G 20353 F

PM

Praxis der Mathematik in der Schule

Sekundarstufen I und II

53

Heft Nr. 53/55. Jahrgang
Oktober 2013

Mit Positionen rechnen

GPS im Mathematikunterricht nutzen

Aulis Verlag

Herausgeber Heft 53
Gilbert Greefrath
Wolfgang Riemer

Herausgeber
Christina Drüke-Noe, Kassel
Prof. Dr. Gilbert Greefrath, Münster
Prof. Dr. Michael Kleine, Bielefeld
Dr. Heinz Laakmann, Dortmund
Prof. Dr. Michael Meyer, Köln
René Schelldorfer, Zürich

Liebe Leserinnen und Leser,
in den Beiträgen des vorliegenden Heftes wird deutlich, wie sehr Navigationsgeräte mit den von ihnen aufgezeichneten Daten den Mathematikunterricht bereichern können. Wir stellen erprobte Einsatzmöglichkeiten für alle Jahrgangsstufen vor: Es geht los mit der Messung des Erdumfanges auf dem Schulhof in einer Klasse 6, weiter geht es über Flächenberechnungen mithilfe der Gauß'schen Schuhbandformel in der Mittelstufe bis hin zur Berechnung von Querbeschleunigungen beim Kurvenfahren mithilfe der Vektorrechnung in anspruchsvollen Oberstufenkursen. Damit eigene Experimente gelingen, gibt es auch eine Gebrauchsanweisung, die zeigt, wie man Tracks vom GPS-Gerät auf den Computer überträgt, über Internetportale und Tabellenkalkulationsprogramme auswertet und in Funktionsgraphen „verwandelt". Ein Blick auf ausgewählte Apps, mit denen jedes Smartphone in wenigen Minuten zum Messgerät wird, rundet die Darstellung ab.

Wir wünschen Ihnen viel Freude beim Lesen und beim Experimentieren.

Ihre Herausgeber
Gilbert Greefrath
Wolfgang Riemer

Titelgestaltung: Schmid, Wilhelm
Foto: © Wolfgang Riemer

Inhalt

Mit Positionen rechnen – GPS im Mathematikunterricht nutzen

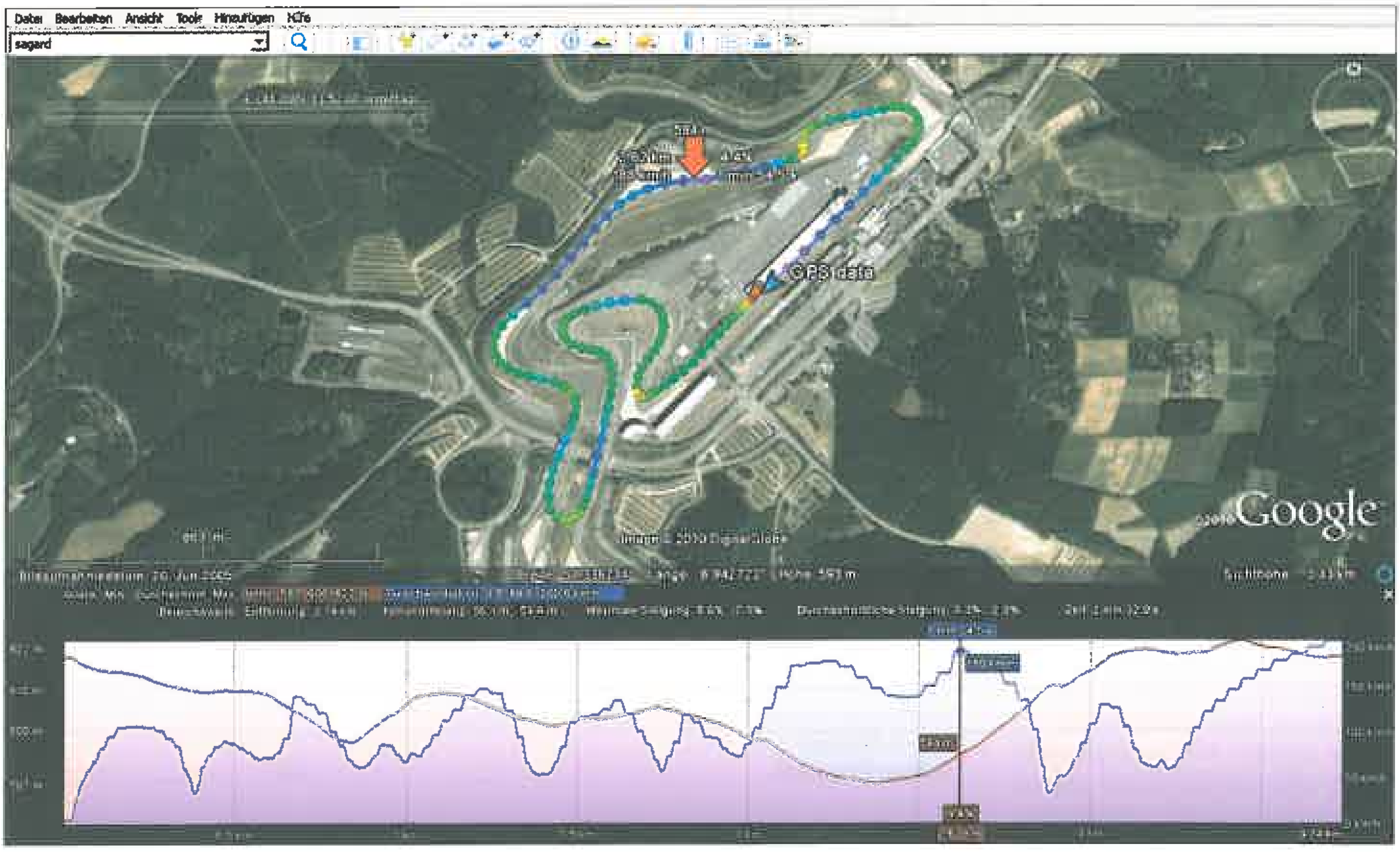
Freie Beiträge

www.aulis.de

Online-Ergänzungen und Kopiervorlagen
Passwort für Abonnenten
PM_53_13_POGP

Praxis der Mathematik in der Schule
erscheint im Aulis Verlag

Z208035



Google-Earth – Nach Geschwindigkeiten gefärbter Track vom Nürburgring mit Geschwindigkeits- und Höhenprofil, das man (mit dem roten Pfeil) sekundengenau ausmessen und mit dem blauen Pfeil animiert nachfahren kann. image © 2010 DigitalGlobe

Mit Positionen rechnen GPS im Mathematikunterricht nutzen

Wolfgang Riemer und Gilbert Greefrath

Navigationsgeräte können den Mathematikunterricht sehr bereichern. Die von ihnen aufgezeichneten Daten sorgen für Realitätsbezug und authentische Beispiele. Wie dies geschehen kann, wie „neue Technologie" in klassische Unterrichtsthemen einfließen und diese lebendig werden lassen kann, wird im Folgenden an erprobten Unterrichtsbeispielen ausgeführt, die vom Beginn der Sekundarstufe I bis zu einer Einführung in Grundvorstellungen der Analysis reichen.
Dabei werden unterschiedliche Aspekte des Funktionsbegriffs vertieft – und das Arbeiten mit realen Daten regt an, über mathematisches Modellieren nachzudenken.

Medien

Im Mathematikunterricht werden Arbeitsmittel und Medien – vom Schulbuch über das Geodreieck und Modelle geometrischer Körper bis hin zu Zufallsgeneratoren und Computern mit mathematischer Software – zu sehr unterschiedlichen Zwecken verwendet. Schülerinnen und Schüler können Medien im Mathematikunterricht einerseits dazu verwenden, um etwas über die Medien selbst zu lernen. Das ist beispielsweise der Fall, wenn man die Funktionsweise von GPS-Systemen thematisiert. Medien können andererseits auch den Unterricht unterstützen, indem sie Rückmeldungen über gelöste Aufgaben geben. Dann übernehmen sie eine Lehrfunktion.

Besonders häufig werden Arbeitsmittel und Medien als Lernwerkzeuge zum Bearbeiten von Aufgabenstellungen benutzt. Das ist der Fall, wenn Schülerinnen und Schüler mit einer Tabellenkalkulation Grafiken erstellen oder mit einem GPS-Tracker Daten aufnehmen, um Modelle über Bewegungsvorgänge oder Straßenführungen mit der Realität zu vergleichen. Wir konzentrieren uns hier auf die Rolle, die GPS-Geräte als Messwerkzeuge übernehmen können und zeigen, wie sie den Mathematikunterricht durch einen Brückenschlag zwischen Theorie und Praxis, zwischen Modell und Wirklichkeit, bereichern können.

Grunderfahrungen und Allgemeinbildung

Im Sinne der Winter'schen Grunderfahrungen für einen allgemeinbildenden Mathematikunterricht kann die Beschäftigung mit GPS-Daten auf natürliche Weise besonders die erste dieser Grunderfahrungen unterstützen, nämlich die, „Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder an-

Wie funktioniert das GPS-System?

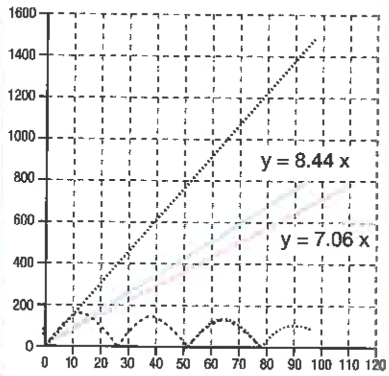
Aufgabe des Global Positioning Systems (GPS) ist die satellitengestützte Ortung von Objekten auf oder in der Nähe der Erdoberfläche. Das GPS besteht aus 24 Satelliten, die die Erde in etwa 20 000 km Höhe mit einer Umlaufzeit von jeweils ca. 12 Stunden umkreisen. Die Satelliten sind so angeordnet, dass von jedem Punkt der Erde immer mindestens 4 Satelliten zu „sehen" sind. Die Signale eines jeden Satelliten enthalten Informationen über die Sendezeit und die augenblickliche Position. Der Empfänger auf der Erde bestimmt daraus die Entfernung zum Satelliten. Aus den Entfernungen zu drei verschiedenen Satelliten kann er seine Position bestimmen. Zum Ausgleich von Messfehlern werden die Daten von mindestens vier Satelliten gleichzeitig benötigt (Abel 2001). Entwickelt wurde GPS in den USA für militärische Zwecke. Seit 2000 steht es für zivile Nutzung zur Verfügung. Seit 2006 gibt es den virtuellen Globus von Google-Earth, auf dem man seit 2010 Tracks animiert nachfahren und durch Geschwindigkeitsgraphen visualisieren kann (vgl. Abbildung zu Anfang des Artikels).

Kasten 1: Funktionsweise eines GPS-Systems

Eine klassische Bewegungsaufgabe im Praxistest

(Komplette Aufgabe in der Online-Ergänzung)

Jan und Ayshe sollten auf der 400-m-Bahn eines Sportplatzes mit 30 km/h = 8,33 m/s bzw. 25 km/h = 6,94 m/s aufeinander zu radeln. Zur Zeit $t = 0$ s sind sie sich begegnet. Die Fahrt der beiden wurde mit zwei GPS-Empfängern protokolliert (vgl. Grafik). Wann sind sie sich zum ersten, zweiten, dritten Mal begegnet? Welche Strecken haben sie dann jeweils zurückgelegt? Entnimm die Antworten der Grafik und vergleiche mit den theoretischen „Modellwerten", die sich ergeben würden, wenn beide sich genau an die Sollgeschwindigkeiten gehalten hätten.



Die Grafik zeigt die gemessenen Zeit-Weg Diagramme der beiden Radler, die Summe der gefahrenen Strecken und den Abstand (Luftlnie) voneinander. Immer wenn die Summenfunktion Vielfache von 400 m annimmt, begegnen sich die beiden. Das sind gleichzeitig die Zeiten, zu denen die Luftlinien-Abstände minimal werden.

Kasten 2: lineare Funktionen als normative Modelle – die Fahrweise ist vorgeschrieben (Norm).

gehen sollen, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen" (Winter 2003).

Hierfür ist die Einbeziehung realer Probleme und Anwendungen, wie die Auswertung von GPS-Daten oder die Erfahrung der Mathematik in der Umwelt wie z. B. im Rahmen des MathCityMap-Projektes unerlässlich, vgl. den Beitrag von Ludwig et al. im vorliegenden Heft.

Aspekte der Funktionsweise des GPS-Systems (s. *Kasten 1*) können im Rahmen der analytischen Geometrie thematisiert werden. Da es hierzu ausgearbeitete Unterrichtsvorschläge gibt (vgl. z. B. Haubrock 2000 und Schiller 2011), verzichten wir hier auf solche Aspekte.

GPS und Modellieren

Die Beschäftigung mit GPS-Daten liefert im Mathematikunterricht ausgezeichnete Anlässe zum bewussten Nachdenken über Modellierungsprozesse. Zum mathematischen Modellieren gehört bekanntlich (vgl. KMK 2004):

- eine reale Situation in mathematische Begriffe und Strukturen (ein Modell) zu übersetzen,
- in diesem mathematischen Modell zu arbeiten,
- Ergebnisse der Modellrechnungen in der realen Situation zu interpretieren, zu prüfen, zu bewerten und ggf. auch das verwendete Modell zu verbessern.

Schon beim Einschalten des GPS-Empfängers und beim Ablesen von Positionskoordinaten begibt man sich in die Modellebene eines bestimmten geografischen Koordinatensystems. Wenn man dann die Rechenergebnisse zu linearen Bewegungs- und Begegnungsproblemen, wie sie traditionell in Schulbüchern und Prüfungen vorkommen, mit den Ergebnissen von GPS-Messungen vergleicht und Abweichungen studiert, werden die Unterschiede zwischen Modell und Wirklichkeit mehr als deutlich. Kurz: Mit GPS-Daten können bisher kaum hinterfragte Modelle auf ihre Tragfähigkeit hin überprüft werden. Auch die in der *Abbildung zu Anfang des Artikels* dargestellte Route ist nur eine Modellierung und nicht die Realität. Das erkennt man zum Beispiel daran, dass Tracks zwar in sich glatt sind, aber mitunter einige Meter neben der Straße verlaufen.

