

# Bewusster S-Bahn fahren – eine mathematische Exkursion

WOLFGANG RIEMER – KATJA LÖHR

»Man sieht nur, was man weiß« (GOETHE) – Viele Phänomene des Alltags fallen uns erst auf, wenn wir genügend Hintergrundinformation über sie besitzen. Genau das passiert, wenn Schüler/innen Aufgaben zu Geschwindigkeitsprofilen nicht nur durchrechnen, sondern anschließend mit einem GPS-Tacho auch messend nachfahren: Geradensteigungen als gefühlte Beschleunigungen, Polygonflächen als zurückgelegte Wegstrecken gewinnen dadurch eine neue »Erlebnisqualität«. Gute Lokführer fahren nämlich stückweise lineare Geschwindigkeitsgraphen – und das merkt man sehr genau, wenn man es weiß. Nach der in diesem Beitrag beschriebenen Exkursion werden Schüler/innen »durch die Brille der Theorie« schauen, wenn sie S-Bahn fahren. Sie kann im Rahmen der Differentialrechnung auch genutzt werden, das beliebte »Modellieren« von Bewegungen durch ganzrationale Funktionen kritisch zu hinterfragen.

## 1 Einleitung

»Typisch! Wieder so eine eingekleidete Kontextaufgabe mit glatten Ergebnissen«. Genau diesen »ersten Eindruck« hinterlässt die Bewegungsaufgabe 1 aus der Kopiervorlage 1.

Verstärkt wird der Eindruck dadurch, dass diese Aufgabe aus dem Kapitel »stückweise lineare Funktionen« eines Schulbuchs (WEIDIG, 2000) stammt. Hätte sie nicht genauso gut im Kapitel »Polynome« stehen können – oder bei »Exponentialfunktionen«?

Dann hätte man die S-Bahnfahrt vermutlich durch ein Polynom oder eine Exponentialfunktion »modelliert«. Daran haben wir uns im Zuge der »kontextorientierten Zentralprüfungskultur« mittlerweile mit »Grummeln im Magen« gewöhnen müssen (vgl. RIEMER, 2013a). Wie der FAZ-Artikel (Kopiervorlage 1) belegt, wurde die Schulbuchaufgabe aber tatsächlich mit Sachverstand formuliert. Sie bietet die Chance, beim Durchrechnen nicht nur (innermathematische) Kompetenzen im Umgang mit linearen Funktionen zu schulen, sondern beim experimentellen Prüfen im Sinne der ersten WINTER'schen Grunderfahrung auch etwas über »die Welt da draußen« in Erfahrung zu bringen. – Nur sieht man ihr das auf den ersten Blick gar nicht an.

## 2 Mathematische Exkursion

GPS-Empfänger zeigen Tracks, Wegstrecken und Geschwindigkeiten nicht nur an (vgl. die Screenshots in der Kopiervorlage), sie speichern diese auch ab. So kann man reale Geschwindigkeitsprofile konstruierten Funktionsgraphen gegenüberstellen und Modell- und Realitätsebene gegeneinander abgrenzen (RIEMER, 2013b). Wie Abb. 2 zeigt, lassen sich S-Bahn-Fahrten auf freien Strecken ohne Weichen tatsächlich ausgezeichnet durch stückweise lineare Funktionen beschreiben. Solche Strecken bieten dem



Abb. 1. Die S13 verkehrt zwischen Düren und Troisdorf

Lokführer wenige Überraschungen und ermöglichen – anders als beim Autofahren – lange Phasen mit konstanten Beschleunigungen, also linear zunehmenden Geschwindigkeiten. Aber auch die Verwendung authentischer Daten würde für Schülerinnen und Schüler nichts daran ändern, dass man »nur eine Matheaufgabe« löst. Erst wenn man mit der Lerngruppe im Rahmen einer Exkursion tatsächlich die S-Bahn besteigt und im Sinne des GOETHE-Zitats die Realität mit den Augen der Theorie »sieht«, ändert sich das.

