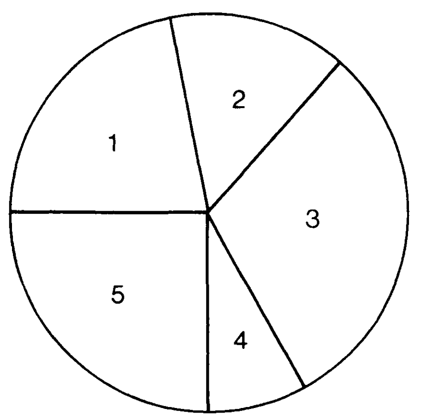


Abb. 4

Wie man die Beobachtung darüber hinaus nutzen kann, um die Varianz einer beliebigen (rationalen) Verteilung nur durch Zählen von Sprüngen zu bestimmen, zeigt Abb. 4. Am Ende liegen alle Chips auf der Stelle des Erwartungswertes, der auf diese Weise durch den Abakus mitgeliefert wird. Dazu brauchte man 25 Sprünge, von denen jeder die Varianz um $\frac{2}{10}$ reduzierte. Die Varianz beträgt jetzt 0; sie betrug anfangs also 5.

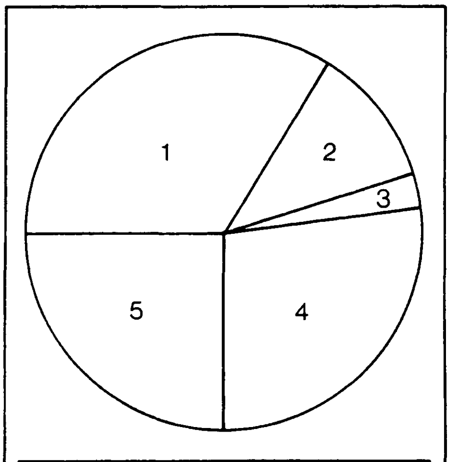
2 Streuung und Streuungsmaß – die erweiterten Galtonbretter

Ein Maß für die Streuung von Verteilungen sei noch nicht bekannt. Wir wollen (anders als in 1.) die Varianz einführen. Betrachten wir zwei Verteilungen, die zu folgenden Glücksrädern gehören:



n	1	2	3	4	5
p	$\frac{8}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{11}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{9}{36}$

Abb. 4a



n	1	2	3	4	5
p	$\frac{12}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{9}{36}$

Abb. 4b

Beide Verteilungen haben den gleichen Erwartungswert 3; aber die beiden Stabdiagramme zeigen, daß sie sich wesentlich unterscheiden. Die Ergebnisse streuen verschieden stark um den Erwartungswert.

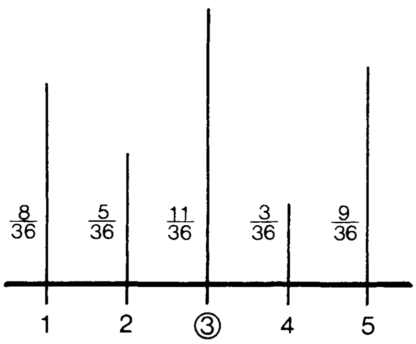


Abb. 5a

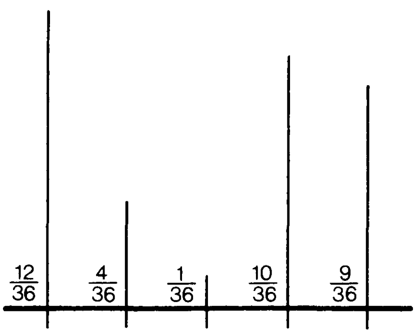
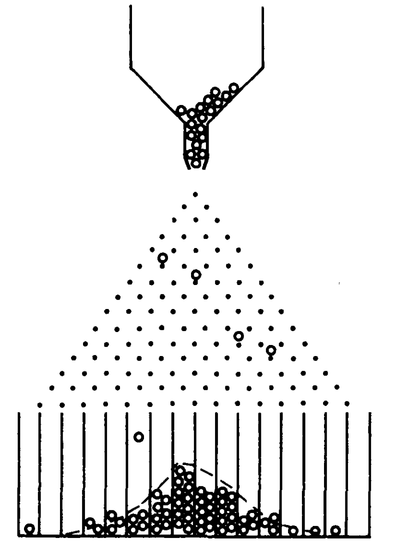


Abb. 5b

Wie kann man die Streuung messen? Wir erinnern uns an das Galtonbrett (Abb. 6). Bei ihm kann man die Streuung der durchfallenden Kugeln unmittelbar verfolgen. Beim Auftreffen auf die Stifte spritzen sie auseinander, wobei jedoch der Erwartungswert stets in der Mitte bleibt, da gleich viele Kugeln nach links und rechts abgelenkt werden.