Deskriptive, prognostische und explikative Modelle

Modelle können unterschiedliche Funktionen haben. Auch das wird im Zusammenhang mit GPS-Daten deutlich: Sie können – wie im Beispiel der Aufzeichnung einer gefahrenen Route – der Beschreibung der Umwelt dienen. Derartige Modelle werden *deskriptiv* genannt. In anderen Situationen beschreiben Modelle einen Idealfall, der so in der Wirklichkeit noch nicht erreicht ist oder nur annähernd erreicht wird. Das ist beispielsweise der Fall, wenn man einen Fahrplan erstellt oder eine Routenplanung vornimmt (siehe z. B. www.naviki.org für die Planung von Fahrrad-Routen). Der Fahrplan oder die Routenplanung werden aber aus unterschiedlichen Gründen selten exakt eingehalten. Man spricht daher von einem *normativen* Modell. Die Funktion von Modellen ist nicht immer gleich. Sie können eine Situation vorhersagen (*prognostische* Modelle) oder erklären (*explikative* Modelle). So kann beispielsweise die Zeitdauer für die geplante Wegstrecke (mit einem linearen Modell) vorhergesagt oder die Art der Beschleunigung eines anfahrenden Zuges (mit konstanten Antriebskräften) erklärt werden. Das GPS kann im Mathematikunterricht auf diese Weise gut zur Diskussion der Annahmen normativer und prognostischer Modelle verwendet werden.

Um die Fahrtdauer für eine Strecke zu berechnen, arbeiten Navigationssysteme für Autos in der Regel mit stückweise linearen Modellen: Für die Teilstrecken der zu fahrenden Route werden einfachste Modellannahmen gemacht, beispielsweise: Autobahngeschwindigkeit 120 km/h, Landstraßengeschwindigkeit 80 km/h, Stadtgeschwindigkeit 50 km/h; das kann man bei einigen Geräten sogar selbst festlegen. Es gibt aber auch „lernende" Navigationssysteme, deren Fahrzeitprognosen auf die gespeicherte Vergangenheit zurückgreifen. Das GPS kann also im Sinne des Modellierens als Sachkontext für den Unterricht verwendet werden (vgl. Hußmann/Laakmann 2011). Im Rahmen dieses Kontextes können auch wichtige mathematische und physikalische Begriffe wie Krümmungsradien von Kurven, Tangential- und Querbeschleunigungen, Drehgeschwindigkeiten und Fliehkräfte gebildet und untersucht werden (vgl. Beitrag *Mit GPS und Vektoren in die Kurve* von Riemer im vorliegenden Heft). Auch der Übergang von gemessenen mittleren Geschwindigkeiten zu theoretischen Momentangeschwindigkeiten kann als bewusster Akt des Modellierens erlebt werden (vgl. *Kopiervorlage 3 – Seite 2*).

Auf der anderen Seite werden durch die Nutzung von GPS fragwürdige „Modellierungen" wie die Beschreibung von Zeit-Weg-Funktionen zwischen Haltestellen durch Polynome dritten Grades auch einmal an realen Daten validierbar (vgl. Dehler/Riemer 2013 und Riemer 2013). Ähnliches gilt für das beliebte Modellieren von Straßenführungen durch Polynom-Steckbriefaufgaben, deren Ergebnisse unsinnigerweise von der Wahl des Koordinatensystems abhängen.


Guinnog at the English language Wikipedia, lizenziert unter cc-by-sa-3.0

Die Triebwerke des Airbus A380 liefern eine Schubkraft von 311 kN. Seine Masse kann beim Start 560 t betragen. Daraus lässt sich eine Zeit-Weg-Funktion beim Start näherungsweise bestimmen: $s(t) = 0{,}28\, t^2$ (s: Strecke in Meter, t: Zeit in Sekunden).

Wie groß ist die Geschwindigkeit nach 30 Sekunden?

(Höger et al., S. 98)

Kasten 3: Beispielaufgabe zur Einführung der Differentialrechnung

GPS und die Aspekte des Funktionsbegriffs

Mit Funktionen verbindet man je nach Kontext *drei* verschiedene Vorstellungen, die üblicherweise als Zuordnungsaspekt, Kovariationsaspekt und Objektaspekt bezeichnet werden (Vollrath 2003). Je nach Sachsituation und Lernprogression ändern sich auch die Perspektiven und die Darstellungsformen, mit denen man versucht, im Unterricht mit Funktionen zu arbeiten. Die vier Darstellungsformen

- grafisch – als Funktionsgraph oder Diagramm,
- verbal bzw. situativ – als Beschreibung einer Sachsituation,
- numerisch – durch Wertepaare oder Wertetabellen,
- symbolisch – etwa durch Funktionsterme

und der Wechsel zwischen ihnen spielen beim Erwerb mathematischer Kompetenzen im Umgang mit Funktionen eine entscheidende Rolle: Erst wenn man einen funktional zu beschreibenden Sachverhalt aus verschieden Perspektiven sehen, zwischen diesen Darstellungsformen flexibel wechseln sowie Beziehungen zwischen ihnen knüpfen kann, verfügt man über einen umfassenden Funktionsbegriff. Deswegen wird immer wieder vorgeschlagen, Lernende beim Wechseln zwischen den Darstellungsformen (Graph, Sachsituation, Tabelle, Term) zu unterstützen. Eine Möglichkeit etwa, den Zusammenhang zwischen Graph und Sachsituation zu fördern, ist das körperliche „erfahren" eines Funktionsgraphen durch ein Messwerterfassungsgerät. Das grafische Aufzeichnen der eigenen Bewegung soll das reflektierende Interpretieren von Graphen und das Erzeugen vorgegebener Graphen mit gezielten Bewegungsabläufen unterstützen (Barzel/Ganter 2010). Mit GPS kann man einige „Schritte weiter gehen" und tatsächlich funktionale Zusammenhänge mit der Bahn, dem Auto oder dem Fahrrad „erfahren". Wie das konkret aussehen kann, sollen nun einige Aufgabenbeispiele belegen, die durch GPS-Experimente angereichert wurden.

Funktionsgraphen im Sachkontext interpretieren

Mit Aufgabenstellungen wie in *Kopiervorlage 1* wird das Lesen von Funktionsgraphen im Sachkontext in Jahrgangstufe 6 oder 7 geübt. Man bewegt sich auf der qualitativen Ebene. Funktionsterme und Wertepaare spielen noch keine Rolle, es geht um den Wechsel zwischen verbaler und grafischer Darstellung funktionaler Zusammenhänge. Wie man weiß, bevorzugen viele Lernende – statt der richtigen dritten – die falsche erste Lösung, es handelt sich um den häufigen „Graph-als-Bild-Fehler", der unterläuft, wenn man sich über die Bedeutung der Achsen keine Klarheit verschafft hat. Siebtklässler, die nach wenigen Minuten ein GPS-Gerät bedienen können, haben viel Freude an einer Aufgabe, die darin besteht, einen Straßenverlauf wie in der oberen Abbildung der *Kopiervorlage 1* zu suchen und einen entsprechenden Track aufzunehmen. Sie präsentieren den Landkartenausschnitt samt Geschwindigkeitsverlauf auf dem Beamer – nicht ohne Stolz. Häufig kann dann auch der Grund für die Doppelkurve gefunden werden, weil dort eine Eisenbahnlinie sichtbar wird - oder ein Bach, dessen Überquerung die Straßen-Doppelkurve erzwungen haben muss. Solche Experimente füllen Funktionsgraphen situativ mit Sinn.

Graphen hinterfragen – Messungenauigkeit

Die Aufgabe aus *Kopiervorlage 2* thematisiert Alternativen, vor denen man steht, wenn man Wertetabellen in Funktionsgraphen darstellen möchte – insbesondere auch mit einer Tabellenkalkulation über die Option „Punktdiagramme". Es handelt sich um den Wechsel zwischen numerischer und grafischer Darstellungsebene. Solche Aufgaben machen bewusst, dass Funktionsgraphen, denen ein Funktionsterm zugrunde liegt, anders gelesen werden als Funktionsgraphen, die aus einer gemessenen Wertetabelle stammen. Die pfiffige Andrea aus der 7a brachte es beim Aufgabenteil b) auf den Punkt: *„Wenn man die einzelnen Punkte geradlinig verbindet, lügt man ganz oft, aber auch wenn man sie krumm verbindet. Wenn man nicht lügen möchte, sollte man sie eigentlich gar nicht verbinden, aber das sieht dann nicht so schön aus."* Wahrscheinlich haben Sie dieser Formulierung nichts hinzuzufügen, es sei denn, Sie erlauben, dass Aufgabenteil c) mithilfe eines GPS-Gerätes bearbeitet wird. Was nämlich passiert, wenn zwei Lernende ihre Handys im gleichen Schulbus sitzend simultan protokollieren lassen, zeigt die zweite Abbildung in *Kopiervorlage 3*. Die von beiden Geräten aufgezeichneten Geschwindigkeiten stimmen zwar ungefähr überein, mitunter weichen sie aber deutlich (hier um 2 m/s ≈ 7 km/h) voneinander ab.

Die Erkenntnis, dass immer, wenn man versucht, Realität durch Zahlen zu erfassen, Messfehler mit dabei sind, hat Albert Einstein so kommentiert: *„Insofern sich die Sätze der Mathematik auf die Wirklichkeit beziehen, sind sie nicht sicher, und insofern sie sicher sind, beziehen sie sich nicht auf die Wirklichkeit."* Und wenn man experimentiert hat, versteht auch ein Siebtklässler dieses Zitat.

Mit der S-Bahn in die Differenzialrechnung

Oft beginnt man die Analysis kontextorientiert mit der Untersuchung von Bewegungsvorgängen. Man gibt eine Zeit-Weg-Funktion, durch (meist quadratische) Terme vor und sucht nach Momentangeschwindigkeiten, anschließend wird eine Ableitungsfunktion konstruiert. Ein Beispiel für dieses Vorgehen zeigt die Aufgabe in *Kasten 3*.

Kopiervorlage 3 zu zwei S-Bahnfahrten zeigt, wie ein Start in die Analysis (mit einem Partnerpuzzle) aussehen kann, wenn man auf GPS-Daten zurückgreift, wenn also die Bewegungsfunktionen als gemessene Objekte vorliegen und nicht erst konstruiert werden müssen: Die erste Gruppe identifiziert die Steigung der Zeit-Weg-Funktion als gefahrene Geschwindigkeit, die zweite Gruppe die Fläche unter der Zeit-Geschwindigkeitsfunktion als zurückgelegten Weg. Die überschlagsmäßig abgelesenen Ergebnisse werden an den Graphen der jeweils anderen Gruppe abgesichert. Wenn man zwei Fahrten auf gleicher Strecke vergleicht, erkennt man den Abstand zwischen Haltestellen als gleich bleibende Stufenhöhen der Zeit-Weg-Graphen bzw. als gleiche Flächen unter den Graphen der Zeit-Geschwindigkeitsfunktionen wieder. Eine Auswertung der Original Tracks in Google Earth steigert die Authentizität. Und wenn man dann die Zeit-Weg-Funktionen von Startphasen wie unter einem Funktionenmikroskop über die ersten Sekunden des Startvorganges analysiert und entdeckt, wie genau diese sich durch Ursprungsparabeln beschreiben lassen, dann sieht man ein, welchen Sinn es macht, sich auf der Modellebene genauer mit der Ableitung quadratischer Funktionen zu beschäftigen.

Resümee:

Der Einsatz authentischer GPS-Daten ist für Lernende nicht nur reizvoll, weil sie ihr Handy einmal nicht wegsperren müssen, sondern als Messgerät nutzen dürfen. Er bietet:

- **Authentizität:** Statt mit analytisch vorgegebenen Funktionen beginnt man mit der Interpretation von Graphen, die nicht konstruiert werden, sondern per Messung vorliegen. Der Vergleich verschiedener Fahrten auf gleicher Strecke erhöht die Spannung.
- **Orientierung:** Man erkennt auf den ersten Blick, worum es in Differential- und Integralrechnung geht – und wie die beiden Gebiete miteinander zusammenhängen – bevor man anfängt zu „rechnen", Ableitungsregeln zu entdecken und zu begründen.
- **Modellierung:** Man begreift das Aufstellen von Funktionstermen als bewussten Akt des Modellierens einer Realität, die nur diskret (etwa im Sekundenabstand und mit Messfehlern) erfasst werden kann.
- **Infinitesimales:** Man erkennt, dass Momentangeschwindigkeiten nur im Modell bestimmt, dem Blick auf den Tacho zum Trotz – aber nicht direkt gemessen werden können. Messen kann man nur Durchschnittsgeschwindigkeiten.