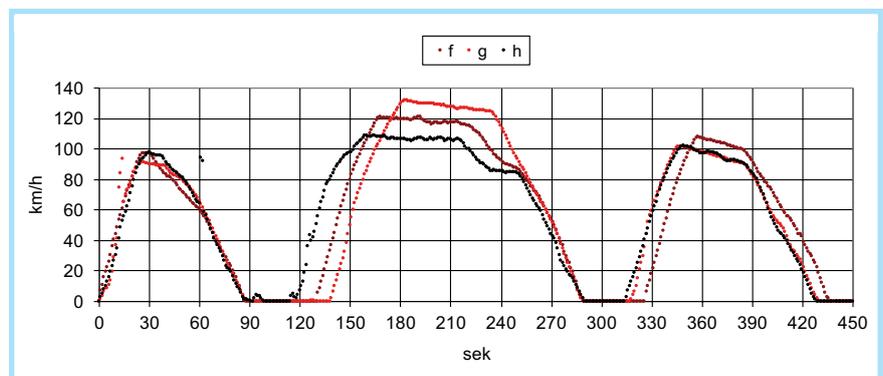


Abb. 2. Geschwindigkeitsprofile dreier S-Bahnen der Linie S13 (s. Abb. 1) zwischen Köln Weiden-West und Köln Ehrenfeld

# Mit GPS S-Bahn fahren: Eine mathematische Exkursion

## I Vorbereitung

Energiesparend zu fahren heißt, möglichst weit vorausschauend zu fahren. Im Training lernen die Lokführer, schon kurz vor dem Erreichen einer Bergkuppe das Gas wegzunehmen und anschließend bergab den Schwung zu nutzen oder mit Vollgas anzufahren. Messungen haben es belegt: Je schneller die Höchstgeschwindigkeit erreicht wird, desto mehr Energie kann später eingespart werden. Und hat ein Zug erst einmal seine Höchstgeschwindigkeit erreicht, kann er über weite Strecken rollen und verliert dabei nur wenig an Tempo. Hielscher nennt ein Beispiel. »Wenn du von Stuttgart Richtung Mannheim fährst, kannst du schon 50 Kilometer vor Mannheim die Leistung abschalten und rollst noch immer exakt nach Fahrplan in den Bahnhof ein.«

Quelle: FAZ vom 26.07.2008

### Aufgabe 1

- a) Triebwagenzüge von U- und S-Bahnen fahren besonders wirtschaftlich, wenn sie in einer Anfahrphase konstant beschleunigt werden, dann ausrollen und schließlich abgebremst werden. In diesem Fall kann die Geschwindigkeit  $v$  in Abhängigkeit von der Zeit  $t$  durch eine stückweise lineare Funktion beschrieben werden mit z. B.

$$v(t) = \left. \begin{array}{ll} 3,6 t & \text{für } 0 \leq t < 20 \text{ (Anfahrphase)} \\ -0,2 (t - 20) + 72 & \text{für } 20 \leq t < 30 \text{ (Ausrollphase)} \\ -4 (t - 30) + 70 & \text{für } 30 \leq t \text{ (Bremsphase)} \end{array} \right\} \text{ mit } t \text{ in Sekunden und } v \text{ in } \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Zeichne den Graphen der Funktion  $t \rightarrow v(t)$ .

Lies ab und berechne anschließend genau, nach wie vielen Sekunden die S-Bahn wieder hält.

- b) Erläutere anhand konkreter Zahlen, dass die Faktoren 3,6; -0,2 und -4 die Bedeutung von Beschleunigungen haben, die angeben, um wie viele km/h die Bahn *in jeder Sekunde* schneller bzw. langsamer wird.
- c) Berechne mithilfe von Dreiecks- bzw. Trapezformeln die Strecken, die die S-Bahn während der drei Phasen zurücklegt.
- d) Stelle Vermutungen an, woran man beim S-Bahnfahren spüren kann, dass man sich an einer Knickstelle des Geschwindigkeitsgraphen befindet.
- e) Zusatz: Aufgrund einer Verspätung beschleunigt der Lokführer 24,5 s lang und bremst dann sofort ab. Zeichne den zugehörigen Graphen ein und lies ab, wie viele Sekunden der Zeitgewinn bis zum Halt etwa beträgt.