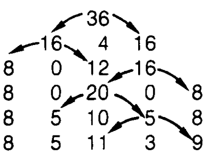
Wir stellen uns ein modifiziertes Galtonbrett (im folgenden mit GB abgekürzt) vor, das durch einen sinnreichen Mechanismus dafür sorgt, daß an bestimmten Streustellen eine vorgegebene Anzahl von Kugeln symmetrisch nach links und rechts abgelenkt wird, wobei von Stufe zu Stufe auch Kugeln „liegen bleiben“, d. h. unabgelenkt herabfallen dürfen.

Abb. 6



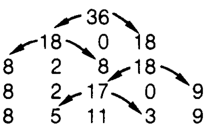
Je nachdem, wie der Mechanismus eingestellt ist, lassen sich mit einem solchen GB verschiedene Verteilungen realisieren, z. B. auch die zum ersten Glücksrad gehörige. Der folgende Ablaufplan zeigt, wie die Kugeln verteilt werden:

Abb. 7



Dasselbe Ergebnis erreichen wir aber auch mit dem folgenden GB:

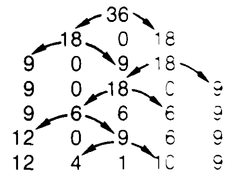
Abb. 8



Wir untersuchen nun die beiden Gedankenexperimente unter dem Gesichtspunkt der Streuung. Betrachtet man das Aufspalten eines Kugelpaares als „elementaren Streuakt“, so finden wir, daß beim ersten Ablauf insgesamt 16+8+8+5+1, also 38 solcher Streuakte stattgefunden haben. Beim zweiten Ablauf ergibt sich analog 18+8+9+3 als Streu(akt)zahl, und überrascht stellen wir fest, daß sie dieselbe ist. Das ist kein Zufall; man kann beweisen, daß die Anzahl der benötigten Streuakte nur von der endgültigen Verteilung, nicht aber von ihrer Realisierung durch einen GB-Mechanismus abhängt.[1] Da es hier nur um die Motivation geht, genügt es, wenn die Schüler sich handelnd davon überzeugen, indem sie weitere GB herstellen, die die gleiche Verteilung bewirken.

Daß die Gesamtzahl der elementaren Streuakte ein Maß für die „Verstreutheit“ der Verteilung ist, wird dadurch erhärtet, daß Verteilungen mit deutlich unterschiedlicher „Streuung“ auch voneinander verschiedene Streuaktzahlen haben, wobei die größere Streuaktzahl stets zu der Verteilung mit der größeren Streuung gehört. So liefert das folgende GB

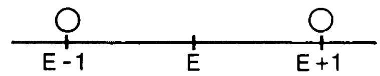
Abb. 9



die Streuaktzahl 18+9+9+6+3+4 = 49 als Maß für die Streuung der beim zweiten Glücksrad auftretenden Verteilung.

Andrerseits ist die Streu(akt)zahl noch nicht geeignet, zwei verschiedene Verteilungen zu vergleichen, wenn die Anzahl der Kugelpaare, die man durch das GB fallen läßt, verschieden ist. Hätten wir z. B. 72 statt 36 Kugeln genommen, um die obigen Verteilungen zu realisieren, so hätten wir offenbar auch die doppelte Streu(akt)zahl erhalten. Auf Grund der hier vorliegenden Proportionalität ist es sinnvoll, den Quotienten aus Streu(akt)zahl z und Zahl der Kugelpaare $\frac{N}{2}$ (N sei die Anzahl der Kugeln) als normiertes Streumaß einzuführen. Diese Normierung bedeutet, daß die Verteilung aus Abb. 10,

