

GPS als Messgerät im Mathematikunterricht - Die Gaußsche Schuhbandformel

Kurzfassung eines GPS-Workshops auf der Tagung „Mathematik für alle“ - IEEM Uni Dortmund, 25.09.2010

1 Abstract

GPS-Trekking-Geräte zeichnen nicht nur Fahrspuren auf, sie können auch umfahrene Flächen berechnen (also „integrieren“). So liefert ein „Garmin Oregon“ für die Sportplatzrunde aus Abbildung 1 den Flächeninhalt 9301.7m² (Abb. 2). Wie machen die Navigationsgeräte das? Wie kann man aus den aufgezeichneten Fahrspuren die umfahrenden Flächen berechnen, wenn das eigene Navi keine Flächenberechnungsoption anbietet?

C. F. Gauß (1777-1855), einer der genialsten Mathematiker aller Zeiten, der nicht nur als Professor in Göttingen sondern auch als Landvermesser im heutigen Niedersachsen tätig war, hat dafür die „Schuhbandformel“ entwickelt, die man schon in Klasse 8 begründen kann, und die in Klasse 12 beim Vektorprodukt „abfällt“. Wer sich nur für die Schuhbandformel interessiert, beschränkt sich auf Abschnitt 2. Wer sich für ihren Einsatz bei der Flächenberechnung mit GPS und die technischen Details interessiert, der lese weiter... Wer „Feuer gefangen hat“, findet im Anhang ein „ready to use“ Aufgabenblatt an dem deutlich wird, wie man z. B. lineare Bewegungsprobleme mit GPS in einen authentischen Modellierungs-Kontext stellen kann. Wem das nicht genügt, der kann mit Google-Earth den Track einer Kölner Straßenbahn oder eines Porsche auf dem Nürburgring animieren. Die Analyse der Bewegungsgraphen führt dann direkt in Fragestellungen der Analysis. Die Tracks finden Sie im Download zu diesem Artikel und wie man ihnen in Google Earth „Leben einhaucht“, steht im Abschnitt 4.5.

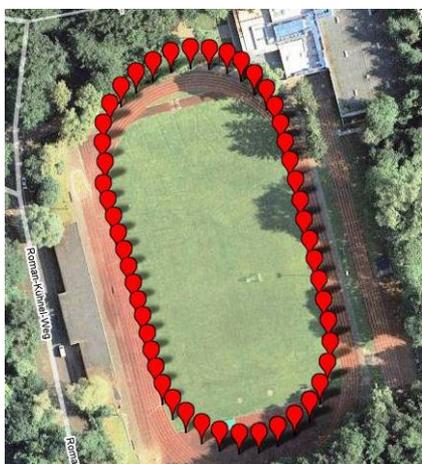


Abb. 1 Radelrunde auf dem KJölnner ASV-Sportplatz mit Google-Pins (vgl. 4.3)



Abb. 2

Weil das Multiplizieren ohne Computer viel aufwändiger war als das Subtrahieren, hat Gauß bei seinen Landvermessungen in Abb. 4 zusätzlich zur ersten auch die zweite Zeile (als Zeile 8) angehängt und statt (1) die Formel (2) benutzt. Man deckt eine Zeile zu, subtrahiert den darüber vom darunter stehenden x-Wert und multipliziert das Ergebnis mit dem zugeordneten y-Wert.

2 Die Schuhbandformel

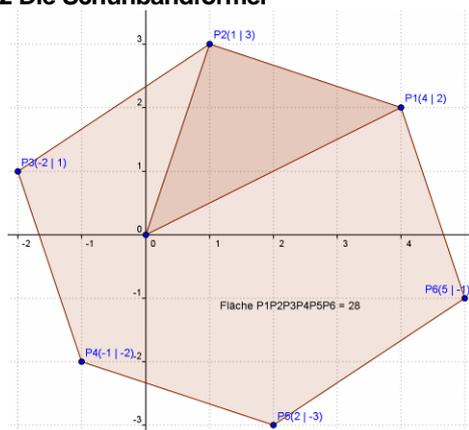


Abb. 3: Sechseck mit GeoGebra integriert

i	x _i	y _i	x _i ·y _{i+1} - y _i ·x _{i+1}
1	4	2	
2	1	3	10
3	-2	1	7
4	-1	-2	5
5	2	-3	7
6	5	-1	13
7	4	2	14
		Σ/2	28

$$(1) A = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 (x_i \cdot y_{i+1} - y_i \cdot x_{i+1})$$

