

WOLFGANG RIEMER, REINHARD SCHMIDT

Klothoiden „erfahren“ mit GPS, Google und GeoGebra

Modellieren ohne Realität ist wie Schwimmen ohne Wasser



Abb. 1: Boxengasse/Zielgerade in Hockenheim. Dahinter liegt die Nordkurve, die dieses Renntaxi mit ca. 115 km/h durchfuhr.



Abb. 2: Die 5/10HZ GPS-Logger auf dem Armaturenbrett eignen sich besser als Trekking Navis, rechts am Holm fixiert.

Abstract: Straßenführungen „modelliert“ man im Mathematikunterricht oft mit prüfungsrelevanten Funktionsklassen wie Polynomen und Exponentialfunktionen (Abb. 3). Leider kommen dabei Scheinanwendungen heraus: „Realitätsnahe Anwendungsaufgaben erhält man nicht dadurch, dass man die Kurven, die man gerne diskutieren möchte, Straßen nennt.“ [Lambert & Peters 2005].

Mit digitalen Landkarten, GPS-Tracks und Werkzeugen wie GeoGebra gelingt es aber, Realität ins Klassenzimmer zu holen und *die Perspektive zu wechseln*:

Wenn man Schülern nämlich nicht mehr „vorgaukelt“, *dass* „Kontextaufgaben“ die Wirklichkeit beschreiben, sondern fragt, *wie gut* ein ausgedachtes Modell passt – oder *warum* es *nicht* passen kann – verliert das Thema den Beigeschmack des „Ausziehens zuvor eingekleideter Aufgaben“. Es entstehen Anlässe für spannende Untersuchungen, mit denen man in Klasse 6/7 beginnen kann, und die mit dem Abitur noch nicht abgeschlossen sind.

1 Einleitung

GPS-Empfänger zeichnen Zeit-Weg-Funktionen „s(t)“ auf. Diese lassen sich beim Anfahren und Abbremsen von S-Bahnen und Kraftfahrzeugen meist ausgezeichnet durch quadra-

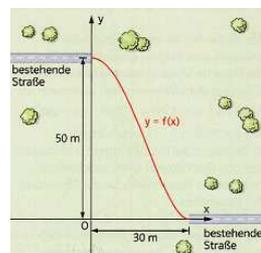


Abb. 3: Der Kontext ist austauschbar. Es handelt sich um eine kontextfreie Steckbriefaufgabe.

tische Funktionen beschreiben. Die Zeit-Geschwindigkeitsfunktionen „ $v(t)$ “ sind dann linear. Das Modellieren von Realität durch Funktionen wird erlebbar; man ist im Kern der Schulanalysis.

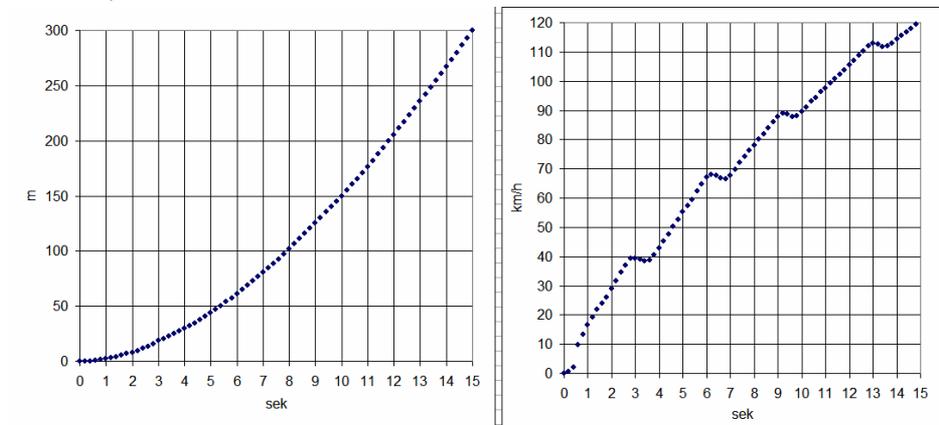


Abb. 4: Start in Hockenheim: Der Graph der Zeit-Weg-Funktion gleicht einer Ursprungsparabel. Erst eine Analyse durch die stückweise lineare Zeit-Geschwindigkeitsfunktion macht die Schaltvorgänge sichtbar. Der Name *Analysis* kommt von *Analysieren*.

Weniger geläufig ist, dass GPS-Empfänger auch die Fahrtrichtung (den „Kurs“) α in Abhängigkeit von der zurückgelegten Strecke aufzeichnen. Und wenn man die Graphen dieser Richtungsfunktionen „ $\alpha(s)$ “ beim Einfahren in eine Kurve untersucht, entdeckt man auch hier eine quadratische Abhängigkeit, also eine lineare Abhängigkeit der Richtungsänderung (des Lenkradeinschlags) vom Weg. In der Tat muss man die eigene Lenkradbewegung beim Kurvenfahren nur aufmerksam beobachten, um an diesem Beispiel zu erkennen, was Heinrich Winter [1995] mit seiner ersten Grunderfahrung gemeint haben könnte:

„Der Mathematikunterricht sollte anstreben, Erscheinungen der Welt in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen.“

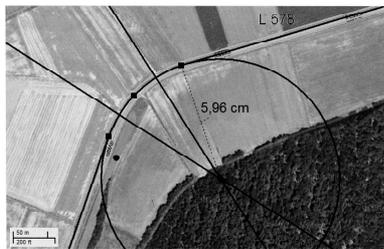
Wenn man weiterdenkt und sich fragt, auf welchen Spuren man Kurven durchfährt, wenn man das Lenkrad linear mit dem Weg dreht, landet man bei Klothoiden. In ihrer diskreten – durch GPS-Messungen nahe gelegten – Form ist die rechnerische Bewältigung in einer Tabellenkalkulation (vgl. Abschnitt 5) ohne Analysis einfach, da Bogenlängen, Drehwinkel und Kurvenkrümmungen numerisch vorliegen oder aus Positionen direkt bestimmt werden können. Analytisch sind sie sperriger, aber das hat sich mit dem Einzug von GeoGebra geändert, wie in Abschnitt 6 angedeutet und durch das Klothoidenlineal aus Abschnitt 7 belegt wird.

2 Nicht so schnell in die Kurve

2.1 Die Richtlinien zur Anlage von Landstraßen (RAS-L) in Klasse 7

Wir beginnen mit einem Aufgabenbeispiel [Henn 2014], das zeigt, wie man das Thema „Kurvenfahren“ ab Klasse 7 mit Satellitenfotos und GeoGebra (auch ohne GPS) erschließen kann. Der Pfiff besteht darin, dass man nach händischem Messen mithilfe einer Geset-

zestabelle auch „vor der eigenen Haustür“ *Prognosen* über Geschwindigkeitsbeschränkungen machen kann, die dann in der Realität an aufgestellten Warnschildern auch einer Überprüfung zugänglich sind. Es ist diese Überprüfbarkeit, die für Motivation und Authentizität sorgt. Und natürlich werden die Schülerinnen und Schüler angeleitet, über den funktionalen Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und Kreisradien nachzudenken, einen Zusammenhang, der auch die nächste Achterbahnfahrt in einem neuen mathemathikhaltigen Licht erscheinen lässt.



Nicht so schnell in die Kurve!

Wie wird eine Geschwindigkeitsbeschränkung wie diese an der Landstraße von Iaubersichotshem nach Würzburg festgelegt? Die Richtlinie für die Anlage von Straßen gibt den Mindestradius einer Kurve bei vorgegebener Geschwindigkeit an – oder andersherum: Sie legt fest, wie schnell man durch eine Kurve fahren darf (Tabelle).

v [km/h]	min R [m]
50	80
60	120
70	180
80	250
90	340
100	450
120	720

Mindestradius bei vorgegebener Geschwindigkeit – oder anders herum gelesen: Wie schnell darf man in einer Kurve fahren?