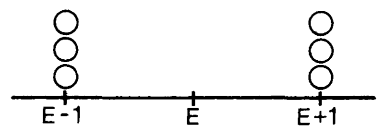
Abb. 10



z = 1 Streuakt, N = 2 Kugeln

Streumaß $z : \frac{N}{2} = 1$

Abb. 11



gleiche Verteilung durch mehr Kugeln dargestellt

z = 3 Streuakte, N = 6 Kugeln

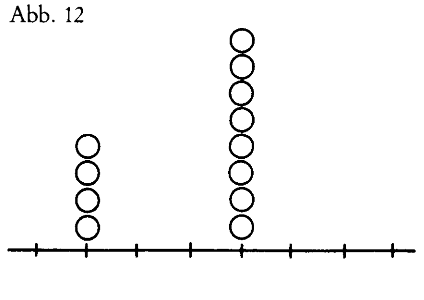
Streumaß $z : \frac{N}{2} = 1$

die durch einen einzigen Streuakt entsteht, das Streumaß 1 erhält. Dementsprechend beträgt das Streumaß der Verteilungen, die zu den beiden Glücksrädern aus Abb. 5 gehören, $\frac{38}{18}$ bzw. $\frac{49}{18}$.

3 Der Abakus

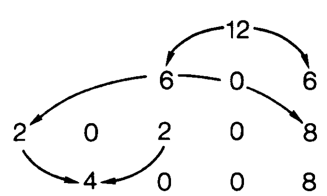
Nicht jede Verteilung läßt sich durch die oben beschriebenen elementaren Streuakte erzeugen:

Abb. 12



Das ändert sich, wenn man den Kugeln auch weitere Sprünge erlaubt und außerdem zuläßt, daß sich zwei Kugeln wieder zu einem Paar vereinigen (und damit die Streu(akt)zahl vermindern). So erhält man die obige Verteilung mittels des folgenden GB:

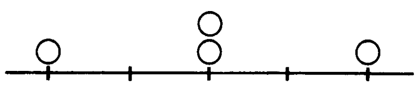
Abb. 13



Hierbei ist aber noch nicht klar, wie man die Streuung um zwei, drei, vier usw. Einheiten im Vergleich zu der Streuung um eine Einheit, die durch einen elementaren Streuakt bewirkt wird, bewerten soll. Zu dem Zweck untersuchen wir zunächst den „Zweiersprung" und fragen, wie wir ihn mittels elementarer Streuakte („Einersprünge") herstellen können.

Um die Verteilung

Abb. 14



aufzubauen, braucht man entweder einen Zweiersprung (Abb. 15) oder vier Einersprünge (Abb. 16).

Abb. 15

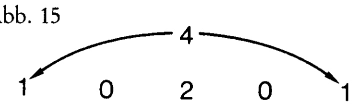
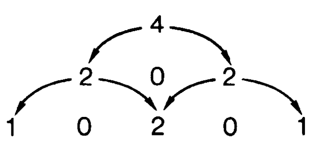


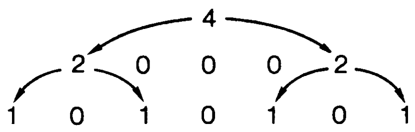
Abb. 16



Der Zweiersprung eines Kugelpaares entspricht daher 4 Einersprüngen, d. h. bei gleicher Kugelzahl vervierfacht sich die Streu(akt)-zahl, wenn die Sprungweite verdoppelt wird.

Durch eine analoge Bilanz erhalten wir das Äquivalent für einen Dreiersprung, indem zunächst zwei Kugelpaare um zwei Einheiten gestreut werden und dann diese beiden noch einmal um je eine Einheit:

Abb. 1



Das entspricht einer Streu(akt)zahl von $2{\cdot}4+2{\cdot}1 = 10$. Andrerseits entsteht dieselbe Verteilung, wenn ein Kugelpaar um eine Einheit und eines um drei Einheiten gestreut wird. Die Streuung um drei Einheiten ist also mit $10-1 = 9$ elementaren Streuakten gleichwertig.

