

Bewegungen mit GPS untersuchen

Grundvorstellungen der Analysis „erfahren“

LERNGRUPPE:	9.–12. Schuljahr
IDEE:	Mit GPS aufgezeichnete Bewegungen werden analytisch ausgewertet
THEMA:	Analysis
ARBEITSBLATT 1:	S-Bahnfahrten auswerten Teil I, S. 56 Online: S-Bahnfahrten Teil II/III
ARBEITSBLATT 2:	Sinusfunktion im Kreisverkehr, S. 57
ARBEITSBLATT 3:	Segelflug: Kuven im Raum, S. 57
MATERIAL:	GPS-Geräte, Computer/Internet
ONLINE-MATERIAL:	Tracks und Excel-Dateien unter www.mathematik-lehren.de Heft 160 auswählen
ZEITBEDARF:	etwa 4 Unterrichtsstunden und vorbereitende Messung; auch geeignet für Projektkurse/Facharbeit
WEITERES MATERIAL:	Unter www.riemer-koeln.de kann ein Stationenlernen mit Aufgaben und Tracks heruntergeladen werden.

Grundvorstellungen der Analysis entwickeln und vertiefen sich unter anderem beim Untersuchen von Bewegungsvorgängen: Die Geschwindigkeit v ist die Ableitung des Weges s und die Beschleunigung a die Ableitung der Geschwindigkeit v ($a = v' = s''$). In der Praxis hat aber kaum ein Schüler je seine eigene Geschwindigkeit tatsächlich gemessen – geschweige denn den Griff zur Haltstange der bremsenden S-Bahn mit dem „Buckel“ im Graphen der zweiten Ableitung s'' oder der Krümmung im Graphen von s in Verbindung gebracht. Die innermathematischen Begriffe und die Alltagserfahrungen „leben“ in unterschiedlichen subjektiven Erfahrungsbereichen, die miteinander kaum vernetzt sind.

Mit GPS-Empfängern¹ lassen sich diese mathematischen Begriffe nachhaltig verankern: Mittlerweile zeichnen die Geräte² Bewegungen sekundengenau so präzise auf (**Kasten 1**), dass sich die Fahrspuren „metergenau“ in Land-

karten (Google-Maps, Google-Earth) darstellen und mit Internetwerkzeugen oder Tabellenkalkulation grafisch und numerisch nach zurückgelegten Wegen, gefahrenen Geschwindigkeiten und Beschleunigungen auswerten lassen. Eine neue Dimension des Realitätsbezuges erschließt sich: Wer mit dem Navi im Verkehrskreisel die Sinusfunktion „erfährt“, wird sich an diese noch lange erinnern. Aber Vorsicht: Durch den Einsatz von GPS wird die Analysis spannender und sinnvoller, nicht einfacher!

Unterrichtsorganisation

Der Analysisunterricht mit GPS lebt von selbst aufgenommenen Fahrspuren. Bevor es „hinausgeht“, muss man jedoch wissen, was es zu messen gilt. Insbesondere muss auch der Übergang von der (messbaren) mittleren zur (nur im Modell berechenbaren) Momentangeschwindigkeit als „Akt der Modellbildung“ bewusst gemacht werden. Wie man die verwendeten Tracks aufzeichnet und auswertet, können – nach einer kurzen Vorbereitungszeit – auch einzelne Schüler exemplarisch vorführen.³ Manche haben auf ihrem Handy schon einen GPS-Empfänger, der nach Installation des freeware-Programms „kdr-tracker“ auch Spuren im Sekundenabstand aufzeichnen kann.

Die Messungen und Auswertungen müssen nicht notwendig während der Unterrichtszeit stattfinden. Genauso gut eignet sich eine Langzeit-Aufgabe, in der die Jugendlichen eigene Ideen (Radeln, Sprinten, Bahnfahren, Reiten, Drachenfliegen ...) entwickeln.⁴ Dabei können sie Landkarten und Funktionsgraphen mit Internet-Tools erstellen. Etwas anspruchsvoller ist die Auswertung über die Tabellenkalkulation:

Man berechnet Geschwindigkeiten und Beschleunigungen als mittlere Änderungsraten und vergleicht sie – beim Sprinten und Bremsen – mit quadratischen und linearen Modellen.