Geschwindigkeitsbeschränkung

Straße L578 aus der Vogelperspektive



Sind die 70 km/h angemessen? Lade die Luftaufnahme der Landstraße L578 in ein DGS. Stelle dir vereinfachte die Straße aus Ceraden- und einem Kreisbogen zusammengesetzt vor. Ermittle den Radius der Kurve, indem du geschickt einen Kreis einpasst, dessen Radius misst und den im Bild angegebenen Maßstab nutzt.

Abb. 5: Aufgabe aus Henn [2014].

2.2 Mit der RAS-L auf dem Hockenheimring?

Im Anschluss an die L578 besuchen wir die Nordkurve des Hockenheimrings, die in Nordrichtung durchfahren wird, aber im Westen des Ringes liegt. Wie schnell *dürften* hier die Autos höchstens fahren, wenn sie sich an die RAS-L (Tabelle aus Abb. 5) halten würden?

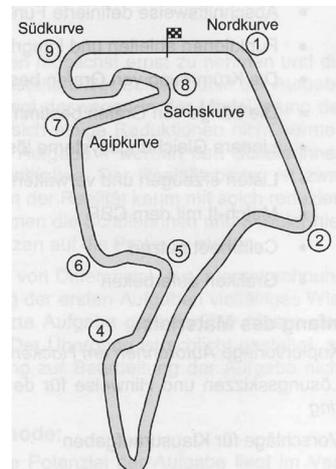
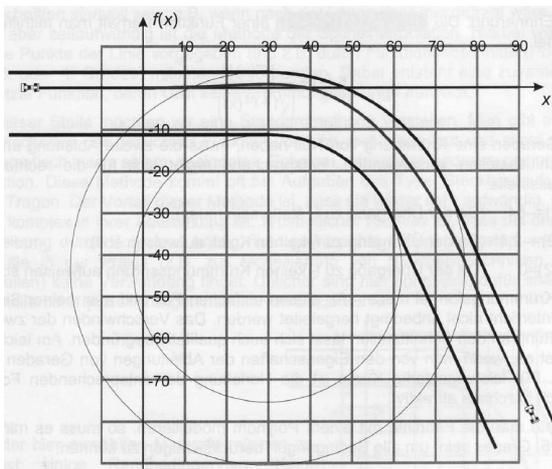


Abb. 6: Nordkurve nach Pallack [2007] mit Steckbrief-Polynom als Fahrspur. Auf der Suche nach Anwendungen wird angeregt, mit CAS über Fahrspuren in der durch konzentrische Kreise beschriebenen Nordkurve des Hockenheimrings zu spekulieren. Um diese durch Funktionsgraphen beschreiben zu können, wird die Nordkurve nach Osten gedreht.

Im Gegensatz zur L578 spielt bei Autorennen die Fahrbahnbreite eine enorme Rolle! Wenn man die Kurve wieder durch konzentrische Kreise modelliert, kommt man nach Abb. 7 auf den Innenradius von ca. 7m und einen Außenradius von ca. 20m. Und jetzt sieht man, warum Autos Kurven gerne anschneiden. Führt man nämlich über einen Krümmungskreis von der Außen- über die Innen- und wieder auf die Außenseite des Rings (dicke Kreisbahn), so kommt man auf einen Krümmungsradius von stattlichen 132m. Würde auf dem Hockenheimring die RAS-L gelten, dürfte man in der Nordkurve etwas mehr als 60km/h fahren.

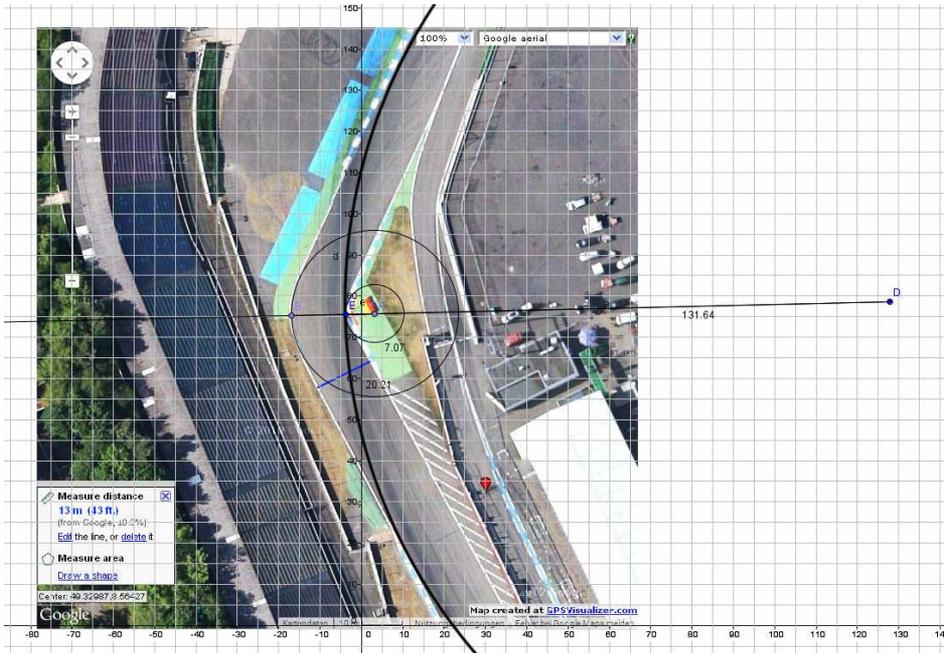


Abb. 7: Satellitenaufnahme der Nordkurve. In Google Maps kann man die Fahrbahnbreite (13m) messen.

2.3 Modellieren und extrapolieren: Querbeschleunigung und Hintergrund der RAS-L

Die nahe liegende Frage, wie schnell man auf der Innenkante der Rennstrecke ($r=7m$) fahren dürfte, lässt sich mit der RAS-L Tabelle nicht beantworten, da sie für solche Fragestellungen nicht gemacht wurde. Normalerweise extrapoliert man in solchen Fällen die zur Tabelle gehörende „linksgekrümmte Punktwolke“ aus (Geschwindig-

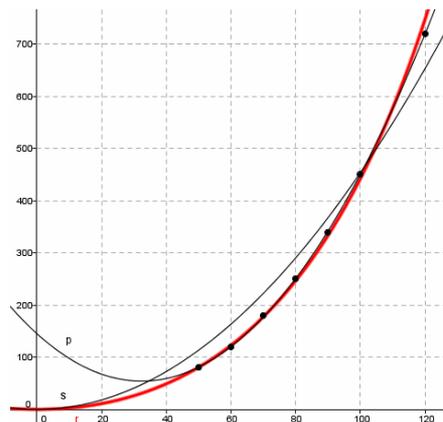


Abb. 8: Das „Modellieren mit Trendfunktionen“ bleibt ohne Sachverstand inhaltsleer.

keit; Radius)-Punkten mit Trendfunktionen, die im Unterricht „gerade dran sind“.