Bezeichnen wir das Streuzahläquivalent mit a_k, wenn ein Kugelpaar um k Einheiten gestreut wird, so ist $a_1 = 1$, $a_2 = 4$ und $a_3 = 9$. Daher vermuten wir, daß allgemein $a_k = k^2$ sein wird. Dies ist durch den folgenden Induktionsschritt leicht zu bestätigen:

Abb. 18

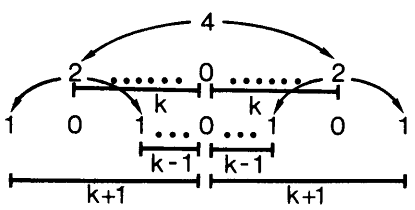


Abb. 18 entnimmt man

$$2a_k + 2 = a_{k+1} + a_{k-1},$$

also

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 2a_k - a_{k-1} + 2 \\ &= 2k^2 - (k-1)^2 + 2 \\ &= k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2. \end{aligned}$$

Wir vereinfachen das Verfahren zur Bestimmung des Streuungsmaßes einer Verteilung dadurch, daß wir das bisherige Verfahren einfach umkehren (wie schon in Abb. 4 angedeutet). Wir gehen von der gegebenen Verteilung aus und rekombinieren die Kugelpaare durch symmetrische Sprünge beliebiger Weite. Daß dieser Abakus schön mit Chips gespielt werden kann, die zu Türmen gemäß der Verteilung auf der Zahlengeraden aufgestapelt sind, zeigt folgendes Beispiel ($N = 16$):

Beim ersten Schritt nimmt die Streu(akt)-zahl um 4 zu (vier Einersprünge), danach durch einen Dreiersprung um 9 ab. Im dritten Schritt nimmt sie durch zwei Einersprünge um 2 zu; der letzte Schritt, durch den die Konzentration aller Chips im Erwartungswert erreicht wird (drei Zweiersprünge), reduziert die Streu(akt)zahl erneut um 12.

Zur Ausgangsverteilung gehört daher die Streu(akt)zahl $z = -4+9-2+12 = 15$. Ihr Streumaß ist daher $z : \frac{N}{2} = \frac{15}{8}$.

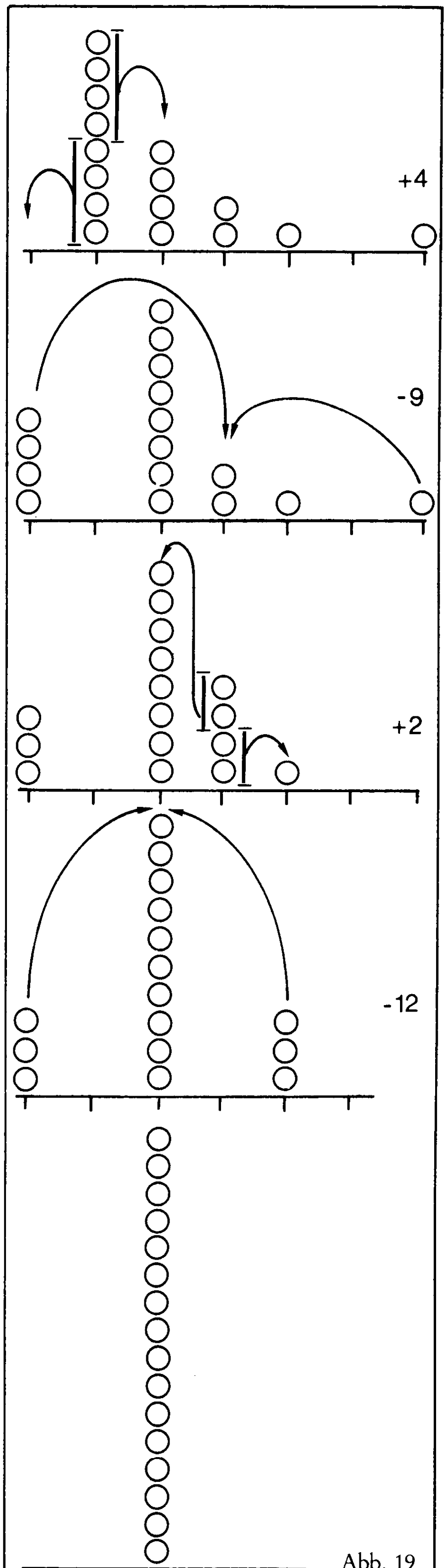


Abb. 19

Daß der Abakus tatsächlich stets aufgeht, ergibt sich aus der folgenden Strategie (der Erwartungswert sei zunächst ganzzahlig):

Wenn mehr als zwei Türme da sind, haben mindestens zwei von ihnen einen geradzahligen Abstand, so daß der Mittelpunkt ihrer Positionen eine ganze Zahl ist. Auf diesen vereinigt man die maximal mögliche Anzahl von Chips durch einen symmetrischen Sprung. Hat man mehrere Möglichkeiten, so nimmt man stets die Türme, die am weitesten voneinander entfernt sind. Auf diese Weise kann man ihre Höhe und schließlich auch ihre Anzahl systematisch abbauen, wobei sich die restlichen Türme immer mehr zum Mittelwert hin konzentrieren. Wenn nur einer übrigbleibt, sind wir fertig. Bleiben aber zwei übrig, so muß ihr Abstand ungerade sein. Andernfalls könnte man sie in der Mitte vereinigen. (In diesem Falle müssen nämlich die beiden Türme gleich hoch sein, weil sonst der Erwartungswert keine ganze Zahl wäre.)