$$(2) A = \frac{1}{2} \sum_{i=2}^7 (x_{i-1} - x_{i+1}) \cdot y_i$$

Abb. 4 Schuhbandformel



Wie die Schuhbandformel zur Berechnung der Fläche eines Vielecks „funktioniert“, wird in den Abbildungen 3 und 4 am Beispiel eines Sechsecks erläutert: Man nummeriert die Eckpunkte P₁, P₂, ... P₆ dem Uhrzeigersinn entgegengesetzt durch und trägt die Koordinaten in zwei Spalten nebeneinander ein. Der erste Punkt wird als letzter nochmals hinzugefügt (P₇ = P₁). Nun werden die Spalten „über Kreuz“ - nach dem Schema (1) x_i · y_{i+1} - y_i · x_{i+1} miteinander multipliziert. Man erhält die letzte Spalte von Abb. 4: 4·3-(2·1)=10, ... , 5·2-(-1·4)=14.

Die Ergebnisse werden summiert, die Hälfte der Summe ist die gesuchte Fläche. Das „Über-Kreuz-Multiplizieren“, das an das Schnüren eines Schuhs erinnert, gibt der Formel ihren Namen.

2.1 Begründung der Schuhbandformel

An der folgenden Rechnung erkennt man, dass jeder Summand in der Formel (1) die Fläche eines Teildreiecks aus Abbildung 3 darstellt. Zur Berechnung der Gesamtfläche muss man also nur noch summieren.

$$\begin{aligned}
 A &= \text{Rechteck} - A_1 - A_2 - A_3 \\
 &= x_1 y_2 - \frac{1}{2} x_1 y_1 - \frac{1}{2} (x_1 - x_2)(y_2 - y_1) - \frac{1}{2} x_2 y_2 \\
 &= x_1 y_2 - \frac{1}{2} x_1 y_1 - \frac{1}{2} x_1 y_2 + \frac{1}{2} x_1 y_1 - \frac{1}{2} x_2 y_1 + \frac{1}{2} x_1 y_1 - \frac{1}{2} x_2 y_2 \\
 &= \frac{1}{2} (x_1 y_2 - x_2 y_1)
 \end{aligned}$$

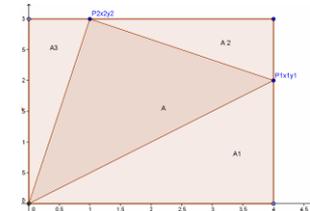


Abb. 5

2.2 Bezug zur Vektorrechnung

Aus der Vektorrechnung weiß man, dass die Länge des Vektorproduktes zweier Vektoren der Fläche des Parallelogramms gleich, das von diesen Vektoren aufgespannt wird. Wegen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1 \end{pmatrix}$$

kann man die Vektorprodukte einer Folge komplanarer Vektoren

als (vorzeichenbehaftete) Zahlen deuten, die man nur noch halbieren und anschließend aufaddieren muss, um die Gesamtfläche zu erhalten.

2.3 Wenn der Ursprung außerhalb des Vielecks liegt

gilt die Schuhbandformel unverändert. Denn dann gibt es (gemäß Abb. 6) außerhalb des Vielecks liegende Dreiecke, die beim Summieren ein negatives Vorzeichen bekommen. Die Vielecksfläche entsteht dann als Flächendifferenz.

2.4 Trapezformel

Man kann den Flächeninhalt des Vielecks auch mithilfe von Trapezen berechnen:

$$(3) \quad A = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 (x_i - x_{i+1}) \cdot (y_i + y_{i+1})$$

Wenn man dabei (Abb. 7) eine „obere“ Kanten „von rechts nach links“ durchlaufen wird, zählen die zugehörige Trapezflächen positiv, denn es gilt $x_i > x_{i+1}$. Die Trapezflächen unter dem Polygon zählen negativ und werden subtrahiert. Insgesamt bleibt beim Summieren die „Innenfläche“ des Vielecks übrig. Hieraus ergibt sich die Schuhbandformel wie folgt

$$2A = \sum_{i=1}^6 (x_i - x_{i+1}) \cdot (y_i + y_{i+1}) = \sum_{i=1}^6 (x_i y_{i+1} - y_i x_{i+1}) + \underbrace{\sum_{i=1}^6 (x_i y_i - x_{i+1} y_{i+1})}_0 = \sum_{i=1}^6 (x_i y_{i+1} - y_i x_{i+1})$$