So liefert die Trendparabel p mit $p(x) = ax^2 + bx + c$ gemäß Abb. 8 für kleine Radien wachsende Geschwindigkeiten, was nicht zur Wirklichkeit passt. Diese Extrapolation ist sinnlos. Eine Ursprungs-Trendparabel mit $c = 0$ würde für kleine Radien negative Geschwindigkeitswerte liefern und die rein quadratische Parabel mit $b = c = 0$ passt nicht mehr zur RAS-L. Spekulieren hilft nicht weiter, physikalischer Sachverstand (Abb. 9) ist gefragt und beleuchtet, was hinter der RAS-L stecken könnte. Berechnet man nämlich aus den Tabellenwerten die vom Gesetzgeber gerade noch akzeptierten Querbeschleunigungen a_q , so stellt man eine lineare Abhängigkeit von der Geschwindigkeit v fest:

$a_q = 3,0387 - 0,0127 v$ (v in km/h, a_q in m/s^2 , vgl. Abb. 10). Damit ergibt sich aus

$$a_q = \frac{1}{r} \cdot v^2 \text{ für den geforderten Krümmungsradius } r \text{ in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit}$$

$$r = \frac{v^2}{a_q} = \frac{v^2}{3,037 - 0,0129v}$$

einer Polstelle bei $v \approx 235\text{km/h}$ als Maximalgeschwindigkeit auf gerader Strecke) als sinnvolle Extrapolation der RAS-L Tabelle.¹ Hiernach dürfte man auf der Innenkante der Nordkurve ($r = 7\text{m}$) nur 16km/h fahren, auf der Außenkante ($r=20\text{m}$) 25km/h und beim Anschneiden der Kurve auf einer Kreisbahn mit $r = 132\text{m}$ immerhin 62km/h .

Bremsverzögerungen für PKWs jeweils in m/s^2 angegeben

Asphalt
trocken 7,0
nass 5,75

Pflaster
trocken 6,0
nass 5,0

Neuschnee
Sommerreifen 2,3
Winterreifen 2,8

Hartschnee
Sommerreifen 2,0
Winterreifen 2,5

Glatteis
ohne Spurketten 1,25
mit Spurketten 2,75
gut gestreut 2,25

Querbeschleunigung

Für die Querbeschleunigung a_q , die ein Auto aus der Kurve rutschen lassen möchte, gilt

$$a_q = \frac{1}{r} \cdot v^2 = k \cdot v^2$$

a_q : Querbeschleunigung in m/s^2
 r : Krümmungsradius in m
 v : Geschwindigkeit in m/s
 $k = 1/r$: Krümmung in rad/m .

Die Querbeschleunigung sollte je nach Witterungs/Reifenverhältnissen unter den nebenstehend aufgeführten Werten liegen.
 Während die Beschleunigung mit der Maßeinheit „m/s je s“ geschrieben als m/s^2 beim Geradeausfahren als Geschwindigkeitsabnahme je Zeiteinheit Mittelstufenschülern intuitiv noch gut zugänglich ist, die Querbeschleunigung mit der gleichen Maßeinheit sperrig. Sie erschließt sich erst, wenn man Geschwindigkeiten als Vektoren deutet, die sich beim Kurvenfahren trotz gleicher Tachoanzeige ändern.

Abb. 9: Info zur Querbeschleunigung. Lambacher-Schweizer 8 (734441) S. 219.

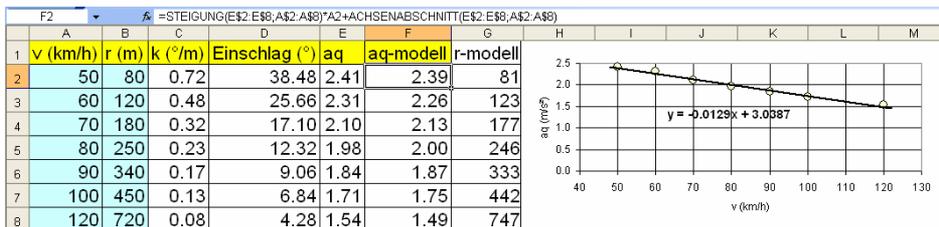


Abb. 10: Die vom Gesetzgeber akzeptierte Querbeschleunigung a_q (in m/s^2 , Spalte E) sinkt linear mit der Geschwindigkeit v (in km/h , Spalte A). Spalte F zeigt die im Linearmodell zulässigen Querbeschleunigungen zum Vergleich.

Spalte G enthält die nach diesem Modell zulässigen Krümmungsradien, die sehr gut zu den tatsächlich vorgeschriebenen (Spalte B) passen.

3 Sprung in die Wirklichkeit

Matheunterricht wird spannend, wenn man nach dem Spekulieren den Vergleich mit der Realität wagt. In Abb. 5 bestand dieser im Blick auf das Verkehrsschild, das man am Hockenheimring vergeblich sucht. Stattdessen schauen wir uns den Track einer Runde samt Geschwindigkeitsprofil an, das man in Google-Earth auch Punkt für Punkt ausmessen kann.



Abb. 11: In Google Earth kann man Tracks samt Geschwindigkeitsprofil (untere Bildhälfte) darstellen und mit dem Videoplayer (oben links) animiert nachfahren. Auf der Nordseite des Ringes fährt das Renntaxi 240 km/h, bevor es in der Nadelkurve (im Osten) auf 60 km/h herunterbremst.

Statt der prognostizierten Kreisbahn mit $r=132\text{m}$ fährt das Taxi auf einem Track, der von der Geraden allmählich in einen engeren Kreis mit Radius $r = 85\text{m}$ übergeht. Wegen dieser Übergangsbögen kann der Kreis die äußeren Fahrbahnänder auch nicht mehr berühren. Aber das Tempo ist mit fast 120km/h doppelt so hoch wie „erlaubt“ und die Querschleunigung ist mit 12m/s^2 achtmal so groß wie der RAS-L Grenzwert, der $1,5\text{m/s}^2$ beträgt. Das wird natürlich nur durch sehr breite und weiche Reifen möglich, die auf der Fahrbahn „kleben“.

Wie man die Querschleunigung (über die Krümmung) aus diskreten GPS-Messdaten mittels Tabellenkalkulation berechnet, zeigt der folgende Abschnitt 4.



Abb. 12 (Nordkurve): große Punkte: Google-Hintergrund, kleine Punkte (in den großen): GeoGebra. Die 10 Positionen im Kurvenscheitel (sie entsprechen einer Sekunde Fahrzeit) liegen „exakt“ auf dem berechneten Kreis mit $r=85\text{m}$. Der Track verlässt die Kreisbahn und geht (auf Klothoidenbögen) in „Geradenstücke“ über, die aber keine Kreistangenten mehr sind. Da die Strecke hinter der Nordkurve leicht rechtsgekrümmt weiterführt, verlässt der Fahrer die linke Fahrbahnkante. Das hat zur Folge, dass die abgebildeten Geraden („Asymptoten“) sich etwas nördlich des Kurvenscheitels schneiden.

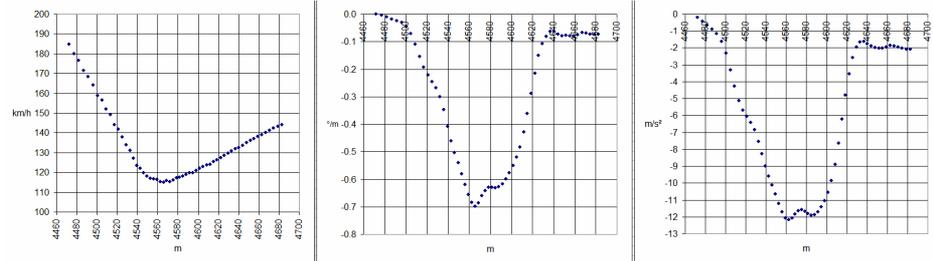


Abb. 13: Nordkurve-Geschwindigkeit

Krümmung

Querbeschleunigung

4 GPS-Daten auswerten: Krümmung und Querbeschleunigung berechnen

4.1 Auswertung der GPS-Daten mittels Tabellenkalkulation

Aus der *Vogelperspektive* lässt sich die Krümmung k einer Straße bzw. eines Tracks durch Einpassen des Krümmungskreises wie in Abb. 7 bestimmen. Wenn man *im* Auto sitzt, liegt die Definition der Krümmung k als *Drehwinkel je zurückgelegter Strecke* näher. Man kann sie am Lenkradeinschlag bzw. der Querstellung der Reifen sehen und aus aufgezeichneten

GPS - Positionsdaten auch direkt messen. Den Krümmungsradius erhält man dann als Kehrwert $r=1/k$ und die Querbeschleunigung über $a_{quer} = k \cdot v^2$ (Abb. 14).