Wir betrachten nun diesen Fall gesondert:

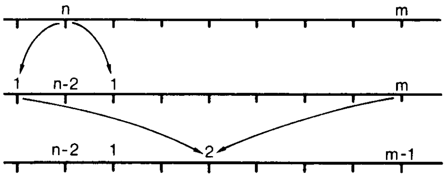


Abb. 20

Einer von beiden Türmen muß mindestens aus zwei Chips bestehen, weil der Erwartungswert ganzzahlig ist, und ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, daß dies der linke ist. Von diesem lassen sich infolgedessen zwei Chips abspalten und der äußerste linke von beiden zusammen mit einem Chip des äußersten rechten Turmes in der Mitte vereinigen. Sind jetzt mehr als zwei Türme übrig, dann verfährt man nach der Grundstrategie so lange, bis wieder nur höchstens zwei übriggeblieben sind. Im Vergleich zu der ursprünglichen Situation muß sich der Abstand jetzt aber verkleinert haben, da die inneren Türme auf Grund der Strategie nicht alle verschwinden können. Infolgedessen muß in endlich vielen Schritten der Zustand erreicht sein, daß alle Chips in einem Turm vereinigt sind; denn zwei unmittelbar nebeneinanderstehende Türme sind wegen des ganzzahligen Erwartungswertes unmöglich.

Wir demonstrieren dieses Vorgehen an einem Beispiel und berechnen auch das zugehörige Streumaß.

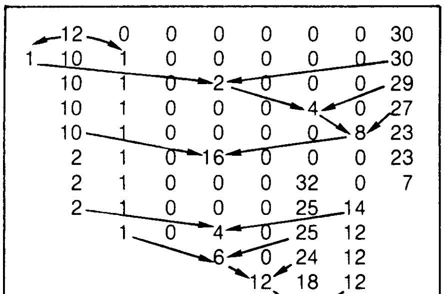


Abb. 21

Beim ersten Schritt nimmt die Streu(akt)zahl um 1 zu, bei den übrigen um

$1{\cdot}4^2+2{\cdot}2^2+4{\cdot}1^2+8{\cdot}3^2+16{\cdot}2^2+7{\cdot}1^2+2{\cdot}3^2+1{\cdot}2^2+6{\cdot}1^2+12{\cdot}1^2 = 211$

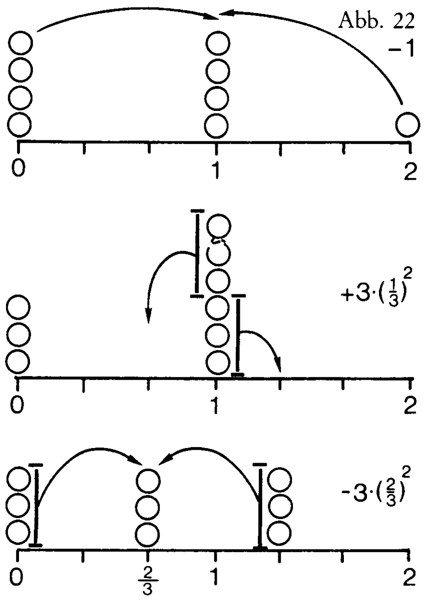
ab, bis sie den Wert 0 erreicht hat. Folglich beträgt das Streumaß

$$\frac{210}{21} = 10.$$

Der Abakus kann leicht auf den Fall rationaler Erwartungswerte ausgedehnt werden, man braucht nur die Einheit von 1 auf $\frac{1}{N}$ zu verfeinern (denn eine durch N Chips dargestellte Verteilung hat einen Erwartungswert von der Form $\frac{k}{N}$).