## II Exkursionsanleitung (S-Bahn fahren zwischen zwei Haltestellen)

Wenn man beim S-Bahn Fahren darauf achtet, kann man Beschleunigungs-, Roll- und Bremsphasen gut voneinander unterscheiden, nicht nur am Fahrgeräusch, sondern (mit Ohrenstöpseln und geschlossenen Augen) auch am Druck, mit dem man in den Sitz »gepresst« oder aus dem Sitz »gehoben« wird bzw. an der Kraft, mit der man sich festhalten muss.

In dieser Exkursion erhältst du Gelegenheit, mit einem GPS-Empfänger oder einer entsprechenden Smartphone-App zu prüfen, ob bzw. wie gut sich der Geschwindigkeitsverlauf in Beschleunigungs-, Roll- und Bremsphasen tatsächlich durch lineare Funktionen beschreiben lässt – und wie realistisch die in Aufgabe 1 angegebenen Beschleunigungs- und Bremswerte (3,6 km/h je Sekunde, -0,2 km/h je Sekunde und -4 km/h je Sekunde) tatsächlich sind. Dabei erfährst du, wie sich diese Steigungswerte beim Fahren »anfühlen« und erkennst, dass es auch weniger perfekte Lokführer gibt, die beim Bremsen Rollphasen einbauen oder beim Beschleunigen nach einem Halt nicht durchgängig Vollgas geben.

### Fahrprotokoll/Arbeitsaufträge

Ihr teilt eure Klasse in Siebenergruppen (Techniker, Chef, 5 Beobachter), die sich auf verschiedene Wagen verteilen, damit ihr unabhängig voneinander messen könnt.

Der **Techniker** jeder Gruppe sorgt (schon vor Besteigen der S-Bahn, damit man ein gutes GPS Signal bekommt) dafür, dass ein GPS-Track aufgezeichnet wird, indem er auf dem Bahnsteig die Spuraufzeichnung des Geräts aktiviert. Er stellt Dauerbeleuchtung ein, so dass der Screen des Gerätes nicht dunkel wird. Er hält das Gerät für alle sichtbar. Am Ende sichert er den Track und stellt ihn allen zur Verfügung. Falls das GPS-Gerät es erlaubt, macht der Techniker zu den vom Gruppenchef benannten Zeitpunkten Screenshots.

Der **Gruppenchef** hat eine zentrale Aufgabe, da er der gesamten Gruppe Signale gibt. Er sorgt für absolute Konzentration seiner Gruppe, während die Bahn noch steht. Er gibt bei jeder gefühlten Veränderung der Fahrweise (Bahn steht, Lokführer gibt Gas, Bahn rollt aus, Bahn wird abgebremst), ein vorher verabredetes Signal, z. B. einen kleinen Pfiff. Dies ist für alle Beobachter das Zeichen, jetzt Wahrnehmungen zu protokollieren oder Messwerte zu erfassen. Die Beobachter einer jeder Gruppe platzieren sich dabei um den jeweiligen Techniker herum, der das jeweilige GPS-Gerät zum Ablesen der Daten bereithält.

**Beobachter 1** notiert in Spalte 2 des Protokollbogens jeweils sekundengenau die verstrichene Gesamtzeit zu dem Zeitpunkt, zu dem der Chef das Signal gibt.

**Beobachter 2** notiert in Spalte 3 einen Buchstaben [S (Stehen), G (Gas geben), R (Rollen), B (Bremsen)], der symbolisiert, welche Bewegung (z. B. Rollen) nun beginnt. Dabei zählen Schlingern, Rumpeln über Weichen etc. nicht, nur Geschwindigkeitsänderungen.