Wäre die Fahrspur analytisch als Kurve $(x(t); y(t))$ gegeben, könnte man die Krümmung nach der Formel (2) aus 4.2.2 mithilfe von Ableitungen bestimmen. Bei Vorliegen diskreter Messdaten (Zeitpunkte, Positionen) kommt man wie folgt mit Vektorrechnung aus:

T1319		f _k = ARCSIN((Q1318*R1320-R1318*Q1320)/(S1318*S1320))/(N1320-N1318)										
M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	
t (s)	s (m)	x (m)	y (m)	vx (m/s)	vy (m/s)	v (m/s)	k (rad/m)	k (°/m)	r (m)	omega (rad/s)	a-quer (m/s²)	
1317	132.6	4559.2	41.84	24.09	32.00	-2.69	32.1	-0.011	-0.66	-87	-0.3686	-11.87
1318	132.7	4562.4	45.03	23.77	31.72	-3.88	32.0	-0.012	-0.68	-84	-0.3811	-12.17
1319	132.8	4565.6	48.18	23.32	31.44	-5.08	31.9	-0.012	-0.70	-82	-0.3866	-12.27
1320	132.9	4568.8	51.30	22.75	31.21	-6.29	31.8	-0.012	-0.69	-84	-0.3808	-12.11
1321	133.0	4572.0	54.41	22.05	31.02	-7.47	31.9	-0.012	-0.66	-87	-0.3676	-11.72

Abb. 14: Im Scheitel der Nordkurve. Der GPS-Empfänger bestimmt die Position P(x; y) 10-mal je Sekunde.

Zunächst berechnet man den Geschwindigkeitsvektor zur Zeit t (Spalten Q, R):

$$\vec{v}_t = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \frac{2}{10} \cdot \overrightarrow{P_{t-0,1}P_{t+0,1}}$$

Alternativ liefert der Befehl =Steigung(O1317:O1319;M1317:M1319) in Q1319 die Geschwindigkeit v_x als Steigung eines t-x Trendgeradenstückchens. Dadurch wird der Einfluss von Messfehlern reduziert. Den Winkel, um den man sich zwischen den Zeiten t-0,1 und t+0,1 dreht, erhält man mit

$$\alpha_{t-0,1;t+0,1} = \arcsin\left(\frac{\vec{v}_{t-0,1} \times \vec{v}_{t+0,1}}{|\vec{v}_{t-0,1}| \cdot |\vec{v}_{t+0,1}|}\right)$$

und die Krümmung (Spalten T, U) ergibt sich, indem man den Drehwinkel durch den zurückgelegten Weg teilt (vgl. die erste Zeile in Abb. 14) zu:

$$k_t = \frac{\alpha_{t-0,1;t+0,1}}{s(t+0,1) - s(t-0,1)}$$

4.2 Exkurs zum Krümmungsbegriff

4.2.1 Rechtskurven und Linkskurven

Der Betrag des Vektorproduktes ist die Fläche des von den Vektoren aufgespannten Parallelogramms. Es gilt $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b})$. Das Produkt von Geschwindigkeitsvektoren, die in der x-y-Ebene liegen, hat nur eine Vertikalkomponente, es lässt sich als Zahl deuten. Sie ist in Rechtskurven negativ, in Linkskurven positiv. Damit erhält man den

orientierten Drehwinkel aus $\sin \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.

Wenn man stattdessen mit $\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ arbeitet, kann man rechnerisch zwischen Rechts- und Linkskurven nicht unterscheiden.

4.2.2 Krümmung, Krümmungsradius und Lenkradeinschlag

Die Krümmung einer Kurve ist definiert als $k = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\text{Richtungsänderung}}{\text{Fahrstrecke}}$. Dabei

misst man die Richtungsänderung als Winkel im Bogenmaß und die Fahrstrecke in Meter. Bei einem Kreis mit Radius r dreht man sich bei einer Runde auf der Länge $2\pi r$ um den Winkel 2π , die Krümmung ist daher $k = \frac{2\pi}{2\pi \cdot r} = \frac{1}{r}$, also gerade der Kehrwert des Krümmungsradius. In Linkskurven ist sie positiv, in Rechtskurven negativ.

Dass die Krümmung in der Praxis tatsächlich dem Lenkradeinschlag proportional ist zeigt die Messreihe aus Abb. 16, vgl. hierzu Imsieke [2014].

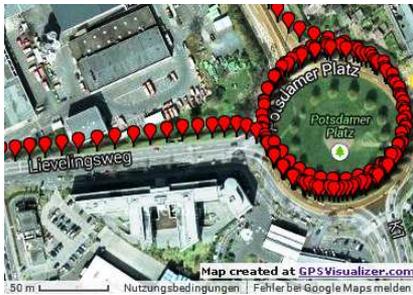


Abb. 15: Wenn man Verkehrskreisel mit verschiedenen Radien durchfährt, zeigt sich ein ...

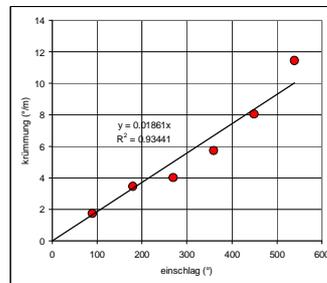


Abb. 16: ... proportionaler Zusammenhang zwischen Krümmung in $1/m$ und Lenkradeinschlag in $^\circ$.

4.2.3 Krümmung analytisch

Ergänzend zur diskreten Sicht auf die Krümmung mit Kalkulationstabellen lohnt ein Exkurs in die Analysis: Wenn man das Koordinatensystem so legt, dass man die Fahrspur durch den Graphen einer Funktion f beschreiben kann, gilt

$$(1) \quad k(x) = \frac{f''(x)}{(\sqrt{1 + f'(x)^2})^3}$$

Dem Problem angemessener ist eine Beschreibung der Fahrspur als Kurve $p(x(t); y(t))$, wobei man die Zeit t als Parameter verwendet. Dann erhält man

$$(2) \quad k(t) = \frac{(x'(t) \cdot y''(t) - x''(t) \cdot y'(t))}{(\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2})^3}$$

Es gibt viele formale Herleitungen der Krümmungsformeln, vgl. z. B. Neveling oder Bauer [2015]. Direkt einsehen kann man (2) wie folgt: Man durchfährt die Kurve gedanklich mit konstanter Tachogeschwindigkeit $|\vec{v}| = \sqrt{x'(s)^2 + y'(s)^2}$. Der normierte Beschleunigungsvek-

tor $\vec{a}_0 = \frac{1}{|\vec{v}|} \begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}$ steht dann orthogonal zu $\vec{v}_0 = \frac{1}{|\vec{v}|} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$, dem normierten Geschwindigkeitsvektor. Die Richtungsänderung α je Zeiteinheit erhält man mit dem Skalarprodukt als Projektion der Beschleunigung auf den Geschwindigkeits-Normalenvektor: $\alpha \approx \vec{a}_0 \cdot \vec{v}_0^\perp$. Das Ergebnis teilt man durch den zurückgelegten Weg $|\vec{v}|$ und erhält (2).

5 Klothoiden diskret

Abb. 17b stützt die Modellvorstellung eines abschnittsweise linearen Krümmungsverlaufs: Das Lenkrad wird linear mit der Fahrstrecke nach rechts gedreht, kurz fixiert und anschließend wieder linear zurückgedreht.