Literatur

Abel, H. (2001): GPS: Global Positioning System – Funktionsweise und mathematische Grundlagen. Beiträge zum Mathematikunterricht (S. 57–60). Hildesheim: Franzbecker

Backhaus, U., / Gabriel, P. (2011): Einsatzmöglichkeiten moderner GPS-Geräte im Mechanikunterricht. Didaktik der Physik – Beiträge zur DPG-Frühjahrstagung, (S. 1–7). Münster

Barzel, B. / Ganter, S. (2010): Experimentell zum Funktionsbegriff. Praxis der Mathematik 31, S. 14–19

Dehler. T. / Riemer. W. (2013): Nicht eingekleidete Bewegungsaufgaben. Praxis der Mathematik 52, S. 35–36

Haubrock, D. (2000): GPS in der analytischen Geometrie. In F. Förster, Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht Bd. 6 (S. 86–103). Hildesheim: Franzbecker

Höger, Christof / Göttge, Silke / Block, Jan / Bischof, Ina (2010): Fokus Mathematik Einführungsphase Nordrhein Westfalen. Cornelsen, Berlin

Hußmann, S. / Laakmann, H. (2011): Eine Funktion – viele Gesichter. Darstellen und Darstellungen wechseln. Praxis der Mathematik 38, S. 2–11

KMK (2004): Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Bildungsabschluss. München: Wolters Kluver

Leuders, T. (2010): Veränderungen verstehen – aus diskreter Sicht. Praxis der Mathematik 31, S. 9–13

Riemer, W. (2009): Dem „Navi" auf der Spur mit Google-maps, Tabellenkalkulation, Analysis und Vektorrechnung. MNU, S. 468–477

Riemer, W. (2010): Bewegungen mit GPS untersuchen. Grundvorstellungen der Analysis „erfahren". Mathematik lehren 160, S. 54–58

Riemer, W. (2013): Im ICE von Hamm nach Bielefeld – Mit GPS und Google bekommt auch eine Prüfungsaufgabe „Pfiff". In H.-W. Henn, / J. Meyer (Hrsg.), Neue Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht 1. Wiesbaden: Springer Spektrum

Schiller, T. (2008): GPS-Beispiele im Mathematikunterricht. Beiträge zum Mathematikunterricht (S. 693–696). Münster: WTM-Verlag

Schiller, T. (2011): GPS-Beispiele im Mathematikunterricht – Das Global Positioning System und dessen Genauigkeit in der Schule. In G. Greefrath, J. Maaß, / H.-S. Siller (Hrsg.): Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht, Unterrichts- und Methodenkonzepte (Bd. 16, S. 143–160). Hildesheim: Franzbecker

Vollrath, H.-J. (2003): Algebra in der Sekundarstufe. Heidelberg: Spektrum

Winter, H. (2003): Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. In H.-W. Henn, / K. Maaß (Hrsg.): Materialien für einen Realitätsbezogenen Mathematikunterricht, Band 8 (S. 6–15). Hildesheim: Franzbecker

www.riemer-koeln.de

Verfasser

Dr. Wolfgang Riemer
Zentrum für Schulpraktische Lehrerausbildung Köln
w.riemer@arcor.de

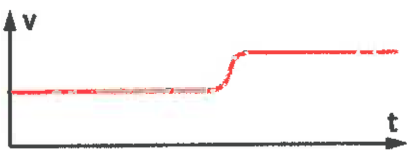
Prof. Dr. Gilbert Greefrath
Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Institut für Didaktik der Mathematik und der Informatik
greefrath@uni-muenster.de

Graphen deuten (Klassen 6/7)

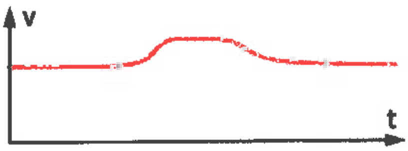
Ein Auto fährt auf der in Fig. 2 abgebildeten Straße von A nach B. Welcher der drei abgebildeten Graphen gehört vermutlich zur Zuordnung *Zeit → Geschwindigkeit?* Begründe deine Entscheidung.

Fig. 2

(1)



(2)



(3)

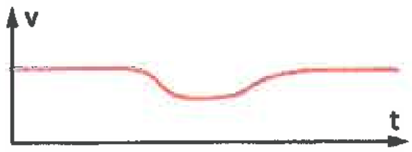
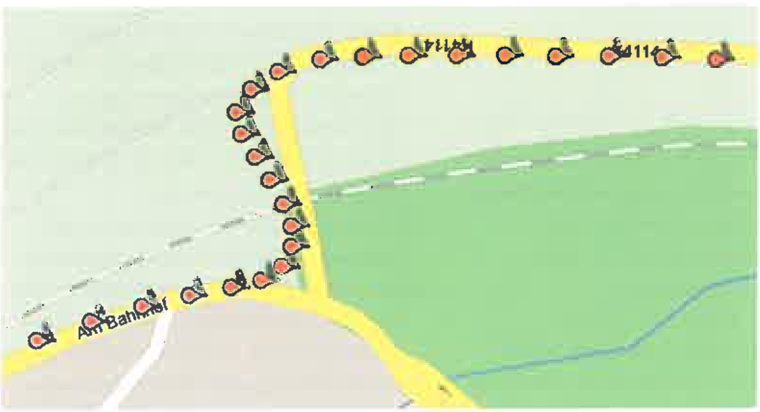
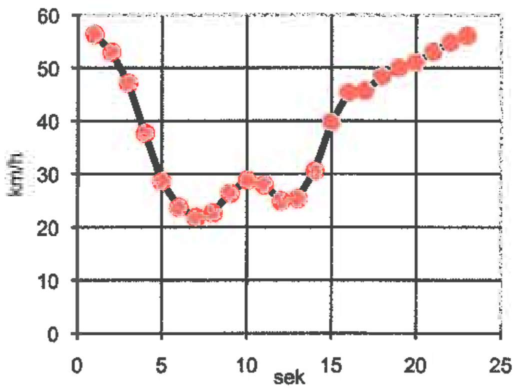


Abb. aus: Lambacher-Schweitzer 7 – Mathematik für Gymnasien. Schülerbuch 7. Klasse NRW, S. 97 © 2010 Ernst Klett Verlag GmbH

Praxis: Suche in deiner Umgebung (mithilfe einer Landkarte) eine ähnliche Straßenführung. Bitte einen Erwachsenen, mit dir im Auto den Track aufzunehmen, ... oder fahre selber mit dem Fahrrad ... stelle den Track in einer Landkarte dar und zeichne den Zeit-Geschwindigkeitsgraphen z. B. mit www.gpsvisualizer.com.

Lösungsbeispiel





Querung der Odenwaldbahn bei Gaimühle. In der Querung wird man etwas schneller.

PM / Thema: MIT POSITIONEN RECHNEN – GPS IM MATHEMATIKUNTERRICHT NUTZEN // Heft 53 / 55. Jahrgang / 2013

Wechsel zwischen numerischer und grafischer Darstellung (Klasse 7)

Kerstin hat bei einer Autofahrt mit ihrer Mutter von der Rückbank die Geschwindigkeit beobachtet und alle 30 Sekunden in eine Tabelle eingetragen.

Zeit (in min)	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7	7,5
Geschwindigkeit (in km/h)	0	17	23	22	39	49	45	57	48	62	61	60	53	49	63	48

a) Zuhause angekommen, zeichnet sie drei verschiedene Graphen (Fig. 1 – Fig. 3). Welcher Graph stellt die Zuordnung *Zeit → Geschwindigkeit* am besten dar? Begründe deine Entscheidung

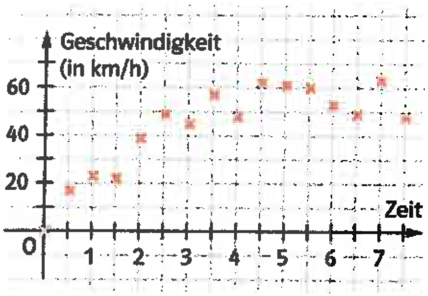


Fig. 1

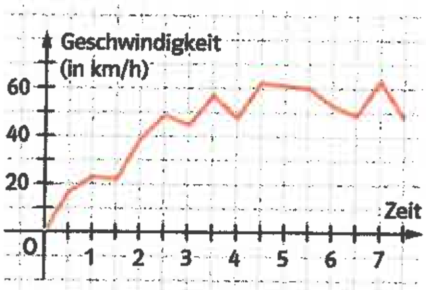


Fig. 2

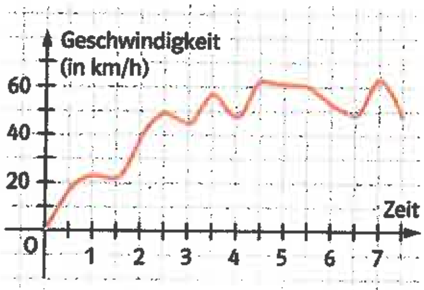


Fig. 3

b) Beschreibe in eigenen Worten, welche Vor- und Nachteile ein Graph bzw. die Wertetabelle für die Darstellung einer Zuordnung bieten.

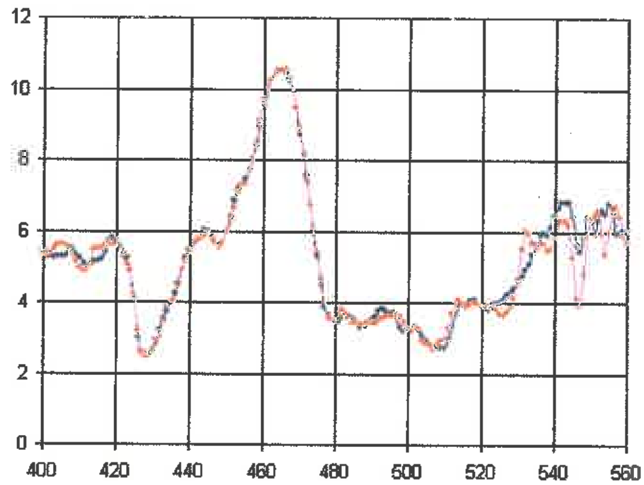
c) Führe selbst einen ähnliche Messung wie in a) durch und erstelle einen Graphen.

Abb. aus: Lambacher-Schweitzer 7 – Mathematik für Gymnasien. Schülerbuch 7. Klasse NRW, S. 74 © Ernst Klett Verlag GmbH

Praxis: a) Nimm selbst einen kurzen Track auf. Drucke die Wertetabelle mit Zeiten und Geschwindigkeiten aus. Zeichne den zugehörigen Graphen mit einer Tabellenkalkulation.

b) Untersuche, nach welcher der drei oben abgebildeten Methoden dein Handy oder z. B. www.gpsvisualizer.com daraus das Zeit-Geschwindigkeitsdiagramm erstellt.

Punktdiagramm-Varianten



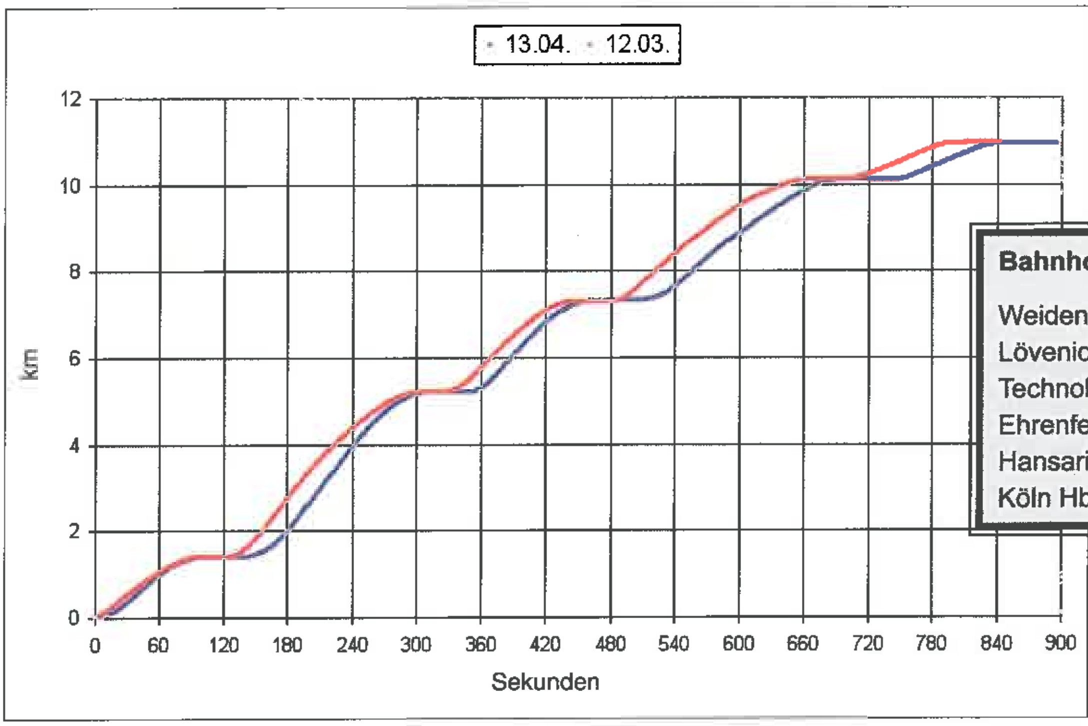
Zeit in s → Geschwindigkeit in m/s

Mit der S-Bahn in die Analysis – ein Partnerpuzzle

I Einzelarbeit

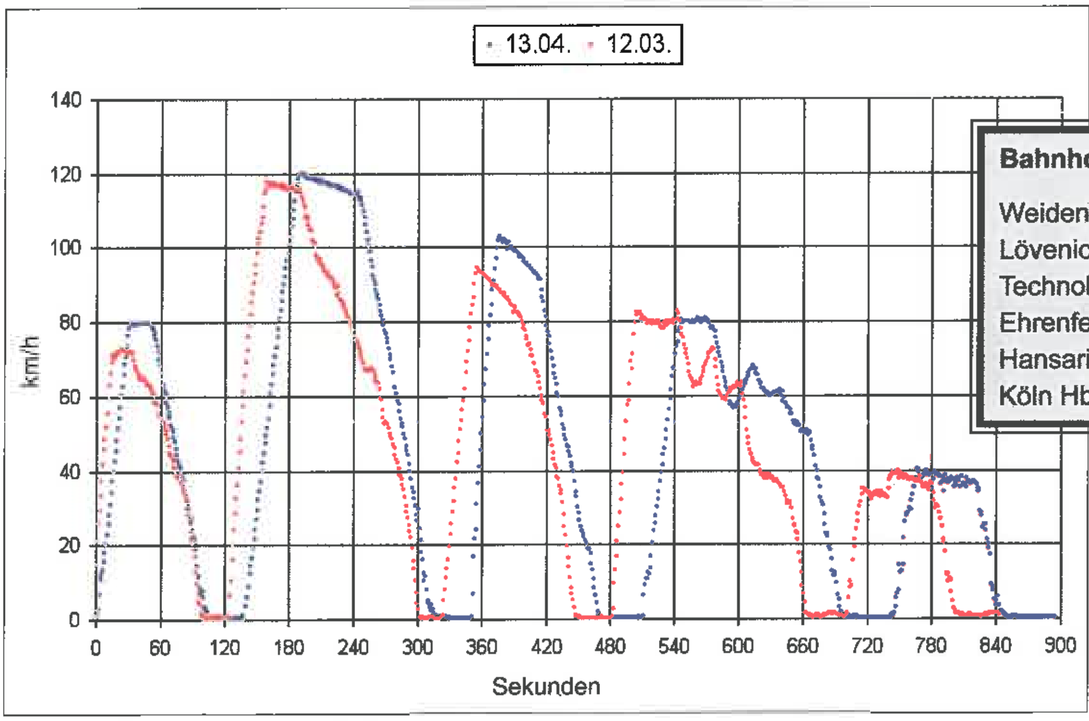
Partner A erhält *Abb. 1,* B erhält *Abb. 2.* Jeder Partner versucht, aus seiner Abbildung möglichst viele Details über die Fahrt der beiden S-Bahnen (am 12.März / 13. April) herauszubekommen, insbesondere folgende Fragen zu beantworten:

Wie weit liegen die sechs Haltestellen auseinander? Welche maximalen Geschwindigkeiten erreichten die Bahnen? Wie schlägt sich das Beschleunigen und Bremsen im Graphen nieder? Wie viel Zeit würde eine S-Bahn einsparen, wenn sie ohne Zwischenhalte durchfahren könnte?