**Beobachter 3** notiert die auf dem GPS-Gerät aktuell angezeigte Geschwindigkeit.

**Beobachter 4** notiert bisher zurückgelegte Wegstrecke in km.

**Beobachter 5** versucht *sofort nach* dem Signal des Gruppenchefs am GPS-Tacho abzulesen, um wie viel km/h sich die Geschwindigkeit je Sekunde verringert/vergrößert. Eventuell helfen Geschwindigkeitsnotizen im Sekundenabstand, um den Wert nachträglich zu berechnen.



### Fahrtenprotokoll

	<b>Beobachter 1:</b> Verstrichene Zeit zum Zeitpunkt des Signals (sekundengenau)	<b>Beobachter 2:</b> Fahrweise Jetzt beginnt das ... S: Stehen G: Gas geben R: Rollen B: Bremsen	<b>Beobachter 3:</b> Geschwindigkeit zum Zeitpunkt des Signals (km/h)	<b>Beobachter 4:</b> Strecke zum Zeitpunkt des Signals (km)	<b>Beobachter 5:</b> Beschleunigung kurz nach dem Signal (km/h je s)
Start					
1					
2					
3					
4					
5					

Kopiervorlage 2. Exkursionsanleitung (S-Bahn fahren zwischen zwei Haltestellen)

### III Auswertung

- Überträgt das Fahrprotokoll sauber ins Heft, wobei man durch Sichten der Screenshots ggf. nachträglich korrigieren oder ergänzen kann.
- Tragt zunächst die Zeit-Geschwindigkeits-Punkte ins Koordinatensystem ein. Zeichnet dann mithilfe dieser Punkte den Graphen.
- Zeichnet mithilfe von [www.gpsvisualizer.com](http://www.gpsvisualizer.com) (oder Excel) das Zeit-Geschwindigkeitsdiagramm, das zum aufgezeichneten Track gehört. (Ggf. können das auch die Techniker der einzelnen Gruppen parallel erledigen).
- Berechnet mithilfe von Flächenformeln die Längen der zugehörigen Teilstrecken. Notiert die Abweichungen von den gemessenen Werten.
- Bewertet gemeinsam, wie gut man aus gefühlter Beschleunigung und punktuell gemessenen Geschwindigkeiten den gesamten Graphen rekonstruieren kann.
- Vergleicht eure Geschwindigkeitsgraphen mit dem Graphen aus Aufgabe 1. Vergleicht auch die gemessenen Beschleunigungen mit den Angaben aus Aufgabe 1. Haltet ihr die in Aufgabe 1 gemachten Angaben vor dem Hintergrund eurer Erfahrungen für realistisch?

### IV Ergänzung für die Einführungsphase (EF: Klasse 10/11)

Wenn man in der EF mit Polynomen arbeitet, versucht man zur Vorbereitung zentraler Prüfungen im Kontext von Steckbriefaufgaben mitunter, das Weg-Zeit-Diagramm der Fahrt zwischen zwei Haltestellen durch ein Polynom dritten Grades mit horizontalen Tangenten im Start- und Stopp-Zeitpunkt zu »modellieren«. Begründe, warum dieser Modellierungsversuch inhaltlich wenig sinnvoll ist.

Kopiervorlage 3. Auswertung und Ergänzung

## 3 Grundvorstellungen

Der Zeit-Geschwindigkeits-Kontext ist für die Oberstufenmathematik ein zentraler Sachzusammenhang, der immer wieder herangezogen wird, um Konzepte und Begriffe wie Änderungsrate, Ableitung und Integralfunktion (zur Rekonstruktion von Größen aus Änderungen) Sinn stiftend zu verankern. Er bietet damit enormes Potential zum Aufbau von Grundvorstellungen. Damit diese Vorstellungen langfristig »tragen«, bedarf es zuvor des bewussten Aufbaus durch Antizipieren, Erfahren und Reflektieren. Dies erfordert, die Wahrnehmung bei der Exkursion auf die entscheidenden Parameter zu lenken, um anschließend »Erlebnis« und Daten/Grafiken miteinander in Beziehung setzen zu können.