- Welcher Track ergibt sich „theoretisch“ aus dieser Modellvorstellung?
- Wie gut passt dieser dann zur gefahrenen Realität?ⁱⁱ

Diese Fragen lassen sich mit einer Tabellenkalkulation durch eine Modellrechnung in den Spalten K-M wie folgt beantworten: Wir starten im ersten Messpunkt (L2; M2) = (C2; D2) in Startrichtung (K2=J2) und durchlaufen dann die 57 *gemessenen* Streckenstückchen „in Gedanken“ streng nach dem stückweise linearen Krümmungsmodell. Dabei ist die Trapezfläche durch den aus der Messung bekannten Gesamtdrehwinkel $\alpha=55.815^\circ$ festgelegt. Mit dem Regler „geradenende“ lässt sich über einen Index (hier geradenende = 6) die Position s_1 (= 23.92 m, vgl. Zelle B7) festlegen, in welcher der lineare Krümmungsanstieg (also der Lenkradeinschlag) beginnen soll. Mit kreisanfang und kreisende werden die Positionen s_2 und s_3 eingestellt, zwischen denen man auf einem Kreis fährt, geradenanfang regelt die Position s_4 , ab der im Modell wieder geradeaus gefahren werden soll. Die Trapezhöhe k (Krümmung des Kreises in °/m) ergibt sich aus der Trapezflächenformel

$$\alpha = \frac{k}{2} (s_4 - s_1 + s_3 - s_2) \cdot$$

Wie Abb.17a belegt, sind bei geeigneter Reglereinstellung die Abweichungen zwischen Modell und gefahrener Wirklichkeit vernachlässigbar klein.

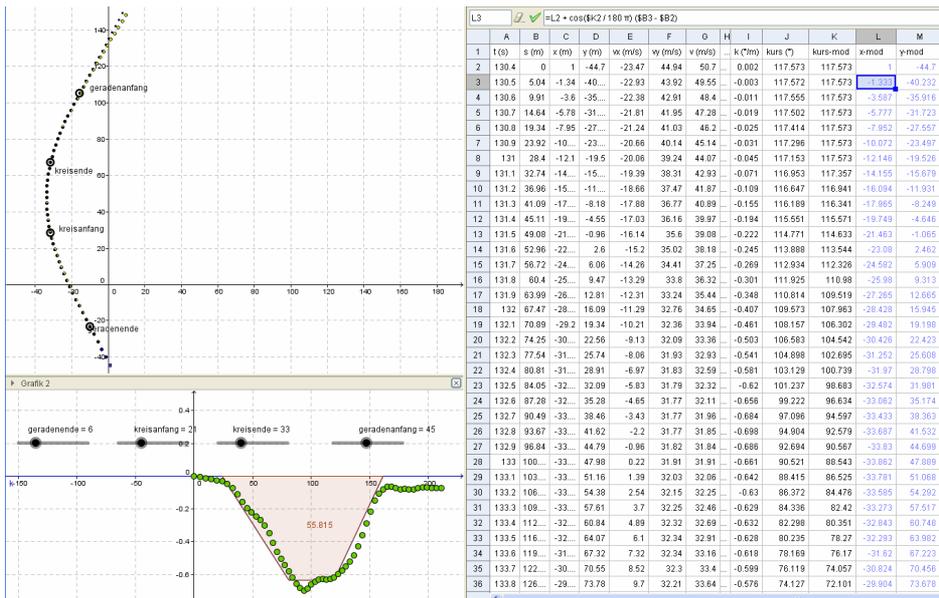


Abb. 17a, b/18: Diskrete Klothoide und reale Fahrspur decken sich. Die zum „modellhaften“ Übergang zwischen Gerade und Kreis gehörenden Daten zwischen 23.92 m und 80.81 m sind in der Tabelle Abb. 18 markiert. Die Datei ist im Download verfügbar.

Erläuterung zu Abb. 18: Die sich aus Spalte B ergebenden Wegstückchen $ds_i = s_{i+1} - s_i$ werden bei der Modellrechnung wie folgt verwendet:

- Position und Richtung des Modellkurses (Zellen K2, L2, M2) stimmen am Anfang mit den gemessenen Werten (C2, D2, J2) überein.
- Die stückweise lineare Modellkrümmung (Trapezgraph in Abb. 17b) wird als Funktion $k(s)$ definiert und führt zum in Spalte K tabellierten Kursverlauf $\alpha(s)$.
- Hieraus erhält man rekursiv die Modell-Positionen in den Spalten L und M über $x_{i+1} = x_i + ds_i \cdot \cos(\alpha(s_i))$ und $y_{i+1} = y_i + ds_i \cdot \sin(\alpha(s_i))$ (vgl. in Abb. 18 die Formel hinter der markierten Zelle L3).

Tatsächlich sind die Modellpositionen von den realen praktisch nicht zu unterscheiden. Erst am Ende driften Modell und Realität ein wenig auseinander, weil der Fahrer nach der Nordkurve - statt geradeaus zu fahren - die folgende sanfte Rechtskurve anzuschneiden beginnt, von der „das Modell aber noch nichts ahnt“. In GeoGebra geschieht der Abgleich zwischen Modell und Wirklichkeit über die Schieberegler „optisch“, wobei man die Abweichungen zwischen gemessenen und im Modell berechneten Positionen berechnen und minimieren kann. Das entsprechende analytische Modell findet sich in Abschnitt 7, wobei auch dort der gesamte Drehwinkel und der Krümmungskreis an eine unterlegte Karte bzw. den gefahrenen Track eingepasst werden. Daraus lassen sich die Übergangsbögen konstruieren.

6 Die Klothoide als stetiges Modell für Tracks und Straßenführungen

Kurven, die entstehen, wenn sich die Krümmung k linear mit dem zurückgelegten Weg s ändert, heißen Klothoiden. Sie sollen im Folgenden analytisch beschrieben und in GeoGebra gezeichnet werden. Dabei entsteht ein Werkzeug, mit dem man sowohl

- Straßen ideal trassieren als auch
- reale Straßen und gefahrene Tracks mit der Theorie vergleichen kann.

6.1 Theorie

Da die Krümmung $k(s)$ die Ableitung der Fahrtrichtung α nach der Strecke s ist, also $k(s) = \alpha'(s)$, erhält man die Fahrtrichtung durch Integration der Krümmung. Wenn letztere sich beim Einfahren in eine Kurve proportional zum zurückgelegten Weg ändert: $k(s) = c \cdot s$, ändert sich der Kurs quadratisch.

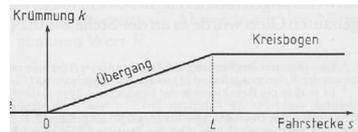


Abb. 19: Krümmungsband.

Man erhält $\alpha(s) = \alpha(0) + \frac{c}{2} \cdot s^2$.

Wenn man dann um das Wegstückchen ds voranschreitet, ändern sich die x - und y -Koordinaten um $dx = \cos(\alpha_0 + \frac{c}{2} s^2) \cdot ds$ bzw. $dy = \sin(\alpha_0 + \frac{c}{2} s^2) \cdot ds$.