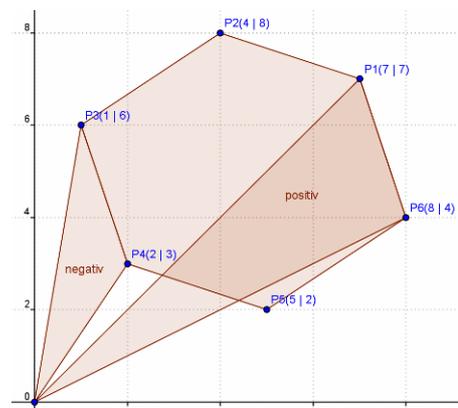


Abb. 6

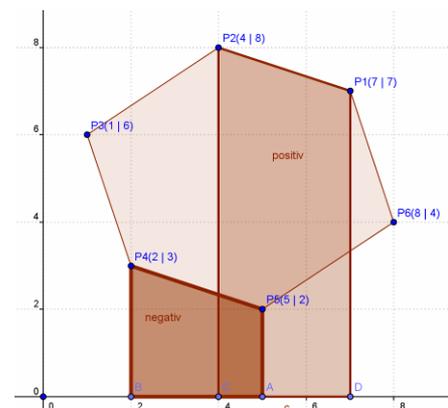


Abb. 7 Trapezformel

3 Wirklichkeit und Modell

Die Anwendung der Schuhbandformel auf den ASV-Sportplatz in Köln („Kampfbahn Typ B“) sieht man in der folgenden Excel-Tabelle. Heike aus der 8b, umrundete die 400m-Bahn auf ihrem Fahrrad (mit fliegendem Start im markierten Punkt). Sie brauchte 50 Sekunden (von 10:13:30 bis 10:14:20), hatte also eine Durchschnittsgeschwindigkeit von $400m/50s=8m/s=28.8km/h$. Der GPS-Empfänger zeichnete im Sekundenabstand die Positionen auf in der Form Latitude (geographische Breite, der Winkel wächst in Richtung Norden) und Longitude (geographische Länge, der Winkel wächst in Richtung Osten).

Wie man sieht, werden die Winkel bis auf Millionstel Grad abgespeichert. Das entspricht in N-S-Richtung überall auf der Erde $\Delta y=0.111m$ (Zelle F4) und in W-O-Richtung in der BRD $\Delta x=0.070m$ (Zelle E4)

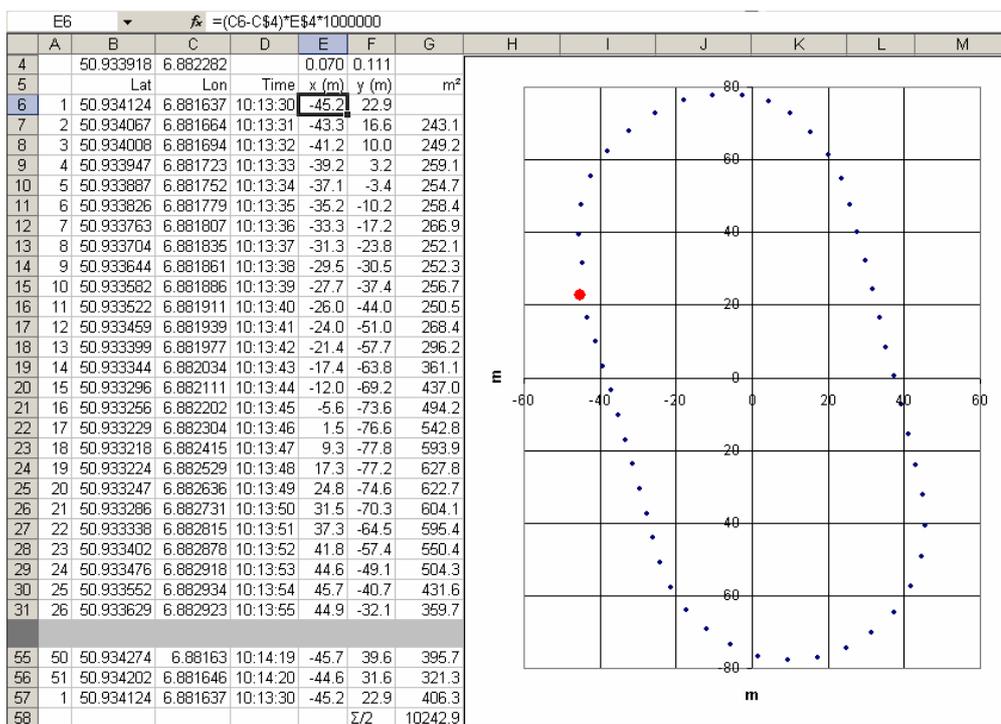


Abb. 8: Sportplatzrunde als Excel-Landkarte mit markiertem Startpunkt

Berechnung der kartesischen Koordinaten (x;y) in den Spalten E und F:

Den Ursprung $O=(Lon_0; Lat_0)$ unseres Sportplatz-Koordinatensystems legen wir in der Mitte des

$$\text{Spielfeldes: } O\left(\frac{\min(B1 : B51) + \max(B1 : B51)}{2} \mid \frac{\min(C1 : C51) + \max(C1 : C51)}{2}\right) \text{ (Zelle B4, C4).}$$

Damit werden die Koordinaten (in m) der Messpunkte nach den Formeln

$x=\Delta x*(Lat-Lat_0)*1000\ 000$ und $y=\Delta y*(Lon-Lon_0)*1000\ 000$ (vgl. die erste Zeile von Abb. 8) berechnet. Durch Kopieren der Formel nach unten entstehen die Spalten E und F. Der mit GPS und der Schuhbandformel ermittelte Flächeninhalt ergibt sich dann in Zelle G58 zu $10242.9m^2$.

Die Abbildung 9 zeigt die DIN-Abmessungen einer Typs B Kampfbahn. Es handelt sich um ein Oval mit Innenbahnradius 36.5m und Geradenlänge 83.39m. Die Normfläche wäre dann $A=36.5^2*\pi+2*36.5*84.39m^2=10\ 346m^2$. Bezogen hierauf ist unser Messwert 1% zu klein. Die Messung aus Abb. 2 mit $9301.7m^2$ ist um 9% zu klein.

Kampfbahn Typ B

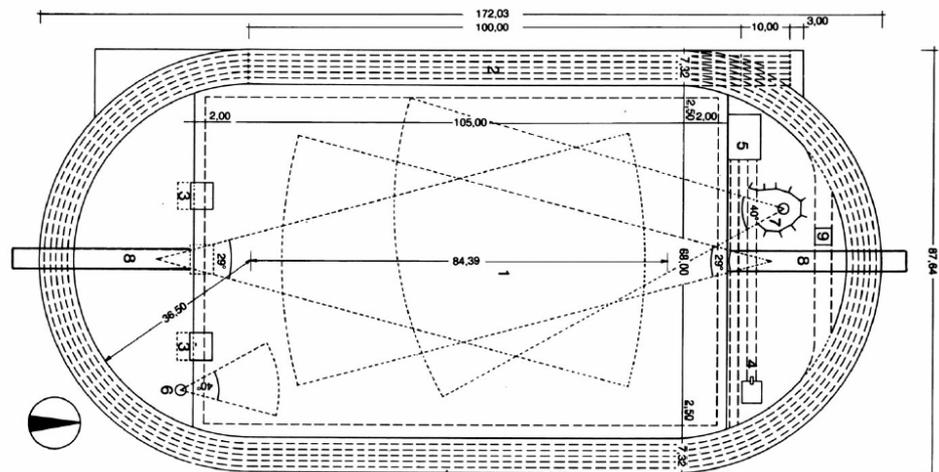


Abb. 9

4 Praxis-Tipps: Tracks in Excel importieren, Landkarten zeichnen

4.1 Inhalte von Track-Dateien ansehen

Tracks werden von GPS-Empfängern meist als Textdateien gespeichert. Die Dateinamen setzen sich zusammen aus Datum, Uhrzeit und einer Dateierweiterung wie .gpx. Über die USB-Schnittstelle kann man diese Dateien auf den Computer übertragen. Die Inhalte kann man sich (nach Maus-Rechtsklick auf den Dateinamen und der Option öffnen mit) mit einem Texteditor, einem HTML-Editor oder einer Tabellenkalkulation wie Excel direkt ansehen:

Das in Abbildung 10 protokollierte Fahrzeug bewegte sich in der Sekunde von 10:49:32 bis 10:49:33 um 12 Millionstel Grad ($12 \cdot 0.111\text{m} = 1.332\text{m}$) nach Süden und um 8 Millionstel Grad ($8 \cdot 0.070\text{m} = 0.560\text{m}$) nach Westen, es fuhr also mit der Geschwindigkeit $1.4\text{m/s} = 5.2\text{km/h}$ in Richtung SSW.

```
<trkpt lat="50.333977" lon="6.944810">
<time>2009-08-10T10:49:32Z</time>
</trkpt>
<trkpt lat="50.333965" lon="6.944802">
<time>2009-08-10T10:49:33Z</time>
</trkpt>
```

Abb. 10 Beispiel einer Track-Datei im .gpx-Format

Achtung: Vor Auswertung von Tracks in Excel muss man (unter Option International) den Punkt als Dezimaltrennzeichen einstellen - GPS-Dateien sind international!