Bahnhof	Zeit
Weiden-West ab	06:36
Lövenich	06:38
Technologiepark	06:41
Ehrenfeld	06:44
Hansaring	06:48
Köln Hbf an	06:51

Abb. 1: Graphen zweier S-Bahnfahrten (Partner A)



Bahnhof	Zeit
Weiden-West ab	06:36
Lövenich	06:38
Technologiepark	06:41
Ehrenfeld	06:44
Hansaring	06:48
Köln Hbf an	06:51

Abb. 2: Graphen zweier S-Bahnfahrten (Partner B)

PM / Thema: MIT POSITIONEN RECHNEN - GPS IM MATHEMATIKUNTERRICHT NUTZEN // Heft 53 / 55. Jahrgang / 2013

PM / Thema: MIT POSITIONEN RECHNEN - GPS IM MATHEMATIKUNTERRICHT NUTZEN // Heft 53 / 55. Jahrgang / 2013

II Gedankenaustausch (je zwei Partner A und zwei Partner B)

Vergleicht eure Antworten auf obige Fragen!

Notiert in einer Beispielrechnung, wie man anhand des Graphen aus *Abb. 1* Geschwindigkeiten bestimmt.

Notiert in einer Beispielrechnung, wie man anhand des Graphen aus *Abb. 2* zurückgelegte Strecken bestimmt.

Welche von den Funktionsgraphen begrenzten Flächen sind gleich? Begründet!

III Momentangeschwindigkeit (Realität und Modell)

Ein genauer Blick auf die S-Bahn beim Start in Lövenich zeigt, dass sich der Weg y in Abhängigkeit von der verstrichenen Zeit x beim Start sehr gut durch eine quadratische Funktion beschreiben lässt. Wenn man das Koordinatensystem so legt, dass man „im Ursprung startet", gilt für eine gewisse Zeit (als ob S-Bahnen Parabeln kennen würden) $y = kx^2$. (k kann man z. B.nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmen). Man erhält in Lövenich $y = 0{,}551x^2$.

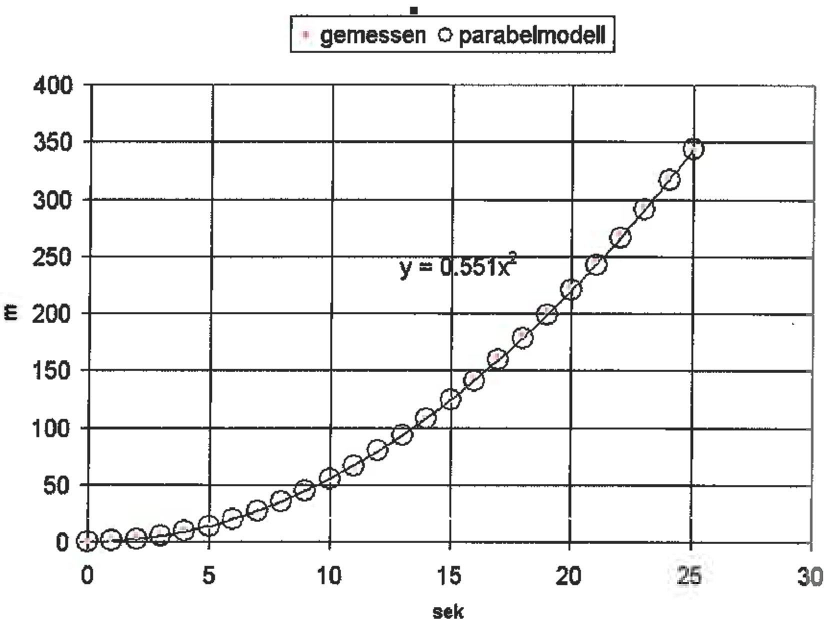
Wie schnell ist die S12 nach

a) 5 Sekunden b) 10 Sekunden c)15 Sekunden d) 20 Sekunden?

Gruppe 1 versucht, die Frage unter Benutzung der Messwerte zu beantworten.

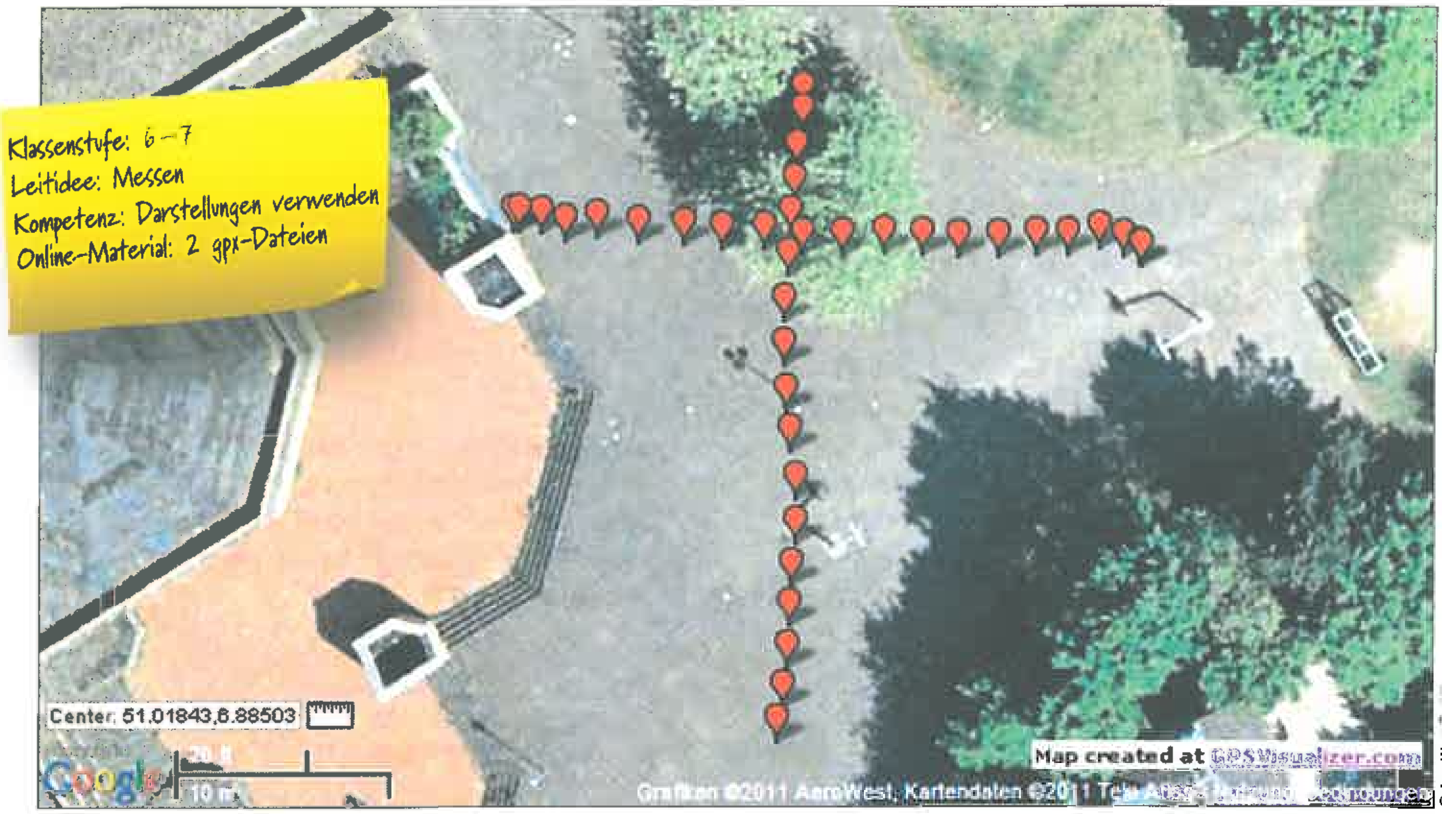
Gruppe 2 versucht, die Frage unter Benutzung des Funktionsterms $y = 0{,}551x^2$ zu beantworten.

Erläutert folgende Aussage am Beispiel von *Abb. 3.*: *„Die Momentangeschwindigkeit kann man nicht genau messen. Man kann sie nur in einem Modell exakt berechnen ... aber das Modell beschreibt die Wirklichkeit nur ungenau."*



x (in s)	y (in m) gemessen	$y=0{,}551x^2$
0	0.0	0.0
1	0.9	0.6
2	2.7	2.2
3	5.3	5.0
4	9.0	8.8
5	13.6	13.8
6	19.3	19.8
7	26.1	27.0
8	34.2	35.3
9	43.3	44.6
10	53.6	55.1
11	65.2	66.7
12	78.0	79.3
13	92.2	93.1
14	107.6	108.0
15	124.1	124.0
16	141.7	141.1
17	160.5	159.2
18	180.3	178.5
19	201.0	198.9
20	222.6	220.4
21	246.1	243.0
22	268.5	266.7
23	292.6	291.5
24	317.6	317.4
25	343.5	344.4
26	369.9	372.5

Abb. 3: Vergrößerter Ausschnitt aus *Abb. 1* mit neuem Koordinatensystem



© AeroWest GmbH

Schulhof, Heinrich-Mann-Gymnasium Köln; Spuren von Jan und Ayse beim Abschreiten von 30 m langen Strecken in West-Ost und Süd-Nord-Richtung

Mit GPS und Dreisatz auf dem Schulhof die Erde vermessen

Wolfgang Riemer

Mit GPS Empfängern kann man in Klassenstufe 6 oder 7 in einer Doppelstunde auf dem Schulhof erforschen, wie das Kugelkoordinatensystem mit geographischer Breite (North = Lattitude) und geographischer Länge (East = Longitude) „funktioniert". Aus der Änderung der Koordinaten beim Durchschreiten vorgegebener Strecken bestimmt man den Erdumfang. Messungenauigkeiten werden mit den Werkzeugen beschreibender Statistik untersucht.

Kugelkoordinaten

(N 50.90313°; E 006.80527°): Noch vor wenigen Jahren wirkten solche Angaben kryptisch. Sie schienen aus der Zeit der großen Segelschiffe, der Sextanten und mechanischen Chronometer „übrig geblieben" zu sein. Und um die sphärische Trigonometrie ist es seit Jahrzehnten in den Curricula auch nicht zum Besten bestellt. Mit dem Einzug von GPS-Uhren und Geocaching-Klassenfahrten hat sich jedoch einiges geändert. Viele Sechstklässler wissen, dass obige Zahlen Positionsangaben sind, mit deren Hilfe man beim Geocaching Schätze finden kann. Aber wie sich die Positionsangaben ändern, wenn man auf dem Schulhof in verschiedene Richtungen läuft, ist eher unbekannt. Ein spannendes Forschungsprojekt also, bei dem man „nebenbei" mit dem Dreisatz die Länge der Breiten- und Längenkreise messen kann. Man erlebt, wie schwierig es ist, mit einer (meist recht dehnbaren) Schnur und einem kleinen Kompass, dessen Zeiger sich immer ein wenig bewegen, Strecken vorgegebener Länge und Richtung abzustecken. Man bekommt Hochachtung vor der Präzision, mit der Vermessungsingenieure arbeiten und lernt einiges über die Messfehler von GPS-Empfängern, die man mit den Werkzeugen beschreibender Statistik untersucht.

Vermessungsexperiment

(vgl. *Kopiervorlage*)

1. Man bildet in der Klasse so viele Gruppen wie GPS-Empfänger (bzw. Smartphones mit GPS-App) vorhanden sind. Jede Gruppe hat den Auftrag, eine eigene Strecke vorgegebener Länge (z. B. 30 m) auf dem Schulhof oder dem Sportplatz abzustecken, die GENAU in Süd-Nord bzw. GENAU in Ost-West-Richtung verläuft. Natürlich kann man die Arbeit aufteilen.
2. Dann werden die vom GPS-Empfänger angezeigten Koordinaten an den Endpunkten der Strecken abgelesen (da die Angaben schwanken, empfiehlt es sich, über eine kleine Zeitspanne zu mitteln). Je nach Zeitbudget empfehlen sich Kontrollmessungen an den abgesteckten Strecken anderer Gruppen.

3. Jede Gruppe bestimmt, um wie viel Grad die North-(Lattitude) und East-(Longitude) Koordinaten beim Durchschreiten der Strecken angewachsen sind und trägt ihre Ergebnisse zum Vergleich und zur Mittelwertbildung in eine gemeinsame Tabelle ein. Alternativ oder ergänzend können die Gruppen auch ihre Tracks auswerten, die beim Durchschreiten der abgesteckten Strecken aufgezeichnet werden (vgl. *Tab. 1* und *die Abbildung zu Beginn des Beitrags*). Hinweise für die Messpraxis erhalten Sie in den Beiträgen „GPS-Daten aufarbeiten – eine Gebrauchsanweisung" und „GPS-Datenaufzeichnung mit Smartphones" im vorliegenden Heft).