Beim Start im Ursprung in Richtung x -Achse ($\alpha_0=0$) erhält man folglich die Positionskordinaten $P(x;y)$ in Abhängigkeit von der zurückgelegten Strecke s als Integrale

$$x(s) = \int_0^s \cos(\frac{c}{2} \cdot t^2) dt \quad \text{und} \quad y(s) = \int_0^s \sin(\frac{c}{2} \cdot t^2) dt$$

die man mit dem Klothoidenparameter $a = 1/\sqrt{c}$ (s. u.) üblicherweise wie folgt schreibt:

$$x(s) = \int_0^s \cos(\frac{1}{2a^2} \cdot t^2) dt \quad \text{und} \quad y(s) = \int_0^s \sin(\frac{1}{2a^2} \cdot t^2) dt$$

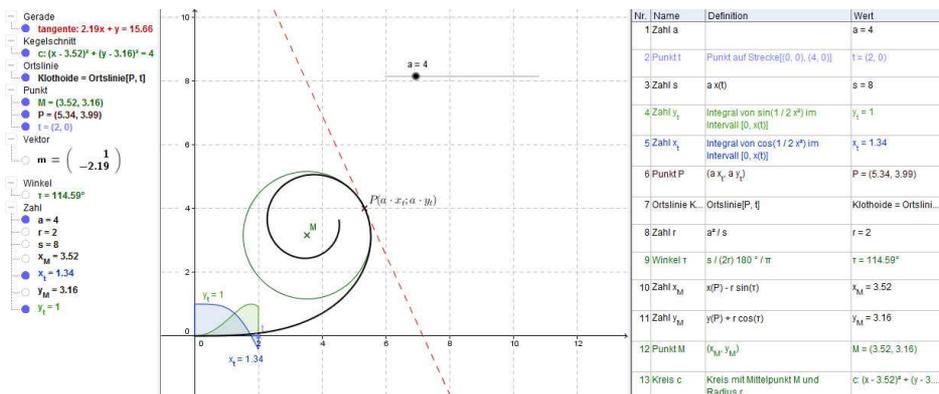


Abb. 20: Konstruktion einer Klothoide als Ortslinie mit numerischer Integration.

6.2 Der Klothoidenparameter a

Da bei Klothoiden die Krümmung k proportional zur Fahrstrecke wächst, verringert sich der Krümmungsradius $r=1/k$ umgekehrt proportional zur Fahrstrecke s . Das Produkt $r*s$ aus Krümmungsradius und Fahrstrecke ist konstant. Man bezeichnet die Konstante aus Dimensionsgründen mit a^2 und nennt a den Klothoidenparameter.

Wenn man beim Kurvenfahren nach $8m$ z. B. den Krümmungsradius $2m$ erreicht hat, entspricht das dem Parameter $a = \sqrt{16m} = 4m$ (vgl. Abb. 20). Beim Fahren von U-Turns mit dem PKW sind Parameter der Größenordnung $a = 10m$ realistisch.

6.3 Mit der „Einheitsklothoide“ hat man alle

Der tiefere Sinn dieses Parameters a ergibt sich aus folgender Überlegung: Wenn man eine Klothoide mit Punkt P (z. B. vom Ursprung aus) um den Faktor k zentrisch streckt, vergrößern sich die Fahrstrecke bis zum Punkt P' und der Krümmungsradius in P' ebenfalls um den Faktor k . Da sich an der Proportionalität zwischen Weg s und Krümmung nichts ändert, erhält damit wieder eine Klothoide, deren Parameter sich ver- k -facht hat. Somit entsteht jede Klothoide aus einer „Einheitsklothoide“ durch zentrische Streckung mit a als Streckfaktor.

Das nutzt man in der GeoGebra-Konstruktion von Abb. 20 wie folgt aus: Zunächst werden in Abhängigkeit von einer variablen Obergrenze t die Koordinaten x_t und y_t eines „Einheits-Klothoidenpunktes“ durch numerische Integration der abgebildeten trigonometrischen Funktionen bestimmt. Dieser Punkt wird vom Ursprung aus mit Faktor a zentrisch auf P gestreckt. Wegen der Abhängigkeit vom Parameter t erzeugt P über den Ortslinienbefehl dann eine Klothoide als Objekt, deren Koordinaten man durch Verschieben von P auch ausmessen kann.

6.4 Es geht auch anders ...

Alternativ zur numerischen Integration erhält man Klothoiden über Reihenentwicklungen der trigonometrischen Funktionen, wobei wenige Summanden ausreichen [Gloggengiesser 1999]:

$$x(s) = \int_0^s \cos\left(\frac{t^2}{2a^2}\right) dt = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i)!(4i+1)} \cdot \frac{s^{4i+1}}{(2a^2)^{2i}}$$

$$y(s) = \int_0^s \sin\left(\frac{t^2}{2a^2}\right) dt = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!(4i+3)} \cdot \frac{s^{4i+3}}{(2a^2)^{2i+1}}$$

In GeoGebra konstruiert man auf diese Weise die Klothoide nicht als Ortslinie, sondern als parametrisierte Kurve. Abb. 21 zeigt, wo man nach sich nach Durchlaufen der Strecke $s=1,5$ (Schieberegler s) auf der Einheitsklothoide (Schieberegler $a=1$) befindet.

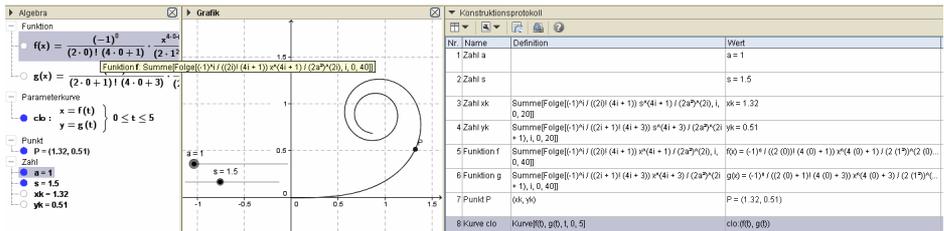


Abb. 21: Konstruktion einer Klothoide als parametrisierte Kurve mit Reihenentwicklung.

7 Das ‘‘Klothoidenlineal‘‘ iii

Wenn man einen Kreisbogen mit zwei Klothoidenbögen so zusammensetzt, dass an den Anschlussstellen die Krümmungsradien übereinstimmen, erhält man ‘‘ideale Fahrspuren‘‘ mit trapezförmigen Krümmungsgraphen. Abb. 22. zeigt als Beispiel eine solche Spur für einen U-Turn mit einer Drehung um 180°.

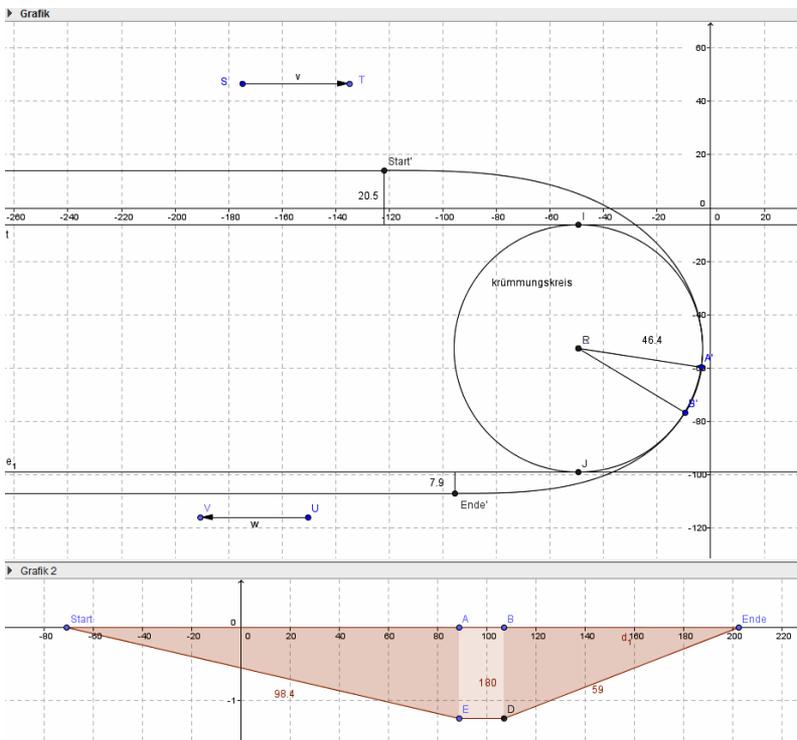


Abb. 22: Modellhafter U-Turn aus einem Klothoidenbogen Start→A’ mit Parameter a=85.9 m, einem Kreisbogen A’→B’ mit Radius 46,4 m und einem zweiten Klothoidenbogen B’→Ende mit Paramter a=66,5m . Der gesamte Drehwinkel 180° ist am Krümmungstrapez als Fläche abzulesen. Die Winkel (98,4° und 59°), um die man sich auf den Klothoidenbögen dreht, findet man als Dreiecksflächen wieder. Würde man ohne Übergangsbögen mit einem Krümmungsruck direkt in diesen Krümmungskreis einfahren, so könnte man hier 20,5 m und beim Ausfahren 7,9 m an ‘‘Spurversatz‘‘ einsparen.