Weil man den Erwartungswert vorher selten kennt (insbesondere keine Informationen über dessen Ganzzahligkeit hat), spielt man in der Praxis solange wie möglich über ganzzahligen Stellen. Ist der Erwartungswert nicht ganzzahlig, erhält man dabei zwei nebeneinanderliegende Türme. Erst danach verfeinert man die Einheit (vgl. auch [4]).

Wir berechnen als Beispiel die Varianz der Binomialverteilung $B(2; \frac{1}{3})$:



Der Erwartungswert ergibt sich zu $\frac{2}{3}$;

für die Streu(akt)zahl erhält man

$z = 1 - 3 \cdot \frac{1}{9} + 3 \cdot \frac{4}{9} = 2.$

Das Streumaß ist $2 : \frac{9}{2} = \frac{4}{9}$

$(= 2 \cdot p \cdot (1-p)$ mit $p = \frac{1}{3})$.

4 Die Varianz einer Verteilung

Durch den Abakus werden alle Chips mittels symmetrischer Sprünge auf den Erwartungswert der Verteilung konzentriert. Denselben Effekt erzielt man, wenn man jeden Chip einzeln sofort auf diese Stelle springen läßt. Da ein symmetrischer Sprung der Weite k den Beitrag $k^2 : \frac{N}{2} = 2 \cdot \frac{k^2}{N}$ zum Streumaß liefert, sollte ein einzelner Sprung nur mit $\frac{k^2}{N}$ in das Streumaß eingehen. In der Tat liefert dieser Ansatz in allen unseren Beispielen dasselbe Ergebnis, und die Rechnung zu Abb. 21

$$12 \cdot \frac{25}{42} + 30 \cdot \frac{4}{42} = \frac{420}{42} = 10$$

zeigt, wieviel schneller man zum Ziel kommt. Deshalb übertragen wir diese Methode auf beliebige endliche Verteilungen:

Die Zahlen x_i (i=1, . . ., n) seien mögliche Ergebnisse eines Zufallsversuchs, die mit den Wahrscheinlichkeiten p_i (= $\frac{n_i}{N}$) eintreten. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung wird dann durch n_i Chips auf der Stelle x_i (i=1, . . ., n) repräsentiert. Jeder der n_i Chips auf der Stelle x_i hat vom Erwartungswert E den Abstand $|x_i-E|$; diese Chips tragen infolgedessen zum Streumaß den Betrag $n_i \cdot \frac{1}{N} \cdot (x_i-E)^2 = p_i(x_i-E)^2$ bei. Summiert man diese Beiträge für alle i, so erhält man mit der Größe

$$p_1(x_1-E)^2 + p_2(x_2-E)^2 + \ldots + p_n(x_n-E)^2$$

eine nur von der Verteilung abhängige Zahl, die nach den vorstehenden Überlegungen ein Maß für die Streuung ist. Sie heißt Varianz der Verteilung oder auch die mittlere quadratische Abweichung und wird meist mit V bezeichnet.

Der Abakus ist aber nicht nur zur Motivation dieser wichtigen Kenngröße von Verteilungen nützlich, sondern verhilft auch zu einem besseren Verständnis ihrer entscheidenden Eigenschaft, der Additivität. Damit ist folgendes gemeint: Wenn man N Chips nach einem Wahrscheinlichkeits„schlüssel“ $p_1, p_2, \ldots, p_n$ auf die Positionen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ verteilt, und jeden der Np_i Chips nach einem neuen, aber stets gleichbleibenden Schlüssel $q_1, \ldots, q_m$ erneut verteilt, so ist die Varianz der resultierenden Verteilung[2)] die Summe der Varianzen der beiden gegebenen Verteilungen p und q.

Um dies einzusehen, stellen wir uns vor, daß die Verteilungen mittels symmetrischer k-Sprünge realisiert werden. Führen wir diese, wie oben beschrieben, auf die äquivalente Anzahl elementarer Streuakte, also Einersprünge, zurück, so können wir mittels der Formel $z = \frac{1}{2}NV$ berechnen, wieviele wir davon benötigen. Im Falle der ersten Verteilung p mit der Varianz V_1 (N Chips) beträgt diese Zahl $z_1 = \frac{1}{2}NV_1$. Analog brauchen wir zur anschließenden Verteilung eines Chipturmes mit Np_i Chips $\frac{1}{2}Np_iV_2$ Einersprünge und für alle n Chip-Türme zusammen infolgedessen

$$\frac{1}{2}Np_1V_2 + \frac{1}{2}Np_2V_2 + \ldots + \frac{1}{2}Np_nV_2$$
$$= \frac{1}{2}NV_2(p_1 + p_2 + \ldots + p_n) = \frac{1}{2}NV_2.$$