4.2 Tracks auswerten

Zur Auswertung von .gpx-Dateien nutzt man z. B. <http://www.gpsvisualizer.com> (Abb. 11)

- Nach Klick auf „convert a file“ kann man den Track im .gpx - Format in eine Textdatei umwandeln, die jede Tabellenkalkulation weiter verarbeitet. Auch die Rückumwandlung von der Tabellenkalkulation in .gpx oder .kml oder .kmz (für Google Earth) ist möglich.
- Mit „draw a map“ stellt man die Tracks (die man auch nach Geschwindigkeiten einfärben kann) in Google-Maps dar. Man kann .gpx-Files aber auch direkt in Google Earth (V. 5.2) öffnen und animiert nachfahren - mit Höhen- und Geschwindigkeitsprofilen (vgl. 4.4).
- Mit „draw a profile“ erzeugt man Zeit-Weg und Zeit-Geschwindigkeitsgraphen.
- Mit „gpsbabel“ lassen sich ALLE gerätespezifische Datenformate in .gpx verwandeln - oder direkt in das .csv Format - für eine Weiterverarbeitung in einer Tabellenkalkulation .

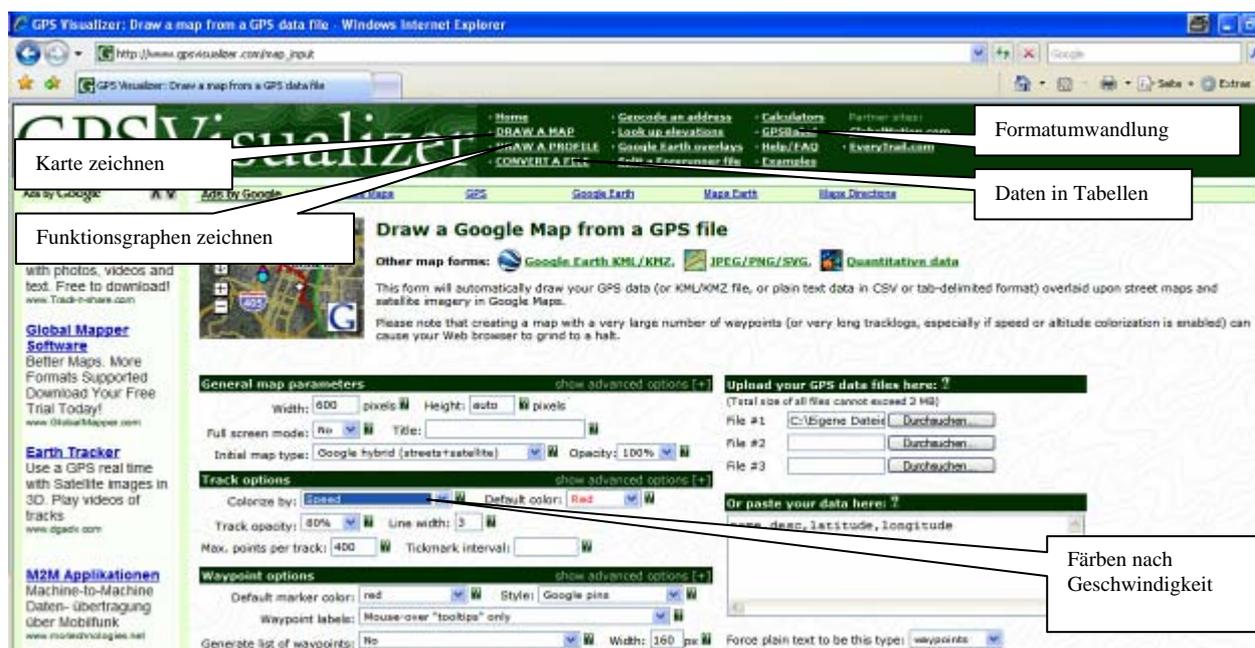


Abb. 11: www.gpsvisualiser.com: Internetseite zur Formatumwandelung, zum Zeichnen von Karten und Auswerten von Fahrspuren

4.3 Google-Maps (2D) mit Sekunden-Pins

Landkarten wie in Abb. 1 mit Pins im Sekundenabstand liefert http://www.gpsvisualizer.com/map_input (nur) aus einer Excel Datei wie folgt: Kopieren der Lat, Lon, Time- Spalten samt Überschrift in das das Fenster „Paste your Data here“ und (WICHTIG!) Einstellen der Option: Force plain text to be this type: waypoints.