In Abb. 22 kam das klothoidenlineal.ggb zum Einsatz, das mit Hilfe der Maus ideale Straßen - Tracks zeichnet. Man kann das Werkzeug wie folgt nachbauen:

- Zunächst werden Start- und die Zielrichtung des Modellkurses durch zwei Vektoren v und w festgelegt. Durch Ziehen an den Punkten S , U sind die Vektoren verschieb- und durch Ziehen an T bzw. V drehbar. Die beiden Richtungen bestimmen den gesamten Drehwinkel, also die Fläche des Krümmungstrapezes.
- Dann wird der gewünschte Krümmungskreis durch die verschiebbaren Punkte
 A' : hier endet der erste Klothoidenbogen, die Kreisbahn beginnt und
 B' : hier endet die Kreisbahn, der zweite Klothoidenbogen beginnt und
 R : Mittelpunkt des Krümmungskreises festgelegt.
- Durch den Krümmungsradius r kennt man die Höhe des Krümmungstrapezes. Durch Vergleich der Richtungen der Kreistangenten in A' und B' mit Start- und Zielrichtung bestimmt man die Winkel, um die man sich auf den Klothoidenbögen dreht. Das sind die Dreiecks-Teilflächen im Krümmungstrapez.
- Da der Krümmungsradius bekannt ist, lassen sich die Längen s der Klothoidenbögen (die man im unteren Teil der Abbildung als Strecken Start-A und B-Ende wieder findet) und deren Parameter bestimmen. Sie werden nach Abschnitt 6 als Kurven (oder Ortslinien) gezeichnet und durch Verschieben und Drehen zur Fahrspur zusammengesetzt.
- Zum Vergleich liefert die Datei auch die Fahrspur, die sich ergeben würde, wenn man gemäß Abschnitt 2 Tangenten an den Krümmungskreis in Start- und Zielrichtung legt.

Wenn man im Grafikfenster die *Satellitenkarte* einer Straßenführung hinterlegt, lässt sich *nach Augenmaß* prüfen, wie gut die Realität mit der Modellkonstruktion zusammenpasst.

Liegt die Informationen (wie in Abb. 23) als *GPS-Track* auch digital vor, dann kann man die Abweichungen zwischen Modell und Track auch numerisch erfassen und *minimieren*. Dazu wählt man den Krümmungskreis so, dass er durch drei an den Track gebundene Punkte A' , P , B' verläuft. In Verbindung mit Anfangs- und Endrichtungen ist dadurch der Modelltrack festgelegt. Nun geht man von dem Trackpunkt A' , der *exakt* auf der Modellkurve liegen soll, *auf der Modellkurve* die *gemessenen* Wegstückchen in beide Richtungen und enthält Modellpunkte, deren Abstände von den zugehörigen gemessenen Punkten man summieren und durch Variation von A' , P und B' auch minimieren kann. In der Kurve aus Abb. 23 (Autobahnkreuz Köln Süd) liegt bei ca. 120 Messpunkten der mittlere Abstand zwischen Mess- und Modellpunkten deutlich unter 0,2m!

Der Versatz zwischen Klothoidenbahn und Krümmungskreis-Tangenten-Modell beträgt hier beim Einfahren in die Kurve 2,60m, beim Ausfahren 1,02m, liegt also in der Größenordnung der Fahrzeugbreite. *Damit bestätigt sich, dass man auch auf Straßen, die sich aus Kreisen und Tangenten zusammensetzen, wegen ausreichender Straßenbreite vernünftige Klothoidentracks fahren kann.*

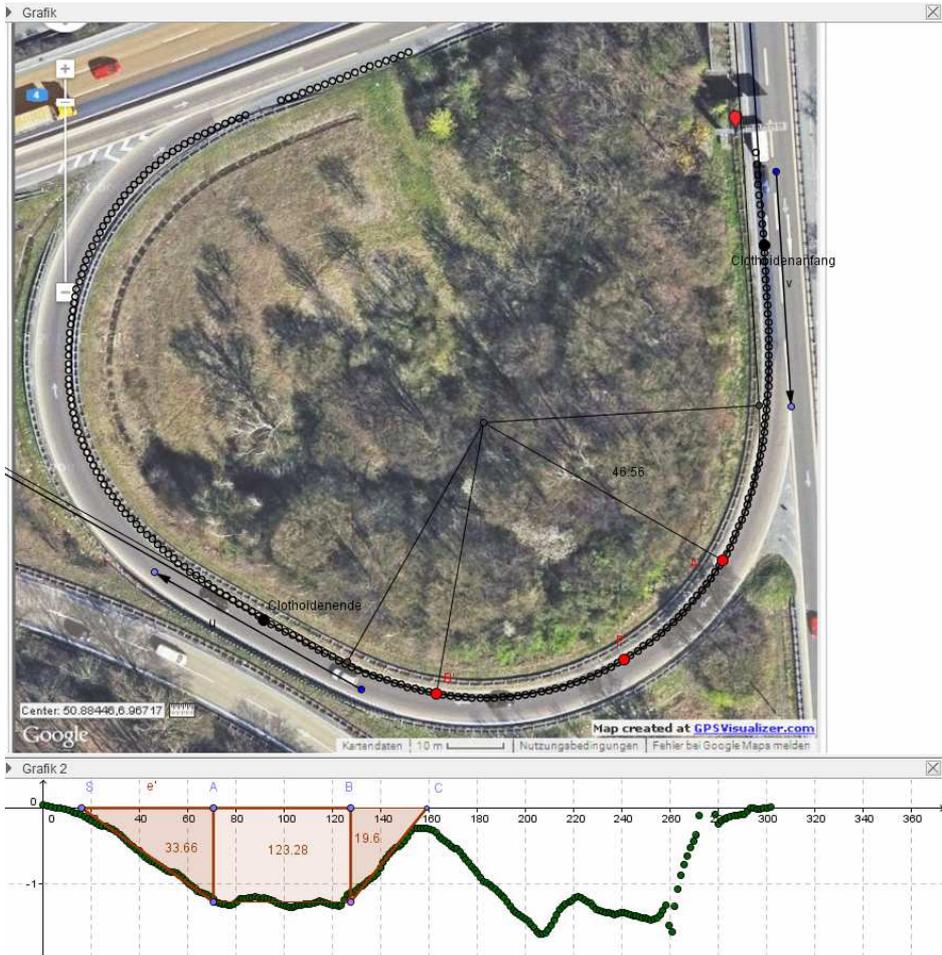


Abb. 23: Erster Teil einer Schleife im Autobahnkleblatt Köln Süd mit Krümmungsradius 46.56 m und Rechtsdrehung um 123.28° . Die Trackpunkte (Kringel) passen ausgezeichnet zu den durchgezeichneten Klothoidenbögen (mit Parametern $a=50.5\text{m}$ und $a=38.5\text{m}$). Das gilt auch für den Trapezgraphen, der sehr gut zu dem gemessenen Krümmungsgraphen passt. Zum Vergleich mit dem Klothoidenmodell wurden die Tangenten gezeichnet, die den Krümmungskreis in den vorgegebenen Fahrtrichtungen berühren. Der Versatz mit ca. 2,6m und 1,0m im Bereich der Fahrzeugbreite.