## 4 Beobachtungsaufträge

Der Erfolg einer solchen Exkursion steht und fällt daher mit den Beobachtungsaufträgen und damit, dass jeder einen Beitrag zum Gelingen des Ganzen beisteuern muss. Das ist das Anliegen der Kopiervorlage. Das Durchrechnen der Aufgabe 1 liefert den mathematischen Rahmen, also gewissermaßen die Brille, durch

die man während der Exkursion hindurchschaut. Man nutzt sie, um vorab Fragen, Vermutungen, Wahrnehmungs- und zu messende Parameter für die Exkursion zu generieren:

- Ist die Modellierung durch stückweise lineare Funktionen wirklich angemessen?
- Falls ja: Wie müsste es sich anfühlen, wenn die Geschwindigkeit für einen Zeitraum linear ansteigt bzw. fällt? Woran würde man die »Knickstellen« beim Fahren erkennen?
- Welche Parameter sollten auf der Fahrt erhoben werden, um diese Fragen zu beantworten?

Bei dem Protokollierungsauftrag 2 ist es immer wieder höchst erstaunlich, wie genau man die Knickstellen im Geschwindigkeitsgraphen zeitlich lokalisieren kann, wenn der Lockführer »Gas gibt«, »auskuppelt« oder die Bremsung einleitet.

Die auf dem Empfänger im Sekundentakt gut zu beobachtende Linearität der Geschwindigkeitszu- bzw. Abnahme gemessen in der eingängigen Einheit »km/h je Sekunde« – für Schüler/innen liegen Welten zwischen den direkt ablesbaren »km/h je s« und dem eleganten »m/s<sup>2</sup>« – macht Beschleunigung sinnlich erfahrbar, insbesondere dadurch, dass man die Kraft, mit der man gegen den Sitz gedrückt wird, auch körperlich spürt. Es ersteht eine für den Matheunterricht seltene »Erlebnisquali-

tät«, die man in keinem Schulbuch abbilden kann. Es lohnt sich daher sehr, den Schritt in die Realität zu wagen, er zahlt sich aus und liefert einmal mehr die Chance, das zu realisieren, was in nahezu jeder Lehrplanpräambel zur ersten WINTER'schen Grunderfahrung zu lesen ist: Der Mathematikunterricht sollte ermöglichen, Erscheinungen der Welt um uns ... in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen.

## 5 Ein Tipp zum Schluss

Es empfiehlt sich, vor der eigentlichen Messung eine Probefahrt durchzuführen. Erfahrungsgemäß drücken Schaffner gleichermaßen neugierig wie schmunzelnd beide Augen zu, wenn eine Klasse einen geeigneten Streckenabschnitt zwecks »Lokführervergleichs« mit einer einzigen Fahrkarte auch mehrfach hin und zurück durchfährt. Nur gerade sollte die Strecke sein, ohne Weichen!

## Literatur

WEIDIG, I. (Hg.) (2000). Lambacher-Schweizer 11 (NRW): Klett Verlag, 98.

RIEMER, W. (2013a). Im ICE von Hamm nach Bielefeld – mit GPS und Google bekommt auch eine Prüfungsaufgabe »Pfiff«. In: ISTRON Neue Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht Bd. 1. Springer Spektrum 111–125.

RIEMER, W. (2013b). Mit Positionen rechnen – GPS im Matheunterricht nutzen: PM 53 34–37. [Hier findet man Tipps zum Einsatz von GPS-Empfängern und Smartphone Apps sowie zur Auswertung von GPS-Tracks].

Die Daten der drei S-Bahn Fahrten aus Abbildung 2 sind im Download zu diesem Artikel als Excel-Datei verfügbar.



KATJA LÖHR und Dr. WOLFGANG RIEMER, [Katja.Loehr@siegtal-gymnasium.de](mailto:Katja.Loehr@siegtal-gymnasium.de), [w.riemer@arcor.de](mailto:w.riemer@arcor.de), August-Bebel-Str. 80, 50259 Pulheim, arbeiten am Zentrum für Schulpraktische Lehrerbildung, Köln. ■