Bei der Würdigung der Arbeitsergebnisse empfiehlt sich ein sensibler Blick auf die einzelnen Schülerpersönlichkeiten. Es gibt Schüler, die souverän mit Tabellenkalkulation, Trendparabeln, vielleicht sogar dem Bestimmtheitsmaß umgehen. Aber es gibt auch Schüler mit tief sitzender „Mathe-Phobie“, die aus der Analysis nur die Ableitungsregel $(x^n)' = nx^{n-1}$ und „ $f'(x) = 0$ “ mitnehmen. Für diese ist schon das Darstellen einer Fahrt in Google-Maps und die Verknüpfung mit dem Geschwindigkeitsgraphen eine Leistung, auf die sie stolz sind.

Einige Beispiele

Die Beispiele in diesem Beitrag geben eine Vision davon, wie GPS-Daten den Mathematikunterricht bereichern können: **Arbeitsblatt 1** widmet sich der vergleichenden Interpretation diverser S-Bahnfahrten auf gleicher Strecke. Im Online-Material finden Sie zwei vertiefende Arbeitsblätter, bei denen die Modellbildung von Bewegungen beim Anfahren und Abbremsen sowie der Übergang von der gemessenen mittleren zur (nur im Modell berechenbaren) Momentangeschwindigkeit untersucht werden.

Arbeitsblatt 2 zeigt, wie sich trigonometrische Funktionen mit GPS-Spuren in Verkehrskreiseln „erfahren“ lassen. Und in **Arbeitsblatt 3** begeben sich die Schüler mit einem Segelflieger in die dritte Dimension.

Man kann mit GPS-Daten Aufgaben so stellen, dass alle Bereiche der

GPS-Dateien auswerten

Die GPS-Geräte speichern die Fahrspuren als Tracks, d. h. als kleine Textdateien (je nach Hersteller mit der Endung .gpx, .trk, .nmea ...), die der GPS-Empfänger in einem Ordner seines Speichers ablegt. Über USB kann man diese Dateien auf den Rechner kopieren und mit Textverarbeitung oder Tabellenkalkulation öffnen.

Tracks

Tracks enthalten die Positionen (Breitengrad/Latitude; Längengrad/Longitude; Zeit/Time) im Sekundenabstand (**Bild 1**). Breitengrad und Längengrad werden mit 6 Nachkommastellen aufgezeichnet. Beim Breitengrad entspricht die letzte Nachkommastelle (0,000001°) überall auf der Erde der Strecke 0,111 m, beim Längengrad (in NRW) der Strecke 0,071 m.

```
<trkpt lat="50.333977" lon="6.944810">
<time>2009-08-10T10:49:32Z</time>
<trkpt lat="50.333965" lon="6.944802">
<time>2009-08-10T10:49:33Z</time>
</trkpt>
```

Lat=Breite (N-S): 0,000001° = 0,111m (Überall)
Lon=Länge (O-W) 0,000001° = 0,071m (NRW)

Bild 1: Beispiel einer Track-Datei im gpx-Format

Landkarten

Die Seite www.gpsvisualizer.com/map_input enthält eine Maske „Upload your GPS data files“. Dort trägt man die Datei mit dem Track ein (**Bild 2**). Mit „Draw a map“ wird die Route in eine Karte gezeichnet. Man kann diese Tracks nach Geschwindigkeiten einfärben (**Bild 3**).



Bild 2: Startseite des GPS-Visualizer

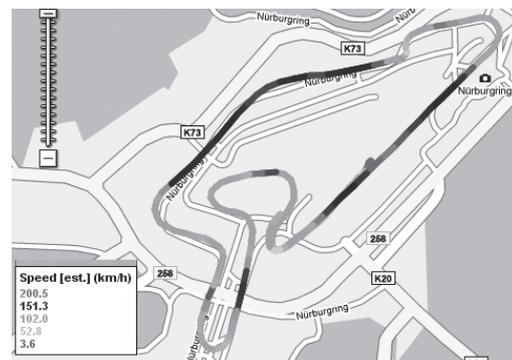


Bild 3: Track vom Nürburgring

Funktionsgraphen

Um die gefahrenen Geschwindigkeiten und den zurückgelegten Weg in Abhängigkeit von der Zeit als Funktionsgraphen darzustellen, wählt man im Eingabefenster von www.gpsvisualizer.com/profile_input die zu bearbeitende Track-Datei, auf der x-Achse „Elapsed time“ (die seit dem ersten Trackpunkt verstrichene Zeit in Sekunden) und auf der y-Achse „Speed“. Man erhält das Zeit-Geschwindigkeits-Diagramm. Wählt man auf der x-Achse „Distance“, wird ein Weg-Geschwindigkeitsdiagramm gezeichnet. Entsprechend erstellt man Zeit-Weg- oder Zeit-Fahrtrichtungsdiagramme (**Bild 4**) oder Höhenprofile.