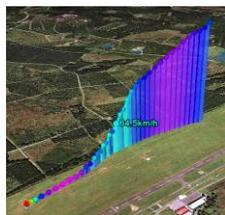


Abb. 12 Seilwindenstart eines Segelfliegers in Google-Earth

4.4 Google Earth 2D und 3D Karten mit beschrifteten Sekundenpunkten

Wenn ein Track Höhenangaben enthält kann man ihn in Google Earth dreidimensional darstellen. Das ist für Flugdaten interessant. Man muss den Track .gpx zunächst in das .kml oder .kmz – Format umwandeln.

- Man geht auf <http://www.gpsvisualizer.com/map?form=googleearth>,
- gibt im Feld Upload your GPS data files die Track-Datei (.gpx) ein oder kopiert die Daten aus einer Excel-Tabelle samt Spaltenüberschriften in das Eingabefeld
- wählt das Output Format (.kml oder .kmz),
- wählt als Altitude Mode für 3D Extruded (connected to ground as a wall) - vgl. Abb. 12 für 2D clamped to ground
- färbt ggf. den Track z. B. nach Geschwindigkeit
- wählt bei „Draw as waypoints“ data from the colorized field.

Wenn man dann „convert“ anklickt. Steht der .kml oder .kmz File zum Download bereit.

Wenn man Google Earth bereits installiert hat, öffnet sich die dreidimensionale Karte beim Klick auf den angebotenen .kmz-File automatisch und die Geschwindigkeit wird an jedem Trackpunkt angezeigt, wenn man mit der Maus darüber fährt.

4.5 animierte Tracks (Straßenbahn und Nürburgring im Klassenzimmer)

Seit Juli 2010 kann man in Google-Earth (ab Version 5.2, www.earth.google.de/download-earth.html) .gpx-Dateien (Achtung: direkt aus Google heraus öffnen, nicht zuvor in .kml umwandeln) in Landkarten darstellen, sondern die zugehörigen Bewegungen Sekunde für Sekunde auch „animiert“ abspielen (Abb. 13). Ein Pfeil bewegt sich mit der aus den GPS-Daten ermittelten Geschwindigkeit über die Landkarte. Nach Rechtsklick auf den Track werden Höhen- und Geschwindigkeitsprofile angezeigt. Die Beziehung zwischen den Punkten des Funktionsgraphen und den Positionen in der Landkarte werden greifbar.

Wird hier nicht das aus der „CAS- Didaktik“ bekannte „Window-Shuttle-Prinzip“ das (mit dem simultanen Blick auf graphische und symbolische Ebene) einst DERIVE so populär machte - und das nun in GeoGebra weiterlebt - auf eine neue Ebene gehoben? Auch wer - wie der Autor - Animationen tendenziell für „Spielerei“ hält muss eingestehen, dass wegen der gemessenen Daten im wahrsten Sinne „erfahrene“ Realität in den Klassenraum hineinkommt und Fragen nach dem „wozu Mathe“ verstummen lässt.