   Tab. 1 zeigt: Bei Wanderung um 30 m
   - nach Norden wächst der Wert für die Koordinate North um 266 Millionstel Grad.
   - nach Osten wächst der Wert für die Koordinate East um 422 Millionstel Grad.

   Die Unterschiede lösen zunächst großes Erstaunen aus, aber am Globus löst sich der kognitive Konflikt schnell. Sandra: „Die Breitenkreise werden vom Äquator aus in Richtung Norden immer kleiner. Deswegen entfallen auf ein Grad umso weniger Kilometer, je näher man dem Nordpol kommt." Auf unserem Schulhof am 51. Breitenkreis ist der gemessene Verkürzungsfaktor 266/422 ≈ 0,63. Er kommt dem theoretischen Faktor sin(51°) ≈ 0,67 recht nahe.
4. Mit den Messergebnissen lassen sich der Erdumfang und der Breitenkreisumfang durch eine Dreisatzrechnung *(Tab. 2)* bestimmen.

30 m nordwärts			30 m ostwärts		
Zuwachs (°)	0,000266	0,000017		-0,000015	0,000422
time	North (°)	East (°)	time	North (°)	East (°)
14:29:52 PM	51,018164	6,885061	14:37:48 PM	51,018379	6,885883
14:29:53 PM	51,018178	6,885065	14:37:49 PM	51,018379	6,885887
14:29:54 PM	51,018195	6,885068	14:37:50 PM	51,018378	6,885902
14:29:55 PM	51,018213	6,885069	14:37:51 PM	51,018375	6,885918
14:29:56 PM	51,01823	6,885071	14:37:52 PM	51,018376	6,885940
14:29:57 PM	51,018247	6,885074	14:37:53 PM	51,018374	6,885968
14:29:58 PM	51,018266	6,885073	14:37:54 PM	51,018373	6,885998
14:29:59 PM	51,018286	6,88507	14:37:55 PM	51,018371	6,886024
14:30:00 PM	51,018303	6,885067	14:37:56 PM	51,018371	6,886052
14:30:01 PM	51,018322	6,885066	14:37:57 PM	51,018369	6,886078
14:30:02 PM	51,018341	6,885066	14:37:58 PM	51,018369	6,886104
14:30:03 PM	51,01836	6,885068	14:37:59 PM	51,018370	6,886133
14:30:04 PM	51,018378	6,88507	14:38:00 PM	51,018369	6,886158
14:30:05 PM	51,018392	6,885072	14:38:01 PM	51,018368	6,886182
14:30:06 PM	51,018406	6,885073	14:38:02 PM	51,018368	6,886209
14:30:07 PM	51,018421	6,885077	14:38:03 PM	51,018369	6,886234
14:30:08 PM	51,018430	6,885078	14:38:04 PM	51,018369	6,886256
			14:38:05 PM	51,018371	6,886278
			14:38:06 PM	51,018368	6,886294
			14:38:07 PM	51,018365	6,886304
			14:38:08 PM	51,018364	6,886305

Tab. 1: Tracks zur Eingangsabbildung

Die Vermessung der Erde ist mit der Kopiervorlage in einer Doppelstunde gut zu schaffen. Das Auswerten von Tracks und das Nachmessen in Google-Landkarten gemäß *Aufgabe 6* der *Kopiervorlage* erfordert eine weitere Stunde oder dient zur häuslichen Vertiefung für GPS-Enthusiasten. Wenn man zu wenige Navigationsgeräte besitzt, können einige Schüler virtuell messen und die Aufgabenstellung aus *Kasten 1* bearbeiten.

Beschreibende Statistik

Wie jeder Geocacher – und nach einer Erdvermessung jeder Sechstklässler – weiß, schwanken GPS-Positionsangaben mitunter erheblich. Das belegt auch das Protokoll aus *Abb. 1b*. Wenn man einen Empfänger irgendwo ablegt, wird aus einem Positionspunkt mit der Zeit auf dem Display ein dicker „Klecks" *(Abb. 1a)*. Über Nacht kam hier in 12 Stunden eine „Tagesstrecke" von 895 m zustande.

Die Untersuchung solcher Messungenauigkeiten mit beschreibender Statistik ist für Lernende genauso spannend wie die Vermessung der Erde auf dem Schulhof. Schließlich steht in vielen Bundesländern in dieser Jahrgangsstufe der Umgang mit Tabellenkalkulation ebenso auf dem Lehr-

Richtung Norden	Richtung Osten
266 Millionstel ° ≙ 30 m	422 Millionstel ° ≙ 30 m
1 Millionstel ° ≙ 11,3 cm	1 Millionstel ° ≙ 7,1 cm
1° ≙ 113 km	1° ≙ 71 km
360° ≙ 40602 km	360° ≙ 25492 km
Die Messung liefert für den Erdumfang (Länge eines Längenkreises) 40602 km.	Die Messung liefert für die Länge des Breitenkreis, auf dem der Schulhof liegt, 25492 km.
Zum Vergleich ein Tabellenwert: $2\pi \cdot 6375$ km ≈ 40055 km	Zum Vergleich ein Tabellenwert: $2\pi \cdot 6375$ km $\cdot \sin(51°)$ ≈ 26846 km

Tab. 2: Dreisatzrechnung

Wenn du kein Navigationsgerät auftreiben kannst oder mit deiner Messung früher fertig wirst als deine Mitschülerinnen und Mitschüler, lege mit Google-Earth und der Computermaus zwei Punkte auf eurem Schulhof fest, lies deren Kugelkoordinaten ab, bestimme die Entfernung zwischen den Punkten mit dem Google-Lineal und finde mit einer Dreisatzrechnung heraus, mit welchem Erdumfang (Breitenkreisumfang) die Programmierer von Google die Erde beschreiben.

Kasten 1: Ersatzaufgabe

	50,964782	6,783227	Median
	0,000188	0,000273	Spannweite
	0,000032	0,000052	Länge Box
	0,000024	0,000041	Standardabw.
	North (°)	East (°)	Time
0	50,964817	6,783248	22:23
1	50,964795	6,783237	22:24
2	50,964755	6,783174	22:25
3	50,964761	6,783215	22:26
4	50,964765	6,783212	22:27
5	50,964786	6,783261	22:28
6	50,964778	6,783230	22:29
7	50,964787	6,783270	22:30
8	50,964772	6,783226	22:31
9	50,964772	6,783218	22:32
10	50,964771	6,783207	22:33
452	50,964782	6,783190	5:55
453	50,964758	6,783175	5:56
454	50,964761	6,783196	5:57
455	50,964811	6,783249	5:58
456	50,964772	6,783221	5:59
457	50,964752	6,783207	6:00

Abb. 1a Track eines ruhenden Empfängers Abb. 1b Zugehöriges Protokoll (Minutenabstand)

Pfiffige Schüler lesen aus dem in *Abb. 1a* eingeblendeten Maßstab die S-N „Kleksausdehnung“ 26 m ab. Ein Vergleich mit der Spannweite 188 Millionstel Grad *(Abb. 1b)* liefert den Erdumfang 50000 km.

plan wie Mittelwert, Median und Boxplot. Man liest die in der Ruheposition aufgezeichneten Tracks in eine Tabellenkalkulation ein, wie in dem Beitrag „GPS-Daten aufarbeiten – eine Gebrauchsanweisung“ in diesem Heft beschrieben. Anschließend werden die statistischen Kennwerte Median, Spannweite und Quartilabstand (Länge der Box) für die gemessenen Koordinaten North und East bestimmt und in Boxplots (s. *Abb. 2* und *3*) visualisiert. Der Quartilabstand dient hier zu Beginn der Sekundarstufe I als Maß für die Messungenauigkeit, da die Standardabweichung wegen des Wurzelterms und der schwierigeren Interpretierbarkeit höheren Jahrgangsstufen vorbehalten ist.

Natürlich kann man auf Tabellenkalkulation verzichten, eine kleinere Anzahl von Positionsangaben in Partnerarbeit notieren und die Daten dann ohne Rechner auswerten. Ein (die Lesekompetenz für das Lesen von Texten/Grafiken fördernder) Brückenschlag zwischen der Kartendarstellung aus *Abb. 1a* und den Boxplots aus *Abb. 2/3* ist dann aber nicht möglich: Während die East-Koordinaten nach rechts und links gleichmäßig um den Median pendeln, gibt es bei den North-Koordinaten deutliche Ausreißer nach Süden. Das spiegelt sich in der unteren Antenne von *Abb. 2* wider.

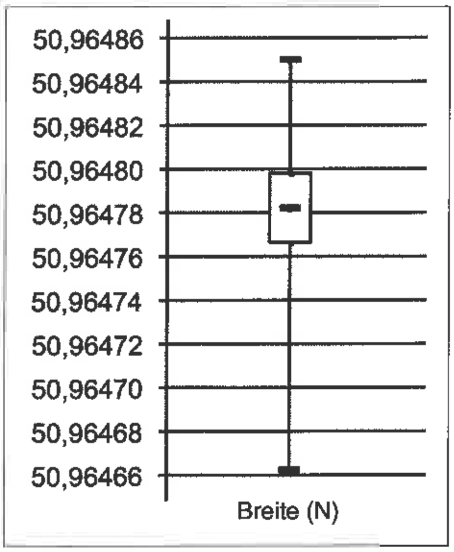


Abb. 2 Boxplot geographische Breite (North)

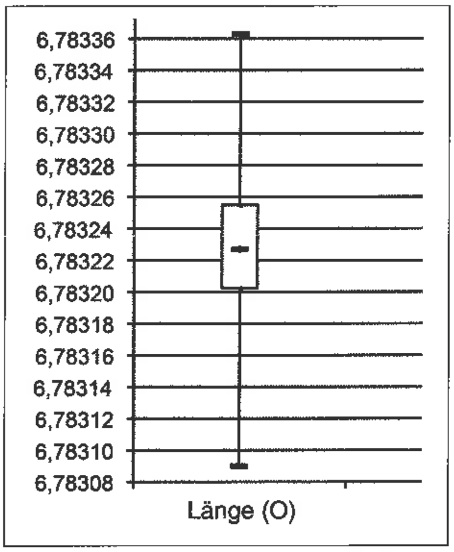


Abb. 3 Boxplot geographische Länge (East)

Messgenauigkeit

Der Quartilabstand der North-Koordinaten in *Abb. 2* beträgt 32 Millionstel Grad. Das entspricht einer Messgenauigkeit von $32 \cdot 11{,}1\,\text{cm} = 3{,}55$ m, für die East-Koordinaten erhält man mit 52 Millionstel Grad und $52 \cdot 7{,}1\,\text{cm} = 3{,}69$ m einen ähnlichen Wert. Damit lassen sich 30 m lange Strecken auf dem Schulhof mit einer Genauigkeit von ca. 10 % durch GPS vermessen. Für höhere Genauigkeiten benötigt man längere Strecken, die man aber nicht mehr mit dem Bandmaß messen kann. In der Praxis wird man dann auf einem Stadtplan Strecken aufsuchen, die genau in W-O und S-N Richtung verlaufen und Längen mit einem Fahrradtacho messen oder das Streckenmesswerkzeug in Google-Earth nutzen.

Resümee

Wie man sieht, gelingt es, bei einer klaren Arbeitsorganisation in einer Doppelstunde mit GPS-Empfänger, Dreisatz und Taschenrechner, die Erde zu vermessen. Mit Längen- und Breitenkreisen, die durch das GPS-Display „real“ werden, wird so im Mathematikunterricht ein höchst nützliches Koordinatensystem erforscht und eine Brücke zum Fach Geographie geschlagen. Man erfährt dabei auch, dass die Koordinatenangaben auf dem GPS in der sechsten Nachkommastelle eine Genauigkeit von 11 cm in Süd-Nord- und von 7 cm in West-Ost-Richtung „vorgaukeln“. Wenn man zusätzlich die Schwankungen statistisch untersucht, kommt man allerdings auf Messgenauigkeiten der Größenordnung 3 m.

GPS-Messungen können so viele Aspekte der „fundamentalen Idee“ des Messens, des Beschreibens von Realität durch Zahlen begreifbar machen.

Verfasser
Dr. Wolfgang Riemer
Zentrum für Schulpraktische Lehrerausbildung Köln
w.riemer@arcor.de

PM / Thema: MIT POSITIONEN RECHNEN – GPS IM MATHEMATIKUNTERRICHT NUTZEN // Heft 53 / 55. Jahrgang

Die Erde vermessen

1. Die Klasse wird in Gruppen aufgeteilt. Jede Gruppe steckt mit einem Bandmaß und einem Kompass auf dem Schulhof eine 30 m lange Strecke in West-Ost-Richtung und eine in Süd-Nord-Richtung ab. Die Endpunkte W, O, S, N werden mit gut sichtbaren Gegenständen markiert.