Die resultierende Verteilung läßt sich daher mit

$$\frac{1}{2}NV_1 + \frac{1}{2}NV_2 = \frac{1}{2}N(V_1 + V_2)$$

Einersprüngen herstellen, und für die Gesamtvarianz V folgt nach derselben Formel

$$V = V_1 + V_2.$$

Anwendung: Die Binomialverteilung ist eine Verteilung, bei der auf jeder Stufe dieselbe Verteilung wiederholt wird. Deren Varianz beträgt

$$\begin{aligned} V &= p(1-E)^2 + q(0-E)^2 \\ &= p(1-p)^2 + q(0-p)^2 \\ &= pq^2 + qp^2 = pq(q+p) = pq. \end{aligned}$$

Folglich ist die Varianz einer n-stufigen Binomialverteilung n mal so groß, also gleich npq.

Man kann den Abakus auch einsetzen, um die Varianz des Mittelwertes von Zufallsgrößen zu berechnen und die Ungleichung von Tschebyscheff herzuleiten. Der interessierte Leser sei auf [4] verwiesen. In [1] wird der Varianz-Abakus zum Beweis einer interessanten Beziehung zwischen Mittelwert, Median und Varianz benutzt. Auch Markoffketten lassen sich auf elegante Weise mit Chips berechnen; dazu sei auf [2] und [3] verwiesen.

Literatur

[1] Bentz, H. und Borovcnik, M.: Mittelwert, Median und Streuung. Universität Klagenfurt, 1985.
[2] Engel, A.: The probabilistic abacus. Educational Studies in Mathematics 6 (1976): 1–22.
[3] Engel, A.: Why does the probabilistic abacus work? Educational Studies in Mathematics 7 (1976): 59–69.
[4] Riemer, W.: Neue Ideen zur Stochastik. Bibliographisches Institut Mannheim, 1985.
[5] Spiegel, H.: Der Mittelwertabakus. Mathematik lehren (1985), H. 8: 16–18.

Herrn Professor W. Kroll und Herrn Dr. L. Führer danke ich für wertvolle Hinweise beim Verfassen dieses Artikels.

Anmerkungen

1) So entnimmt man dem GB aus Abb. 8 die Vektorgleichung

$$\begin{pmatrix}8\\5\\11\\3\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\36\\0\\0\end{pmatrix}+16\begin{pmatrix}0\\1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+8\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+8\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-2\\1\end{pmatrix}+5\begin{pmatrix}0\\1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

$$\vec{z} = \vec{a} + 16\,\vec{e}_2 + 8\,\vec{e}_1 + 8\,\vec{e}_3 + 5\,\vec{e}_2 + 1\,\vec{e}_3$$
$$= \vec{a} + 8\,\vec{e}_1 + 21\,\vec{e}_2 + 9\,\vec{e}_3.$$

Dabei ist $\vec{z}$ der Vektor der „Zielverteilung", $\vec{a}$ ist der Vektor der „Anfangsverteilung" im GB. Die Vektoren $\vec{e}_i$ sind in naheliegender Weise den elementaren Streuakten der i-ten Spalte des GB zugeordnet. Die Koeffizientensumme (8+21+9 = 38) der $\vec{e}_2$ ist die Anzahl der benötigten elementaren Streuakte. Daß man für jede andere Einstellung des GB dieselben Koeffizienten, also auch die gleiche Streu(akt)zahl erhält, folgt aus der linearen Unabhängigkeit der Vektoren $\vec{e}_2$.
Ein anderer Beweis, der allerdings den Begriff der Varianz schon benutzt, ergibt sich aus der in 1. gemachten Beobachtung, daß jeder elementare Streuakt die Varianz um $\frac{2}{35}$ erhöht. Da die Varianz der „Zielverteilung" feststeht, müssen bei allen Einstellungen des GB gleich viele Streuakte erfolgen. (Vgl. auch [4].)

2) Man spricht von der Faltung ($p * q$) der Verteilungen p und q. Hat die Zufallsgröße X die Verteilung p und Y die Verteilung q, so hat die Summe X+Y die Verteilung $p * q$.