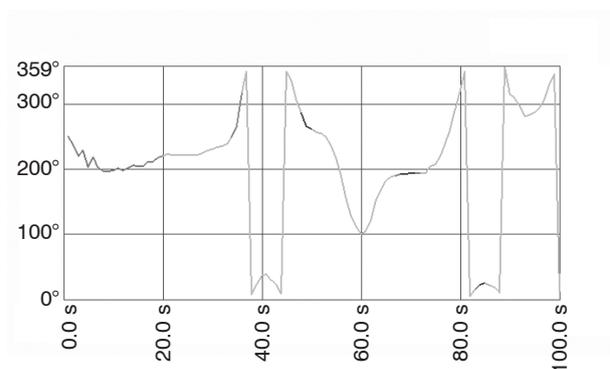


Bild 4: Fahrtrichtung (Cours) in Abhängigkeit von der Zeit

Tabellenkalkulation

Es gibt drei Wege, die Informationen aus dem Track als text-Datei zu erhalten, die dann wiederum in eine Tabellenkalkulation eingefügt werden kann. Achtung: Da GPS-Daten international sind, muss man in dem Kalkulationsprogramm den Punkt als Dezimaltrennzeichen einstellen und die Zeitangaben als hh:mm:ss formatieren.

1. Mit www.gpsvisualizer.com/gpsbabel kann man geräteabhängige Formate in .gpx- oder Textdateien umwandeln.
2. Unter www.gpsvisualizer.com/convert_input kann man den Track hochladen und numerische Analysen des zurückgelegten Wegs (distance) oder der Geschwindigkeit (speed) berechnen lassen. Die Ausgabe in Texttabellen lässt sich mit einer Tabellenkalkulation weiter bearbeiten.
3. Viele .gpx Dateien lassen sich via Maus-Rechtsklick direkt in Excel öffnen. Überflüssige Zeilen/Spalten müssen gelöscht werden.

Auswertung von S-Bahn-Fahrten Teil I

Bei einigen S-Bahnfahrten von Köln Weiden-West nach Köln HBF war ein GPS-Empfänger dabei. Die Tracks sind in der Datei **S-Bahn.xls** verfügbar und können weiter bearbeitet werden. Die Auswertung ergibt die Diagramme in **Bild 1**.

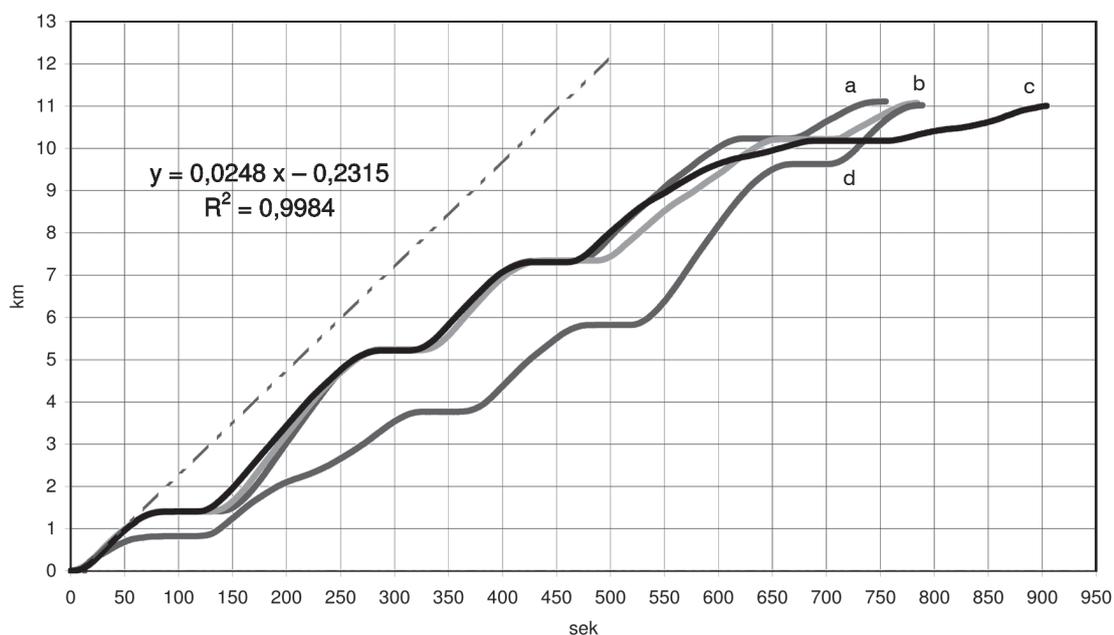


Bild 1: S-Bahn-Fahrten von Weiden-West nach Köln Hbf, eine Fahrt von Köln HBF nach Weiden West