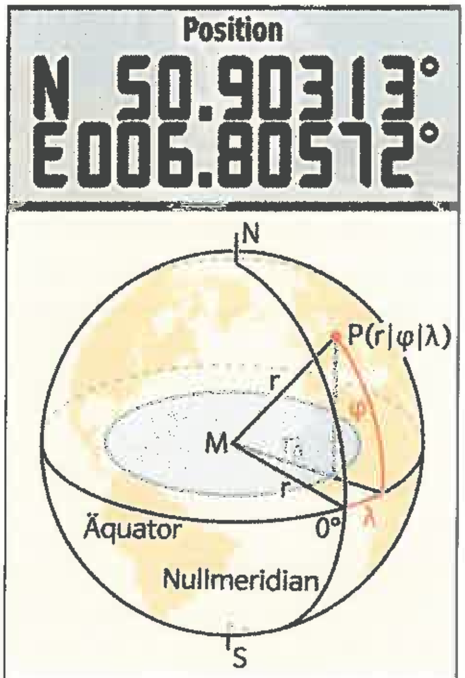
2. Jede Gruppe misst mit einem GPS-Empfänger die geographischen Koordinaten der markierten Positionen

   W (East;North) = (................°; ....°)

   O (East;North) = (................°; ....°)

   S (East;North) = (................°; ....°)

   N (East;North) = (................°; ....°)



Die Lattitude Koordinaten (φ) liegen zwischen -90.000000° und +90.000000°, die Longitude-Koordinaten (λ) liegen zwischen 0.000000° und 360.000000°

aus: Lambacher-Schweizer: – Mathematik für Gymnasien. Qualifikationsphase Leistungskurs. S. 435 © 2011 Ernst Klett Verlag GmbH

3. ... und beantwortet folgende Fragen:

   Bei Wanderung um 30 m

   a) nach Osten verändert sich

      die Koordinate East um ....°

      die Koordinate North um ....°

   b) nach Norden verändert sich

      die Koordinate East um ....°

      die Koordinate North um ....°

4. Wie kannst du am Globus erklären, dass sich in *3b)* trotz gleicher Strecken (30 m) kleinere Winkeländerungen ergeben als in *3a)*?

5. a) Wie weit müsste man Richtung Norden gehen, damit sich die Anzeige „North" um 1° ändert? Das 360-Fache davon ist der Erdumfang. Begründe! Welchen Umfang erhältst du?

   b) Wie weit müsste man Richtung Osten gehen, damit sich die Anzeige „East" um 1° ändert? Das 360-Fache davon ist die Länge deines Breitenkreises. Welchen Wert erhältst du?

6. Wenn man die abgesteckten Strecken mit dem GPS Empfänger abschreitet, erhält man Tracks, die man in Google-Landkarten darstellen und ausmessen kann. Stelle die aufgezeichneten Tracks süd-nord.gpx und west-ost.gpx in einer Landkarte dar und miss mit dem in den Landkarten eingeblendeten Maßstab, ob die abgesteckten Strecken tatsächlich 30 m lang sind.

Das Längenmessungs-Werkzeug steckt bei Google-Maps neben „Center"

In Google-Earth nutzt man zur Längenmessung das Lineal

Klassenstufe: 8–12
Leididee: Messen
Kompetenzen: Problemlösen, Begründen, Argumentieren
Vorkenntnisse: algebraische Umformungen, Dreiecksflächen bzw. Vektorprodukt
Online-Material: Excel-Datei

Die Gauß'sche Schuhbandformel: Wie GPS-Geräte Flächen messen

Wolfgang Riemer

GPS-Geräte zeichnen nicht nur Fahrspuren auf, sie können auch die Größe einer umfahrenen Fläche berechnen. Wie machen Navigationsgeräte das? Wie kann man aus geschlossenen Tracks die umfahrenen Flächen berechnen, wenn man kein Navi besitzt, das man nur abzulesen braucht? C. F. Gauß (1777–1855) entwickelte für dieses Problem eine geniale „Schuhband"-Formel, die auch Google und GeoGebra nutzen, um Flächen zu berechnen, die durch Polygone eingeschlossen werden. In Klasse 8 kann man sie algebraisch begründen, in der Stufe 12 fällt sie beim Vektorprodukt „ab".

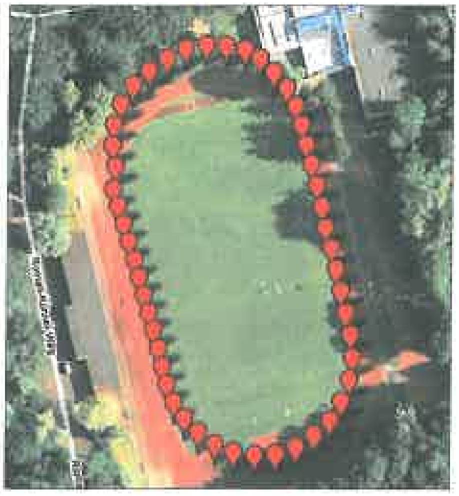


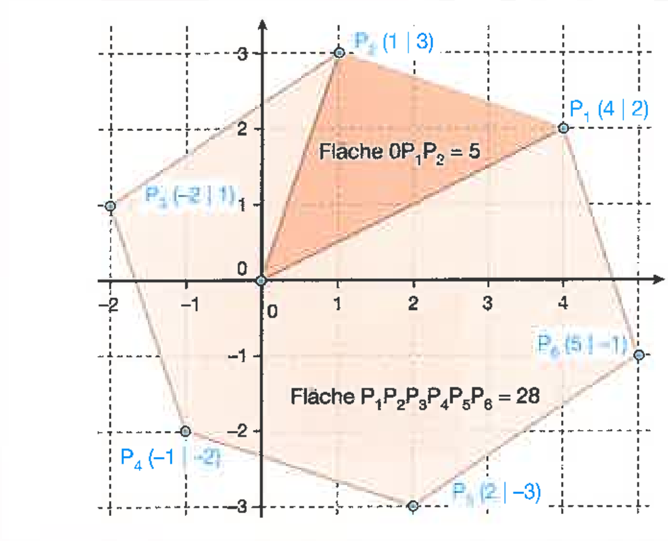
Abb. 1 Für eine Sportplatzrunde ...

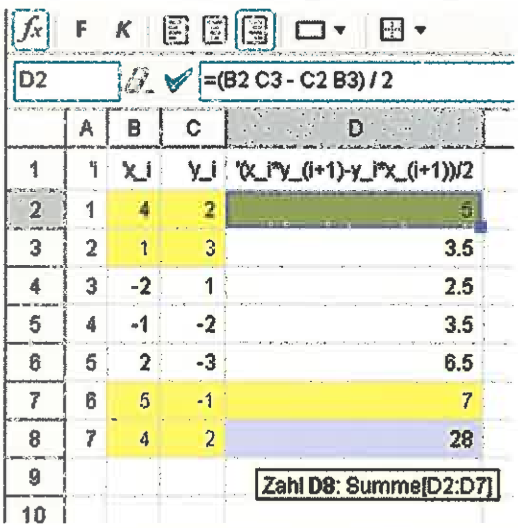
Abb. 2 ... berechnet das Navi 9301,7 m²

Flächenberechnung

Flächenberechnungen eignen sich wunderbar, um im Mathematikunterricht Beziehungen herzustellen. Dabei sind Beziehungen zwischen der Welt der Terme und dem Alltag, ebenso spannend wie innermathematische Beziehungen und erste Begründungs- und Beweisschritte oder Ansätze zu funktionalem Denken. So erlebt man auch bei Schülerinnen und Schülern, die sich nicht besonders für Mathematik interessieren, immer wieder ein Staunen darüber, dass z. B. die Flächenformel für ein Trapez $A = \frac{a+b}{2} \cdot h$ die Flächenformel für das Dreieck ($b = 0$) und die Formel für das Parallelogramm (a = b) enthält, und damit auch die altbekannte Flächenformel für das Rechteck beinhaltet. Wenn man Beziehungen und Zusammenhänge versteht, braucht man sich in der Mathematik mitunter recht wenig zu merken.

C. F. Gauß (1777–1855), der nicht nur als Professor in Göttingen sondern auch als Landvermesser im heutigen Niedersachsen tätig war, hat für die Berechnung von Polygonflächen die „Schuhbandformel" entwickelt. Sie ist in der Anwendung so einfach und so praktisch, dass Tim aus der





	A	B	C	D
1	i	x_i	y_i	'(x_i*y_(i+1)-y_i*x_(i+1))/2
2	1	4	2	5
3	2	1	3	3.5
4	3	-2	1	2.5
5	4	-1	-2	3.5
6	5	2	-3	6.5
7	6	5	-1	7
8	7	4	2	28
9				
10				

Abb. 3: Die Schuhbandformel zur Berechnung einer Dreiecksfläche. GeoGebra besitzt ein Werkzeug zur Berechnung von Polygonflächen, das das gleiche Ergebnis (28) liefert

8b sich den Ausruf „genial“ nicht verkneifen konnte, als er verstanden hatte, wie sie funktioniert. Mathematiklehrerinnen und Mathematiklehrer schätzen an dieser Formel besonders ihre „Beziehungshaltigkeit“.

Nach einer Einführung in die Schuhbandformel soll sie aus dem Blickwinkel der Vektorrechnung (mittels Vektorprodukt), und aus dem Blickwinkel der Integralrechnung (mit Trapezsummen) begründet werden. Wie man sie auch schon in der Mittelstufe mit Termumformungen einsichtig machen kann, zeigt *Kasten 1.* Es geht aber auch ganz ohne Termumformungen, wie der Beitrag von Schubert im vorliegenden Heft belegt. Anschließend soll bei einem Sprung in die Wirklichkeit eines Sportplatzes die Genauigkeit der Flächenmessung mit GPS-Messgeräten unter die Lupe genommen werden. Man erlebt die Schuhbandformel „in Aktion“. Dazu gibt es eine Kopiervorlage.

Die Schuhbandformel

Wie die Schuhbandformel zur Flächenberechnung von Polygonen arbeitet, entnimmt man *Abb. 3* am Beispiel eines Sechsecks. Man nummeriert die Eckpunkte $P_1, P_2, \ldots, P_6$ entgegen dem Uhrzeigersinn durch und schreibt die Koordinaten paarweise untereinander wie in den Spalten B und C von *Abb. 3.* Der erste Punkt wird als letzter nochmals hinzugefügt $(P_7 = P_1)$. Nun werden die Koordinaten „über Kreuz“ – nach dem Schema $z_1 = \frac{1}{2}(x_1 \cdot y_2 - y_1 \cdot x_2)$ (gelb unterlegt) miteinander multipliziert. Man erhält Spalte D aus *Abb. 3.* (In *Abb. 3* enthält die markierte Zelle D2 die Formel $\frac{(B2 \cdot C3 - C2 \cdot B3)}{2}$ mit dem Wert $\frac{(4 \cdot 3 - 2 \cdot 1)}{2} = 5.$ Dies ist der Inhalt des Teildreiecks OP_1P_2.)

Die Summe der Zellen D1 bis D7 ist die Fläche des Sechsecks. Sie hat den Wert 28 und steht in Zelle D8 (blau markiert).

Das „Über-Kreuz-Multiplizieren“, das an das Schnüren eines Schuhs erinnert, gibt der Formel den Namen „Schuhbandformel“. Mit Summenzeichen schreibt man:

$$A = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{6} (x_i \cdot y_{i+1} - y_i \cdot x_{i+1})$$

Begründung der Schuhbandformel mittels Vektorrechnung

Aus der Vektorrechnung weiß man, dass die Länge des Vektorproduktes zweier Vektoren der orientierten Fläche des Parallelogramms gleicht, das von diesen Vektoren aufgespannt wird.

Wenn man das Vektorprodukt aus den komplanaren Ortsvektoren zweier aufeinander folgender Polygonpunkte, etwa $\overrightarrow{OP_1}$ und $\overrightarrow{OP_2}$ als

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1 \end{pmatrix}$$

berechnet und die Ergebnisse, die sich als reelle Zahlen deuten lassen, halbiert, erkennt man (vgl. *Abb. 3*), dass es sich bei den Summanden der Schuhbandformel um die Teildreiecksflächen handelt, die sich zur gesamten Polygonfläche addieren. Mit dem Vektorprodukt kennt man also gleichzeitig auch die Schuhbandformel.

Abb. 4 zeigt, dass die Herleitung ihre Gültigkeit behält, wenn der Ursprung außerhalb des Polygons liegt, denn dann gibt es (außerhalb des Polygons liegende) Dreiecke, deren Fläche beim Summieren ein negatives Vorzeichen bekommen. Die Polygonfläche entsteht als Flächendifferenz.

Begründung der Schuhbandformel mit Trapezsummen

Man kann den Flächeninhalt des Polygons auch mithilfe von Trapezen berechnen. Wie *Abb. 5* zeigt, gilt

$$A = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{6} (x_i - x_{i+1}) \cdot (y_i + y_{i+1}).$$

Wenn man dabei eine „obere“ Kante „von rechts nach links“ durchläuft, zählen die zugehörigen Trapezflächen positiv, denn es gilt $x_i > x_{i+1}$. Die Trapezflächen unter dem Polygon zählen negativ und werden subtrahiert. Insgesamt bleibt beim Summieren die „Innenfläche“ des Vielecks übrig. Hieraus ergibt sich die Schuhbandformel wie folgt

$$2A = \sum_{i=1}^{6} (x_i - x_{i+1}) \cdot (y_i + y_{i+1}) =$$

$$\sum_{i=1}^{6} (x_i y_{i+1} - y_i x_{i+1}) + \underbrace{\sum_{i=1}^{6} (x_i y_i - x_{i+1} y_{i+1})}_{=0} =$$

$$\sum_{i=1}^{6} (x_i y_{i+1} - y_i x_{i+1})$$

Wie man die Schuhbandformel mit einer Termumformung auch schon in der Mittelstufe einsehen kann, zeigen die Beispielaufgaben in *Kasten 1.*

Der Sprung in die Wirklichkeit – Eigene Experimente

Die Schuhbandformel wurde von Gauß für die Landvermessung erfunden. Was liegt also näher, als sie in der Wirklichkeit bei einer Runde auf dem Sportplatz zu erproben oder zu untersuchen, wie genau man die Kreiszahl π beim Durchfahren eines Verkehrskreisels mit einem GPS-Empfänger messen kann? Die *Kopiervorlage* liefert Anregungen für eigene Experimente und Fragestellungen.