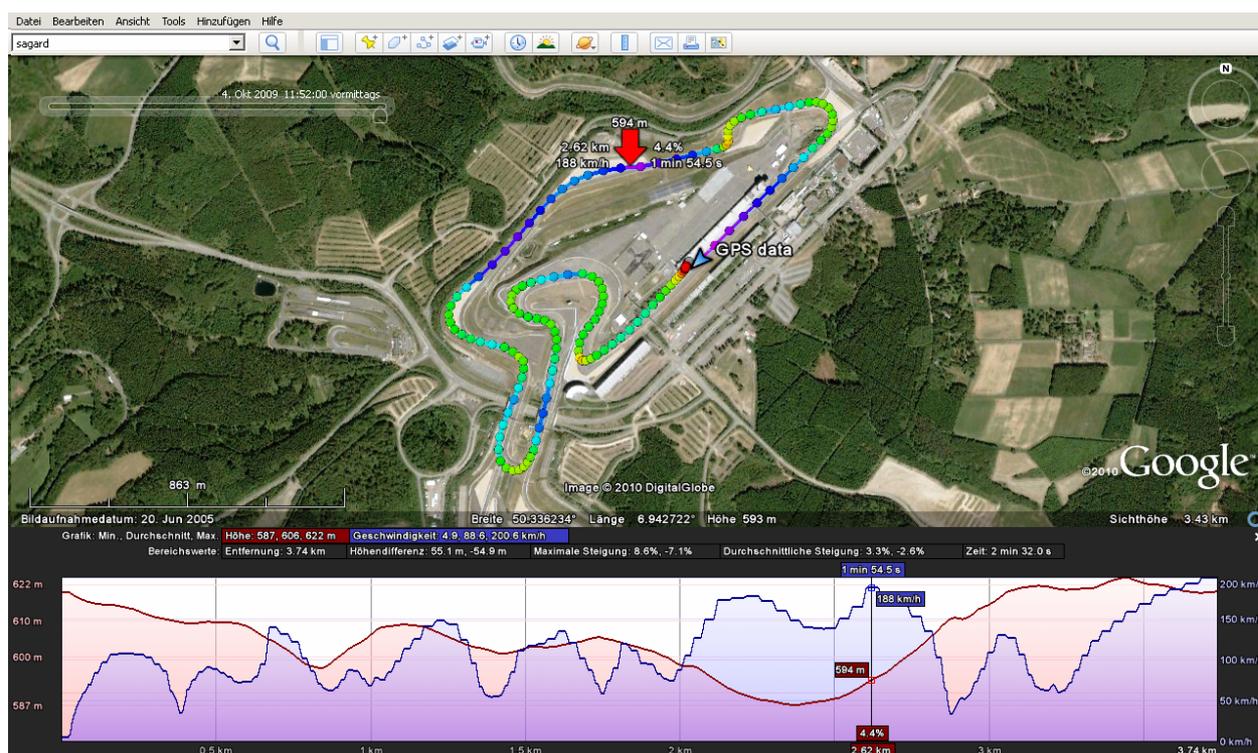


Abb. 13: Animierter Track der GP-Strecke am Nürburgring mit Höhen und Geschwindigkeitsprofil in Google Earth
Färbung nach Geschwindigkeit

5 Kauftipps

5.1 Dem Artikel liegt das Trekking-Navi Garmin Oregon (mit barometrischer Höhenaufzeichnung) zugrunde. Das preiswertere eTrex zeichnet ebenfalls gpx-Tracks im Sekundenabstand auf und ist für Schulen, die auf Klassenfahrten „Geocachen“ auch im Klassensatz finanzierbar. Die Garmin-Software Mapsource wandelt Tracks direkt in Textdateien um. Google-Earth liest Daten aus Garmin-Geräten aber auch direkt aus

5.2 Sehr empfehlenswert sind die GPS-Empfänger der Firma QSTARZ.

- Das Fitness-Tacho „Explore 2000“ speichert Daten im Sekundenabstand.
 - Der Datenlogger „Xtreme Recorder BT-Q1000eX“ (ohne Display) wurde für den Rennsport entwickelt, er zeichnet auf Wunsch auch 5 Messpunkte je Sekunde auf.
- Beide Geräte speichern Höhen und sind zur Protokollierung von Flügen geeignet. Die beiliegende Software kann direkt Textdateien erzeugen und bietet bessere Animationen als GoogleEarth, insbesondere t-s und t-v-Grafiken zum Einstieg in die Differentialrechnung.

5.3 Die Medion Auto-Navis (von Aldi vertrieben), zeichnen Tracks zweidimensional auf, früher im .trk, heute im .gpx oder im .kmz Format, ebenso Geräte von Garmin, Clarion und Navgear.

5.4 Bei Smartphones wird die Spuraufzeichnung bald zum Standard gehören.

Für das iPhone gibt es preiswerte Apps, für Windows-Mobile und Android Handys die Freeware-Programme z. B. „KDR-Tracker“ bzw. „MyTracks“

Zum Weiterlesen:

- [1] www.riemer-koeln.de hier findet man die Datei gps-tips, mit ausführlichen Hinweisen zum Umgang mit gpsvisualiser und eine Fülle von interessanten Tracks, auch die hier erwähnten .gpx und kmz-Tracks zur Sportplatzrunde, zur Straßenbahn und zum Nürburgring.
- [2] Lambacher-Schweizer Einführungsphase (NRW) Klett 734401 auf www.klett.de den online-Link 734401-2441 eingeben
- [3] Lambacher-Schweizer Qualifikationsphase auf www.klett.de den online-Link 735301-3881 eingeben
- [4] Riemer, Wolfgang: Dem Navi auf der Spur: MNU 62/8 (2009) S. 468-477.
- [5] Riemer, Wolfgang: Bewegungen mit GPS untersuchen, Grundvorstellungen der Analysis „erfahren“: mathematik lehren 160 (Juni 2010) S. 54-58.

Dr. Wolfgang Riemer (w.riemer@arcor.de)
unterrichtet Mathematik, Physik und Informatik am Heinrich-Mann-Gymnasium,
und bildet am Studienseminar in Köln Lehrer aus.