Rückblick

Satellitenkarten bieten in Kombination mit GPS-Daten und digitalen Werkzeugen wie GeoGebra Chancen, Realität ins Klassenzimmer zu holen, von denen man bis vor wenigen Jahren nur träumen konnte. Wer *erlebte* Lenkradbewegungen und *gefühlte* Querbeschleunigungen als Datensätze und Graphen in einer Tabellenkalkulation wieder gefunden, mit Geometrie, Analysis und Vektorrechnung analysiert und Zusammenhänge *verstanden* hat, für

den ist Mathematik im Winter'schen Sinne als sinnstiftend erfahrbar geworden, weil sie gestattet, die Welt *aus einer anderen Perspektive* wahrzunehmen. In der Tat gibt es jenseits der eingekleideten Aufgaben Mathematik zu entdecken, die viel mehr mit der Wirklichkeit zu tun hat als man zunächst glauben möchte.

Anhang: Warum Autos keine Polynome mögen

Wie schon im Abstract erwähnt wird mit eingekleideten Steckbrief-Polynomen wie in Abb. 3 weder „kritischer Vernunftgebrauch“ gefördert noch Modellierungskompetenz. Man kann aber den Spieß herumdrehen (... die Perspektive wechseln...) und untersuchen, *wie gut* das Polynom-Modell zur Realität passt. Die Mathematik, die dabei zum Einsatz kommt, ist die gleiche. Statt also die Nordkurve so nach rechts zu drehen, dass der Trackanfang auf die x-Achse wandert, untersuchen wir, *wie* das Steckbriefpolynom von der Lage des Koordinatensystems *abhängt* und erzeugen so die Einsicht, dass Polynome zur *globalen*^{iv} Beschreibung von Straßentrassen ungeeignet sind.

Aufgabe: In Abb. 24a wurde das Koordinatensystem auf dem Hockenheimring so gelegt, dass sich der Track der Nordkurve als Funktionsgraph deuten lässt. Er hat in A(-43,9;-8,6) die Steigung $m=0,76$ und in B(316,1;-77,6) die Steigung $m=-0,66$. Dabei dient der in Abb. 23 „oben rechts“ sichtbare Startpunkt als Ursprung.

- Bestimmen Sie ein Polynom vom
 - Grad 3, das in A und B gleiche Funktions- und Steigungswerte hat wie der Track,
 - Grad 5, das in A und B (genau wie der Track selber) zusätzlich die Krümmung 0 hat.
- Lage des Koordinatensystems: Wenn man den Track um den Koordinatenursprung dreht, verändern sich die Koordinaten der Punkte A, B und die zugehörigen Steigungswerte. Untersuchen Sie, wie die Polynom-Fahrspuren von der Wahl des Koordinatensystems abhängen.
- Vergleichen Sie die Krümmungsdiagramme für die Polynom Fahrspuren mit dem Krümmungsdiagramm des realen Tracks.
- Beurteilen Sie die Qualität der Modellierung von GPS-Tracks durch Polynome.

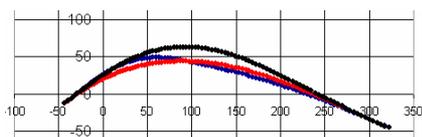


Abb. 24a: Track in der Nordkurve um $80,2^\circ$ gedreht (mitte) und Modellfunktionen vom Grad 3 (unten) und 5 (oben).

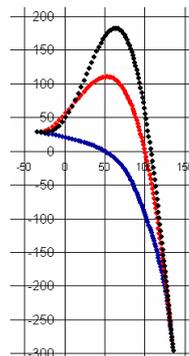


Abb. 24b: Track in der Nordkurve (unten) um $131,8^\circ$ gedreht mit Graphen der Modellfunktionen vom Grad 3 (mitte) und 5 (oben).

Literatur

- Böer, Heinz [2005]: Autobahnkreuz Münster Süd: ml **130** (2005), 59-63.
- Lambert, Anselm & Peters, Uwe [2005]: Straßen sind keine Splines. In: Herget, Wilfried & Hischer, Horst & Lambert, Anselm (Hrsg.): Mathematikdidaktik für den Unterricht. *mathematica didactica* 28 (2005) 23-43.
- Bauer, Thomas & Gromes, Wolfgang & Partheil, Ulrich [2015]: Mathematik verstehen von verschiedenen Standpunkten aus - Zugänge zum Krümmungsbegriff: Mathematik im Übergang Schule/Hochschule, Uni Marburg.
- Gloggenjessner, H.: Gleis- und Straßenbau in der 11. Klasse mit Hilfe des Computers. MNU **52** (1999), 498-499.
- Henn, Hans-Wolfgang [2014]: Nicht so schnell in die Kurve: ml **187** (2014) 20-23.
- ImSiecke, Nikolas [2014]: Wie genau folgt die Kurvenfahrt eines Autos einer Klothoiden? Bachelorarbeit, ZfL Bonn (Bearbeiter: Rainer Kaenders).
- Kirsch, Arnold [1997]: Übergangsbögen bei Eisenbahngleisen. MNU **50** (1997), 144-150.
- Neveling, Rolf: Krümmung von Graphen.
<http://www.brd.nrw.de/lerntreffs/mathe/pages/magazin/geschichten/krueimmung.pdf>.
- Pallack, Andreas: Mit CAS zum Abitur [2006], Westermann/Schroedel, Braunschweig. 52-64.
- Riemer, Wolfgang [2013]: GPS-Daten aufbereiten – eine Gebrauchsanweisung. PM 53 (2013) 36-38.

Die Dateien zu den Abbildungen 3, 4 (Hockenheimring) und 20-23 sind auf den Webseiten der Autoren verfügbar.

Autoren

Dr. Wolfgang Riemer, ZfSL Köln, Claudiusstr. 1, 50678 Köln, w.riemer@arcor.de,
 Gründungsmitglied des GeoGebra-Instituts Köln-Bonn. www.riemer-koeln.de.
 Reinhard Schmidt, ZfSL Engelskirchen, Hindenburgstr. 28, 51766 Engelskirchen, schmidt@mathe-nrw.de,
 Leiter des GeoGebra-Instituts Köln-Bonn. <http://www.fachseminar-mathematik.de>

Anmerkungen

- ⁱ Vielleicht ging in die Überlegung des Gesetzgebers die Höhe des Schadensrisikos ein, das mit der Geschwindigkeit wächst. Und da wollte er durch geringere Querbeschleunigungen auf der sicheren Seite sein. Dazu passen auch die 235 km/h als Maximalgeschwindigkeit auf geraden Strecken.
- ⁱⁱ Der in Abb. 12 im „Kreismodell „prognostizierte“ Krümmungsradius“ $r = 123\text{m}$ hält dem Vergleich mit der Realität nicht Stand. Das Renntaxi fährt im Scheitel gemäß Abb. 14 einen Krümmungsradius von ca. 84m. In der Tat passt der Kreis mit $r=123\text{m}$ nur dann in die Rennstrecke hinein, wenn man von der Geraden mit Krümmung 0 direkt auf eine Kreisbahn mit Krümmung $k=0,43 \text{ 1/m}$ wechseln könnte - und das ist nur auf der Modelleisenbahn, nicht aber auf dem Hockenheimring möglich.
- ⁱⁱⁱ Der Dateiname Klothoidenlineal soll an das klassische Kurvenlineal erinnern.
- ^{iv} Dass (im Gegensatz zu globalen) lokale Beschreibungen von Straßen durch Polynome (nicht zuletzt wegen des Satzes von Taylor) zu sinnvollen Ergebnissen führen können, wenn man authentische Daten sorgfältig aufbereitet (und nicht einkleidet), zeigen z. B. Kirsch [1997] und Böer [2005].