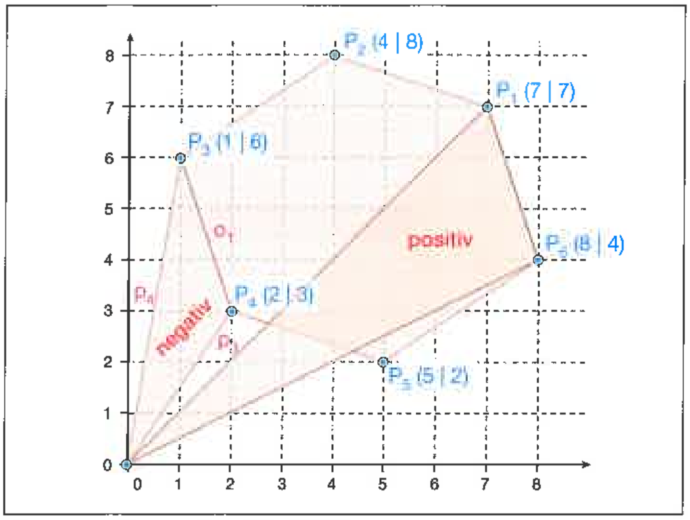


Abb. 4: Berechnung über Dreiecksflächen

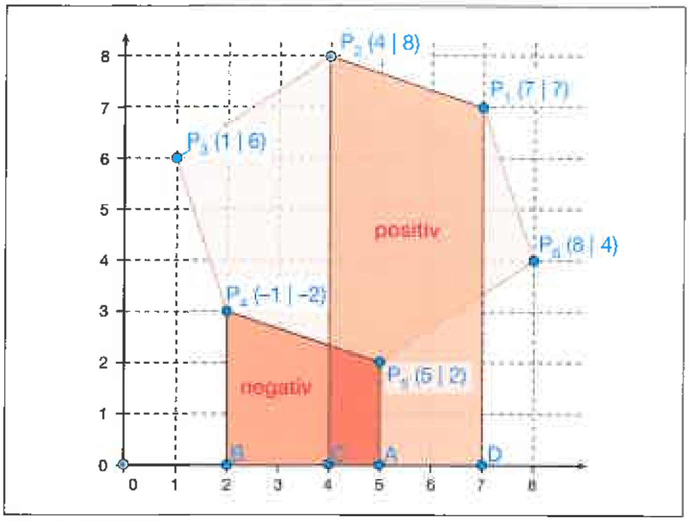


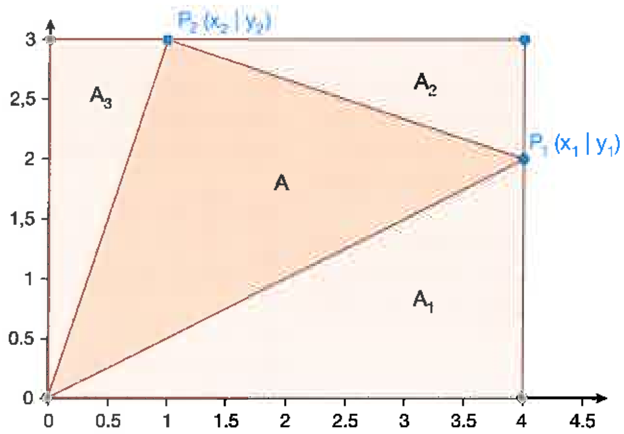
Abb. 5: Berechnung über Trapezflächen

Wie man in *Abb. A* der *Kopiervorlage* sieht, speichern GPS-Geräte die Positionen bis auf Millionstel Grad ab. Das entspricht in N-S-Richtung überall auf der Erde einer aufgezeichneten Genauigkeit von Δy = 0,111 m (Zelle F4) und in W-O-Richtung in Deutschland Δx = 0,070 m (Zelle E4).

In der Mittelstufe wird man die Umrechnung der (von GPS-Empfängern gelieferten) Kugelkoordinaten in kartesische Koordinaten durch die Tabellenkalkulationsvorlage als Black Box bewerkstelligen. Oder man teilt die Umrechnungsfaktoren 0,111 bzw. 0,070 einfach mit. Die Umrechnung mithilfe von Winkelfunktionen wird in dem Beitrag „GPS-Daten aufarbeiten – eine Gebrauchsanweisung“ im vorliegenden Heft beschrieben. Aus den Positionen (Spalten E und F) berechnet man dann die Gesamtfläche der Sportplatzrunde in Spalte G. In diesem Beispiel erhält man 10242,9 m². Dieser Wert ist verglichen mit der Normfläche (vgl. *Kopiervorlage*) ($36{,}5^2 \cdot \pi + 2 \cdot 36{,}5 \cdot 84{,}39$) m² ≈ 10 346 m² um 1 % zu klein. Die Messung aus *Abb. 2* ist mit 9301,7 m² ist um 9 % zu klein. Die Bestimmung von π durch Verkehrs-Kreiselfahrten mit GPS-Empfängern liefert in der Regel Abweichungen, die deutlich unter der 10 %-Marke liegen.

Kontrollieren der Schuhbandformel

a) Überzeuge dich am Beispiel des Sechsecks aus *Abb. 3* durch stichprobenartiges Nachrechnen davon, dass die Summanden der Schuhbandformel die Flächen der Teildreiecke darstellen, die durch Verbinden des Ursprunges mit den Polygonecken entstehen.



Teildreieck OP_1P_2

b) Die Abbildung zeigt ein „beliebiges“ Dreieck $A = OP_1P_2$ mit einer Ecke im Ursprung, dem ein Rechteck R umschrieben wurde. Die Dreiecksfläche erhält man, indem man von der Rechteckfläche die Flächen A_1, A_2, A_3 dreier rechtwinkliger Dreiecke subtrahiert.

Kommentiere jeden Schritt der folgenden Termumformung und begründe damit die Gültigkeit der Schuhbandformel in Stichworten.

$$A = R - A_1 - A_2 - A_3$$
$$= x_1y_2 - \frac{1}{2}x_1y_1 - \frac{1}{2}(x_1 - x_2)(y_2 - y_1) - \frac{1}{2}x_2y_2$$
$$= x_1y_2 - \frac{1}{2}x_1y_1 - \frac{1}{2}x_1y_2 + \frac{1}{2}x_1y_1 - \frac{1}{2}x_2y_1 + \frac{1}{2}x_2y_2 - \frac{1}{2}x_2y_2$$
$$= \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1)$$

Kasten 1: Beispielaufgaben: Elementare Kontrolle der Schuhbandformel

Literatur zum Weiterlesen

Riemer, W. (2009): Dem Navi auf der Spur: MNU 62/8, S. 468–477

Riemer, W. (2010): Bewegungen mit GPS untersuchen, Grundvorstellungen der Analysis „erfahren“. mathematik lehren 160, S. 54–58

Jörgens, T. et al. (2010): Lambacher Schweizer Einführungsphase, Stuttgart: Klett (auf www.klett.de den Online-Link 734401-2441 eingeben)

Freudigmann, H. (2011): Lambacher-Schweizer Qualifikationsphase, Stuttgart: Klett (auf www.klett.de den Online-Link 735301-3881 eingeben)

Verfasser:
Dr. Wolfgang Riemer
Zentrum für schulpraktische Lehrerausbildung Köln
w.riemer@arcor.de

PM / Thema: MIT POSITIONEN RECHNEN – GPS im MATHEMATIKUNTERRICHT NUTZEN // Heft 53 / 55. Jahrgang / 2013

Die Schuhbandformel auf dem Sportplatz

Die Abmessungen von Sportplätzen sind durch DIN-Normen vorgeschrieben, wie in *Abb. B* zu sehen. Bei einer Kampfbahn des Typs B handelt es sich um ein Oval mit Innenbahnradius 36,5 m und Geradenlänge 84,39 m.

a) Berechne die Fläche, die ein Läufer bei einer Runde auf der Innenkante der Innenbahn eines solchen Platzes umrundet.

b) Radle selbst mit einem GPS-Empfänger in der Tasche eine Runde um den Sportplatz.

c) Kopiere die von dem Empfänger (z. B. im Sekundenabstand) aufgezeichneten Positionen in die Vorlage aus *Abb. A,* die die Kugelkoordinaten (Lat, Lon) in Grad in kartesische Koordinaten *(x, y)* in Meter umwandelt. Der Ursprung *O* = (Lon0;Lat0) des Sportplatz-Koordinatensystems liegt hier in der Mitte des Spielfeldes bei

$$O\left(\frac{\min(B1:B51)+\max(B1:B51)}{2}\middle|\frac{\min(C1:C51)+\max(C1:C51)}{2}\right)\ \text{(Zelle B4, C4).}$$

d) Lösche überflüssige Track-Punkte deiner Aufnahme, sodass du genau eine geschlossene Runde erhältst, wobei der erste Trackpunkt am Ende als letzter wiederholt wird, wie es die Schuhbandformel fordert.

e) Berechne die umfahrene Fläche und vergleiche mit dem „theoretischen Wert", der sich aus der DIN-Norm ergeben würde. Gib die Abweichungen in Prozent (bezogen auf den DIN-Wert) an.

E6 fx =(C6-C$4)*E$4*1000000

	A	B	C	D	E	F	G
4		50.933918	6.882282		0.070	0.111	
5		Lat	Lon	Time	x (m)	y (m)	m²
6	1	50.934124	6.881637	10:13:30	-45.2	22.9	
7	2	50.934067	6.881664	10:13:31	-43.3	16.6	243.1
8	3	50.934008	6.881694	10:13:32	-41.2	10.0	249.2
9	4	50.933947	6.881723	10:13:33	-39.2	3.2	259.1
10	5	50.933887	6.881752	10:13:34	-37.1	-3.4	254.7
11	6	50.933826	6.881779	10:13:35	-35.2	-10.2	258.4
12	7	50.933763	6.881807	10:13:36	-33.3	-17.2	266.9
13	8	50.933704	6.881835	10:13:37	-31.3	-23.8	252.1
14	9	50.933644	6.881861	10:13:38	-29.5	-30.5	252.3
15	10	50.933582	6.881886	10:13:39	-27.7	-37.4	256.7
16	11	50.933522	6.881911	10:13:40	-26.0	-44.0	250.5
17	12	50.933459	6.881939	10:13:41	-24.0	-51.0	268.4
18	13	50.933399	6.881977	10:13:42	-21.4	-57.7	296.2
19	14	50.933344	6.882034	10:13:43	-17.4	-63.8	361.1
20	15	50.933296	6.882111	10:13:44	-12.0	-69.2	437.0
21	16	50.933256	6.882202	10:13:45	-5.6	-73.6	494.2
22	17	50.933229	6.882304	10:13:46	1.5	-76.6	542.8
23	18	50.933218	6.882415	10:13:47	9.3	-77.8	593.9
24	19	50.933224	6.882529	10:13:48	17.3	-77.2	627.8
25	20	50.933247	6.882636	10:13:49	24.8	-74.6	622.7
26	21	50.933286	6.882731	10:13:50	31.5	-70.3	604.1
27	22	50.933338	6.882815	10:13:51	37.3	-64.5	595.4
28	23	50.933402	6.882878	10:13:52	41.8	-57.4	550.4
29	24	50.933476	6.882918	10:13:53	44.6	-49.1	504.3
30	25	50.933552	6.882934	10:13:54	45.7	-40.7	431.6
31	26	50.933629	6.882923	10:13:55	44.9	-32.1	359.7
55	50	50.934274	6.88163	10:14:19	-45.7	39.6	395.7
56	51	50.934202	6.881646	10:14:20	-44.6	31.6	321.3
57	1	50.934124	6.881637	10:13:30	-45.2	22.9	406.3
58						Σ/2	10242.9

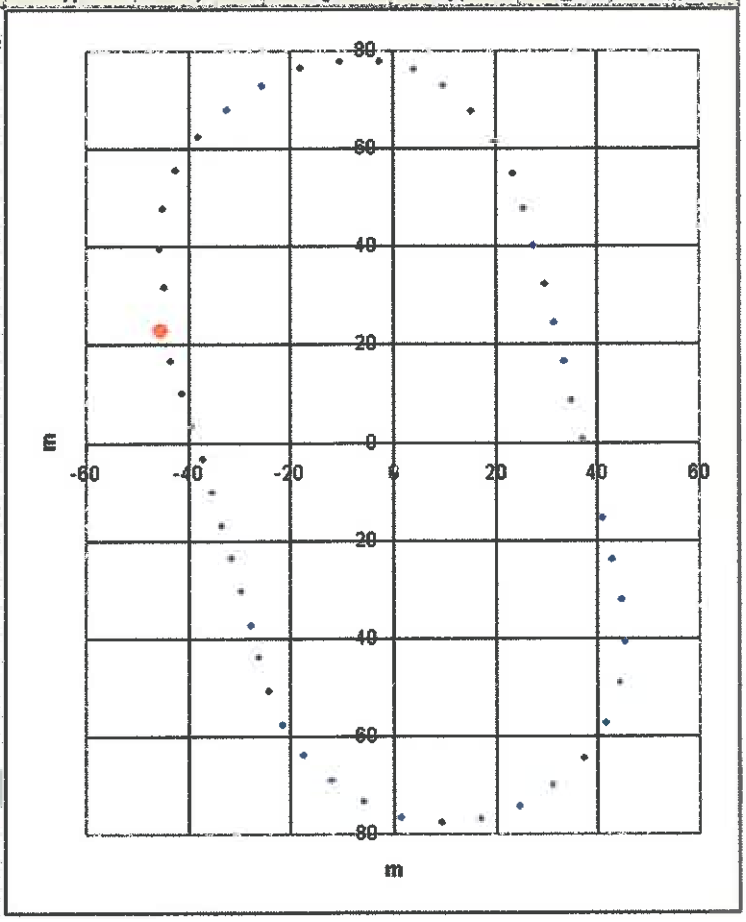


Abb. A: Sportplatzrunde als Excel-Landkarte mit markiertem Startpunkt und Ursprung in der Mitte