Mit GPS in der Straßenbahn (Modellierungsbeispiel zu linearen Funktionen, Klasse 7)



Abb. 1: Track einer Straßenbahnfahrt von der Schulstraße zum Mohnweg mit Zwischenhalten in „Weiden Zentrum“ und an der Bahnstraße - mit dem Internet-Tool „GPSVisualizer nach Geschwindigkeit gefährt

Kontrolliere alle deine Rechenergebnisse an der blauen Grafik g

-----	---
Weiden Schulstr.	4.30
Weiden Zentrum	4.32
Bahnstr.	4.33
Mohnweg	4.35

Eine Straßenbahn fährt von der Haltestelle Schulstraße zur Haltestelle Mohnweg. Für die 1874m lange Strecke braucht sie 213 sek. Nimm an, dass die zurückgelegte Strecke zur verstrichenen Zeit proportional ist (Abb. 2, blaue Linie, Gerade g).

- a) Wie viele Meter müsste sie dann nach 10, 100, 200 3600 Sekunden zurückgelegt haben? Trage die Positionen auf der Landkarte ein, nutze den eingblendeten Maßstab.
- b) Mit welcher Geschwindigkeit (in m/s und km/h) fährt die Bahn bei der Modellannahme?
- c) Gib eine Funktion an, die zu jeder Zeit x (in s) die zurückgelegte Strecke y (in m) liefert.
- d) nach wie vielen Sekunden müsste die Bahn dann an den Haltestellen Weiden Zentrum (471m) bzw. Bahnstraße (1172 m) ankommen?
- e) Natürlich kann eine Straßenbahn an den Haltestellen nicht mit konstanter Geschwindigkeit durchfahren. Den tatsächlichen (mit einem GPS gemessenen) Zusammenhang zwischen Zeit und zurückgelegtem Weg zeigt die rote Grafik f, die keine Gerade mehr darstellt. Erkläre den merkwürdigen Verlauf des Graphen mit den Treppenstufen. Wo findest du in den Graphen f die Haltestellen aus der Karte von Fig. 1 wieder?

Vergleiche die in d) berechneten Fahrzeiten mit den tatsächlichen Fahrzeiten.

- f) Fig. 2 enthält einen weiteren Graphen einer Funktion h. Wie hängt h mit f und g zusammen? Stelle eine Frage, die dieser Graph beantworten könnte.
- g) Wann fährt die Straßenbahn am schnellsten? Schätze ihre größte Geschwindigkeit!

Erläutere, wie du geschätzt hast. Kontrolliere Deine Rechenergebnisse, indem Du die linie-1.gpx in Google-Earth öffnest und (nach Maus-Rechtsklick auf den Track) das Geschwindigkeitsprofil studierst.

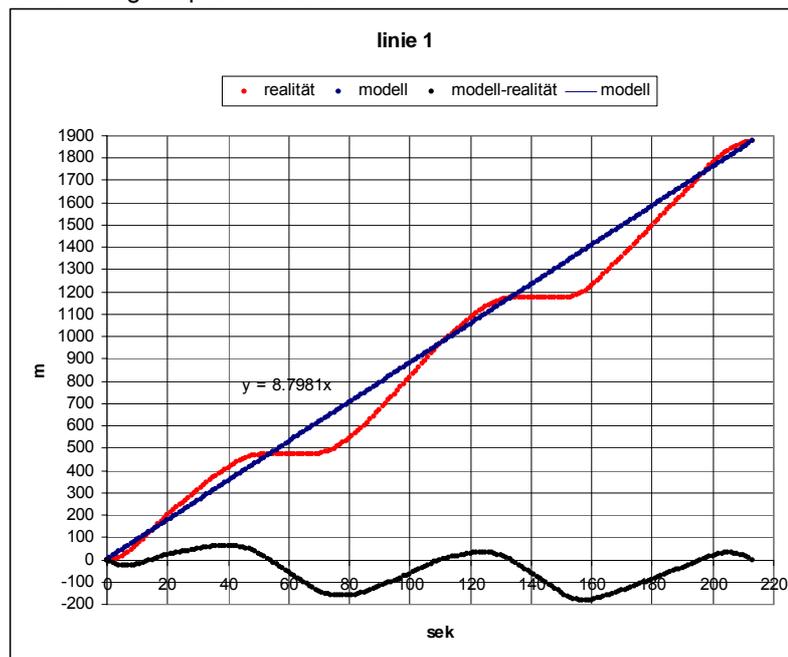


Abb. 2