→ AUFGABEN

1. Fasse „alle“ Informationen, die du über die Fahrstrecke und die Fahrweise der S-Bahnen entnehmen kannst, in Worte.
2. Schätze die maximale Geschwindigkeit und die Durchschnittsgeschwindigkeit der S-Bahnen a, b und c in m/s und km/h.
3. Vergleiche in einem kurzen Text die Details der S-Bahnfahrten a, b und c miteinander.
4. Stelle die folgende Aussage richtig: „Zu den Zeiten, zu denen der Graph a eine Linkskrümmung hat (z. B. 175 sek), fährt die S-Bahn eine Linkskurve, wo er eine Rechtskrümmung hat (z. B. 400 sek), fährt die Bahn eine Rechtskurve, wo der Graph geradlinig verläuft, fährt die Bahn geradeaus.“
5. Beschreibe in Worten, was mit einem Fahrgast zu den Zeiten passiert, an denen der Funktionsgraph stark linksgekrümmt/stark rechtsgekrümmt/geradlinig verläuft.
6. Das Diagramm enthält auch eine Trendgerade zur Fahrt der S-Bahnfahrt a für die Zeit 25 ... 50 Sekunden – samt Geradengleichung. Erläutere die Bedeutung dieser Trendgerade. Formuliere Fragen, die man mit dieser Trendgeraden beantworten kann.
7. Liefere Argumente dafür, dass der Graph d zu einer Bahnfahrt in umgekehrter Fahrrichtung (Köln HBF – Weiden) gehören muss.

Sinusfunktion im Kreisverkehr

Hier siehst du die GPS-Spur einer dreifachen Runde durch den Opel-Kreisel in Dudenhofen. Wenn man das Koordinatensystem in den Kreiselmittelpunkt legt und die geographische Breite und die Länge in Meter umrechnet, erhält man für die $(x;y)$ -Koordinaten in Abhängigkeit von der Zeit t (in sek) den Graphen aus **Bild 1** und für die Koordinaten in Abhängigkeit von der zurückgelegten Strecke (in m) den Graphen aus **Bild 2**.

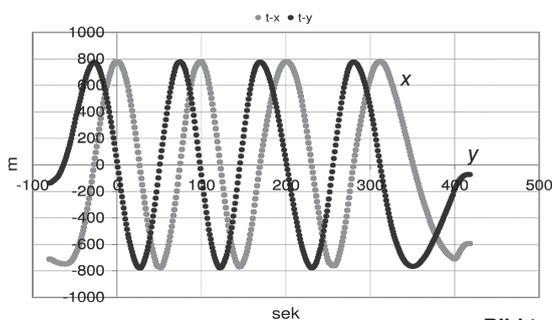
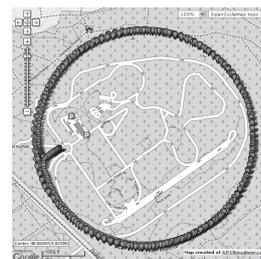


Bild 1

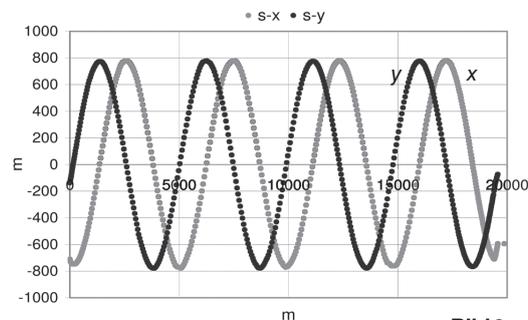


Bild 2

→ AUFGABEN

1. Mit welcher Durchschnittsgeschwindigkeit fuhr das Auto?
2. Das Auto fuhr auf der westlichen Seite in den Kreisel ein und musste erst einmal kräftig beschleunigt werden. Wie schlägt sich das in den Graphen von **Bild 1** nieder, wie in den Graphen von **Bild 2**?
3. Skizziere entsprechende Graphen für ein Auto, das auf der westlichen Seite des Kreisels genau in nördlicher Richtung startet.

Segelfliegen

Ein Segelflug mit Seilwindenstart wurde mit einem GPS-Gerät aufgezeichnet (die Datei **segelflug.gpx** enthält den Track). Untersuche den Flug, indem du die folgenden Aufgaben bearbeitest. Wenn du gleich mit einer Tabellenkalkulation arbeiten möchtest, nutze die Datei **segelflug.xls**.

→ AUFGABEN

1. Stelle die Flughöhe h dar in Abhängigkeit
 - von der Zeit t
 - von der Flugstrecke s .
2. Bestimme durch Auswerten der Excel-Datei oder durch Auswerten von GPS-Visualizer-Grafiken für den Start (**Bild 1**):
 - den Steigungswinkel der Flugbahn
 - die Steiggeschwindigkeit in m/s
 - die Beschleunigung beim Start, also um wie viel km/h die Geschwindigkeit in jeder Sekunde zunimmt.
3. Bei welcher Geschwindigkeit hebt der Segelflieger ab?
4. Wie groß ist die Geschwindigkeit beim Aufsetzen auf der Landwiese?

Bild 1: Start eines Segelfliegers mit Seilwinde

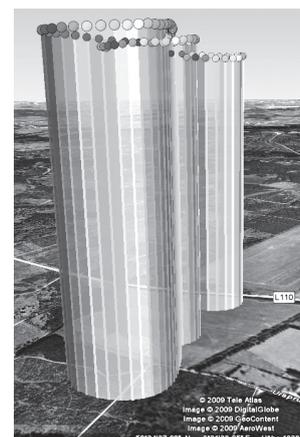


Bild 2: Suche nach der Thermik

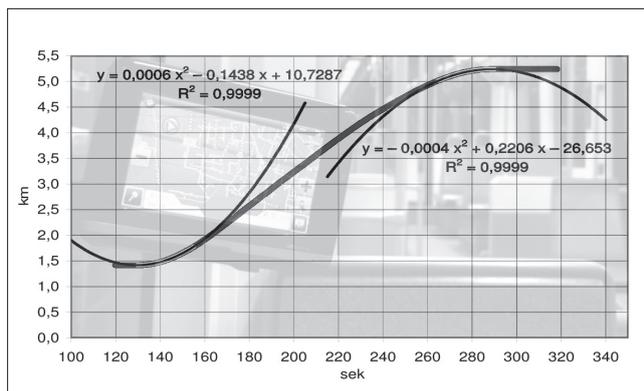


Abb. 1: In der S-Bahn fahren Parabeln mit ...

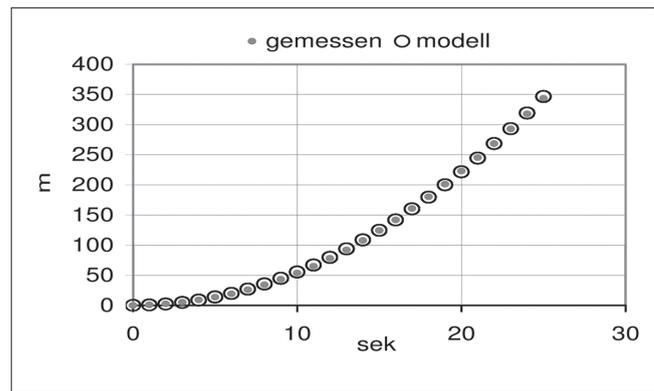


Abb. 2: Ausschnitt aus Abb. 1: Parabeln modellieren die Anfahrt

Schulmathematik berührt werden und die mathematischen Werkzeuge (von der elementaren Flächenberechnung über Integralrechnung, Vektorrechnung bis hin zur Statistik) zum Einsatz kommen. Man kann:

- krummlinig begrenzte Flächen (natürlich auch Kreisflächen und die Kreiszahl Pi) „messen“
- Erdumfang und Erdradius durch Abschreiten einer Nord-Süd-Strecke ermitteln. Ost-West-Strecken liefern entsprechend Breitenkreisumfang und Breitenkreisradius.
- beim Umwandeln geografischer Kugelkoordinaten in ebene Koordinaten die Trigonometrie als nützliches Werkzeug erleben
- beim Kurvenfahren Drehwinkel, Kurvenradien und Rotationsgeschwindigkeiten berechnen – hier werden Skalar- und Vektorprodukt lebendig
- Fahrtrichtungen als Integrale der Drehgeschwindigkeit bestimmen
- durch Vektorzerlegung die Brems- und Querbeschleunigungen beim Kurvenfahren untersuchen
- Luft- und Rollwiderstandswerte bei ausrollenden Fahrrädern/Autos bestimmen
- Normal- und Exponentialverteilung beim Auswerten von Messfehlern wiederentdecken
- die Analysis durch die dritte Dimension verlassen, wenn man das GPS ins Flugzeug/den Aufzug mitnimmt.

Wer sich vor dem eigenen „Sprung in die Praxis“ über das in GPS steckende Potenzial informieren möchte, findet ein Stationenlernen mit allen diesen Aspekten in (Lambacher-Schweizer

2009) sowie weiteres Material für den Einstieg in die Differentialrechnung oder für die in NRW verbindlichen Projektkurse in (Lambacher-Schweizer 2010).

S-Bahn-Fahrten auswerten

Das **Arbeitsblatt 1** eignet sich hervorragend für eine Kleingruppenarbeit mit anschließender Plenumsdiskussion zum Einstieg in die Differentialrechnung. Das Interpretieren von Funktionsgraphen wird in authentischem Sachkontext geübt. Die Steigungen der Funktionsgraphen werden als Geschwindigkeiten identifiziert. Linkskrümmungen der Graphen werden als Phasen der Geschwindigkeitszunahme, also als Beschleunigungsphasen, Rechtskrümmungen als Bremsphasen wieder erkannt. Man ist mit „Steigung“ und „Krümmung“ begrifflich mitten in den Grundvorstellungen der Analysis.

Die Ausschnittsvergrößerungen (s. **Abb. 1**, **Abb. 2**) belegen eindrucksvoll, wie präzise Parabeln als „lokale“ Modelle der Realität die Zeit-Weg-Zusammenhänge beim Sprinten und Bremsen beschreiben. Der Übergang von der messbaren Durchschnittsgeschwindigkeit zur nur im Modell berechenbaren Momentangeschwindigkeit wird als bewusster innermathematischer Akt der Modellbildung greifbar.

An der Trendgerade von **Bild 1** aus **Arbeitsblatt 1** lässt sich nicht nur die Geschwindigkeit auf gerader Strecke (24,8 m/s = 89 km/h) ablesen, sondern auch, wie viel Zeit eine S-Bahn sparen würde, wenn sie nicht dauernd halten

müsste. Radler kennen das Phänomen in Form roter Ampeln – und vielleicht gibt es deswegen unter ihnen so viele „Rotfuchse“...

Anmerkungen

- 1 Das Global-Positioning-System nutzt die von Satelliten ausgesendeten Zeitsignale, um aus den unterschiedlichen Laufzeiten die Position des Standortes zu bestimmen (vgl. Rascher-Friesenhausen 2004).
- 2 Das Medion P4410 von Aldi (2007) zeichnet neben den Positionen den zurückgelegten Weg, Geschwindigkeit, Messgenauigkeit und Satellitenzahl im Sekundenabstand auf (ideal für unsere Zwecke). Auch andere Medion-Navis, Garmin Navis ab 700er Serie, die Geräte von Clarion und Navgear zeichnen Spuren auf. Ebenso Trecking-Navis und Smartphones mit Windows mobile. Wegen Google-Maps beginnt die Spuraufzeichnung langsam Standard zu werden.
- 3 Schüler können sich anhand der Datei gps-tipps vorbereiten (www.riemer-koeln.de).
- 4 Alternativ kann man auf vorbereitete Tracks zurückgreifen und zur Auswertung eine Doppelstunde in den Computerraum gehen.

Literatur

- Klett (2009): Lambacher-Schweizer Kursstufe BW 735301 oder Niedersachsen, Hessen, NRW; auf www.klett.de den online-Link 735301-3881 eingeben.
- Klett (2010): Lambacher-Schweizer 10 (NRW) Klett 734401 auf www.klett.de den online-Link 734401-2441 eingeben.
- Rascher-Friesenhausen, R. (2004): Orientieren mit Mathematik. Was das GPS mit Linearer Algebra zu tun hat – In: *mathematik lehren*, Heft 124, Friedrich Verlag, Velber S. 58–62.
- Riemer, W.: gps-tipps – eine Datei mit Hinweisen zum Umgang mit gpsvisualiser, auf besonders geeignete GPS-Geräte sowie eine Fülle von interessanten Tracks; siehe www.riemer-koeln.de (Stand 16. 4. 2010).
- Riemer, W. (2009): Dem Navi auf der Spur: MNU 62/8, S. 468–477.