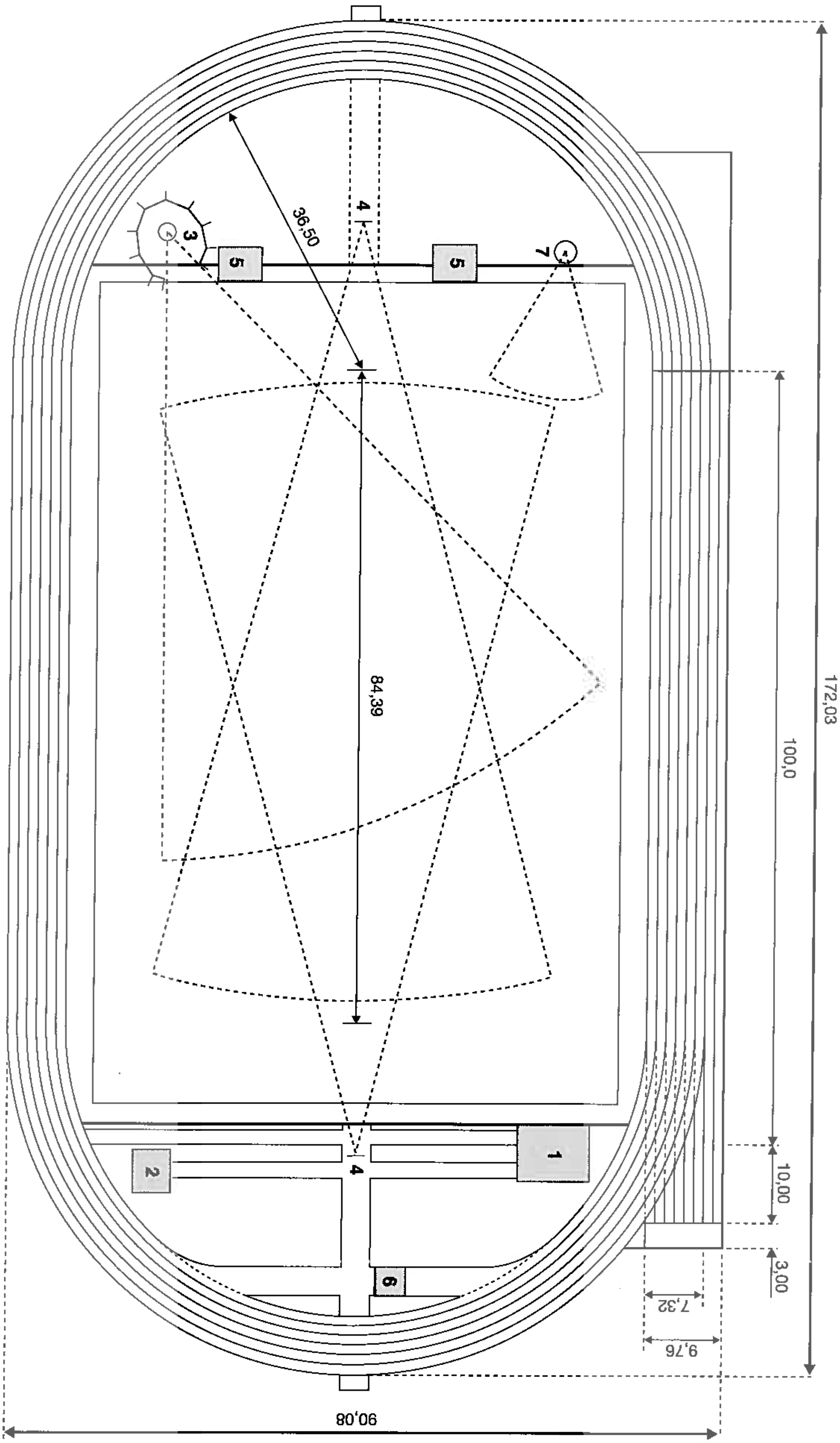


Abb. B: Maße eines Sportplatzes; Kampfbahn Typ B

© verändert nach: K+S Sportstätten Service West

Flächenberechnung mit GPS-Daten

Ein Projekt zur Begabtenförderung in der Stufe 6

Volker Schubert

Die Anwendung der Gauß'schen Schuhbandformel zur Bestimmung einer Sportplatzfläche auf der Basis von GPS-Daten stellt Lernende der Jahrgangsstufe 6 vor Herausforderungen, die viele ihrer jahrgangsspezifischen Kompetenzen vertiefen können. Ausgehend von Flächenberechnungen auf dem Geobrett wird ein geometrischer Zugang entwickelt, der auf die symbolische Darstellung mit Variablen verzichtet. Die Durchführung des kompletten Projektes wurde im Rahmen einer Akademie zur Begabtenförderung erprobt und bietet auch Anregungen für höhere Jahrgänge.

Schuhbandformel schon in Stufe 6

Die Berechnung von Flächen aus GPS-Daten über die Schuhbandformel, die im Beitrag von Riemer im vorliegenden Heft weiter vorne beschrieben wird, lässt sich als Projekt für eine Gruppe besonders begabter Sechstklässler nutzbar machen. Die äußeren Bedingungen der Schülerakademie für Mathematik in Ostwestfalen-Lippe (SAM-OWL), die das Weser-Gymnasium Vlotho alljährlich über zweieinhalb Tage im Jugendhof Vlotho ausrichtet, sind für dieses Projekt ideal. Ein Sportplatz vor der Tür bietet sich zum Vermessen an. Allerdings sollte am Anfang möglichst händisches Geometrie-Treiben und kein Bedienen einer Black Box stehen. Aus dieser Spannung heraus ist schließlich ein Projekt entstanden, das den Lernenden über ca. 9 Zeitstunden mathematische Aktivitäten bietet. Danach wurden die Ergebnisse zur Präsentation vor den Eltern und der Öffentlichkeit medial aufbereitet und zu einem gut zehnminütigen Vortrag verdichtet.

Neben der Begabtenförderung soll die Schülerakademie SAM-OWL einen Beitrag zur Ausbildung der mitwirkenden Referendarinnen und Referendare leisten und der Weiterentwicklung des schulischen Fachunterrichts Impulse geben (für mehr Informationen vgl. die Internetlinks am Ende). Die Arbeit mit besonders begabten Kindern liefert sonst schwer zu erlangende Einblicke in das schlummernde Potenzial von Lernenden und trägt dazu bei, die altbekannte Maxime zu erproben, dass jedem Kind auf jeder Entwicklungsstufe jeder Lerngegenstand in einer intellektuell ehrlichen Form gelehrt werden kann (Bruner 1970, S.44). Dieser Gedanke stand auch Pate für die nachfolgenden Überlegungen.

Vom Geobrett zur Schuhbandformel

Das Thema „Flächenberechnung" ist im Unterricht der Erprobungsstufe gut verankert. Viele Schülerinnen und Schüler der Stufe 6 verfügen über Zerlegungs- und Aussparungsstrategien und können Flächen von Dreiecken durch Verdoppeln bestimmen. Damit lässt sich ein offener Einstieg mit gezielten Erkundungsaufgaben für das Geobrett realisieren. So sollen z. B. Quadrate zu gegebenen Flächeninhalten oder Figuren mit jeweils minimalem Flächeninhalt gespannt werden. Eingeschlossen sind auch Flächenberechnungen für beliebige Dreiecke. In dieser Phase ist es wichtig, nicht zu rasch in die erste Systematisierung einzusteigen, da den jungen Lernenden das mathematiktypische Vorgehen der Reduktion komplexer auf elementare Fälle nicht von vornherein gewinnbringend erscheint, sondern die Freude am Problemlösen im Vordergrund steht.

Eine schwierige Hürde ist naturgemäß die Flächenberechnung beliebiger Dreiecke, welche den Kern der Schuhbandformel ausmacht. Damit diese für die Lernenden nicht „vom Himmel fällt", ist man quasi zum Beweis „verdammt". Auch muss eine der Jahrgangstufe angemessene nicht-symbolische Repräsentation gefunden werden. Dies funktioniert auf rein geometrischem Wege. Zunächst die Aussage selbst in anschaulicher Form, wie sie in *Abb. 1* dargestellt ist: Die Dreiecksfläche OP_1P_2 ist gleich der Hälfte der Differenz aus der großen grünen und der kleinen ro-

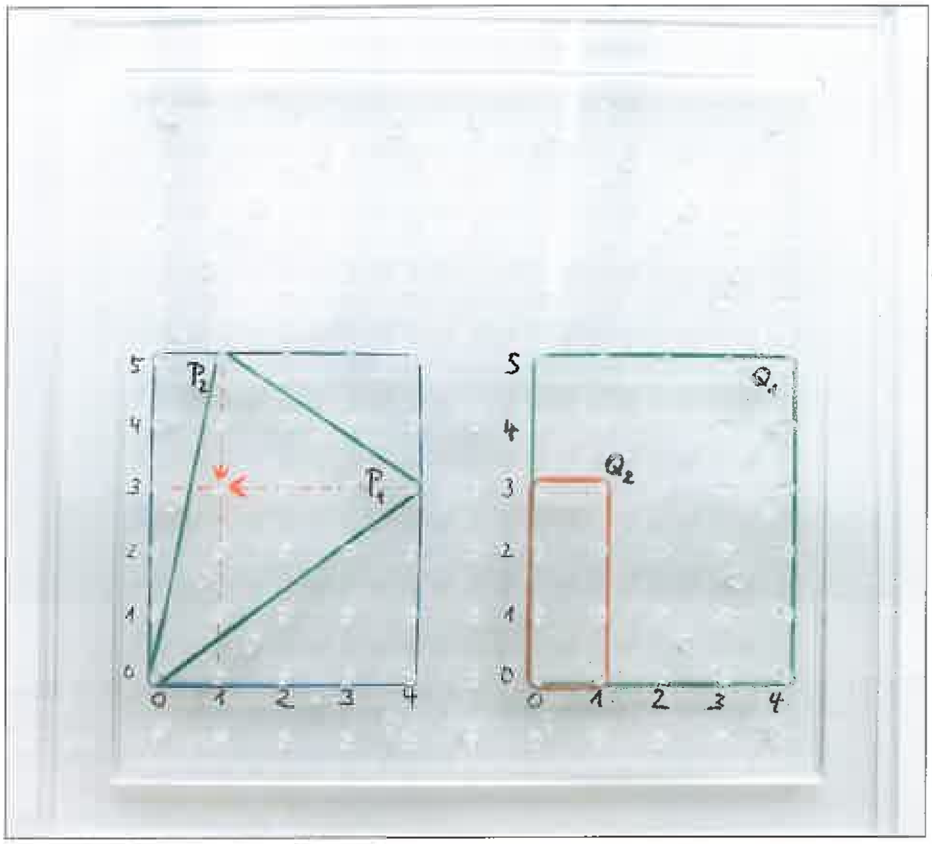


Abb. 1: Das Geobrett wurde zur Präsentation der Grundidee der Schuhbandformel bespannt

ten Rechteckfläche, erkennbar an den beschrifteten Ecken Q_1 bzw. Q_2.

In Koordinaten von $P_1 = (x_1 | y_1)$ und $P_2 = (x_2 | y_2)$ ausgedrückt ist dies die halbe Determinante $\frac{1}{2} \cdot (x_1y_2 - x_2y_1)$, aber dieser Term taucht für die Schülerinnen und Schüler nirgends auf. Die nachstehende Herleitung aus *Abb. 2* lässt sich gut auf dem Geobrett oder mit farbigen Folien illustrieren. Positive Flächen werden hier grün, negative rot dargestellt.

Um aus dem umgebenden großen Rechteck das Dreieck herauszuschneiden, muss man drei rechtwinklige Dreiecke außen herum abschneiden. Deren Flächen berechnen die Lernenden als halbe Fläche eines entsprechenden Rechtecks (rot). Die entscheidende Idee ist, sich diese halbe Fläche nun als Rechteck mit halbem Gewicht vorzustellen, sozusagen nur zu 50 % eingefärbt, wie man dies aus Grafikprogrammen kennt. Schaut man, was übrig bleibt, so erhält man das große grüne Rechteck mit halbem Gewicht, wobei jedoch links unten ein Rechteck fehlt, da seine Fläche zweimal mit halbem Gewicht abgezogen wurde. Diese Überlegungen können nicht selbstständig von den Lernern entdeckt werden. Sie können aber diese grafische Herleitung mit eigenen Worten beschreiben und die Idee verstehen.

Das obige Argument unterliegt jedoch einer geometrischen Einschränkung, die begabte Kinder recht bald herausfinden: Die Ecke P_2 muss in *Abb. 1* links oberhalb von P_1 liegen, wenn man im Gegenuhrzeigersinn beschriftet. Mithilfe einer Scherung ließe sich diese Einschränkung beseitigen, wenn man die Invarianz der Determinante nachweisen könnte. Ohne Termumformungen kommt man an dieser Stelle aber nicht weiter, sodass das Problem in Stufe 6 nicht weiter verfolgt wird, sondern einem Projekt etwa für die Jahrgangstufe 8 vorbehalten bleibt. Stattdessen können die Lernenden die Erfahrung machen, dass ein Kalkül häufig noch weit über die Situation hinaus trägt, in der er entwickelt wurde.

Zur Propädeutik des Variablenbegriffs und zum Rechnen mit ganzen Zahlen

Die Variation eines Rechenvorgangs stößt die Entwicklung des Variablenbegriffs an. In *Kasten 1* geschieht dies zunächst in Form eines algorithmischen Schemas, dessen Positionen in einem späteren Entwicklungsstadium mit Buchstaben benannt werden könnten, klassischerweise als Platzhalter bezeichnet. Entscheidender als die symbolische Darstellung ist aber, ob Lernende sich die betreffenden Positionen als Variable im Sinne des von Malle (1993, S. 44 ff) beschriebenen Einsetzungsaspektes denken. Schreitet man von Dreiecken zu Polygonen fort, so stellt die Schuhbandformel ein einfaches Kreuzschema dar, das sich mit farbigen Strichen (grün – positiv, rot – negativ) visualisieren lässt. Die Koordinaten werden, bildlich gesprochen, auf die Ösen gesetzt und das Schuhband wird dann durchgezogen. Die Programmierung des entsprechenden Terms mittels Tabellenkalkulationsprogramm durch Anklicken der gewünschten Zellen ist ein analoger Vorgang, wobei hier bereits Namen für die Variablen ins Spiel kommen. Damit vollzieht sich beim Arbeiten mit dem Programm unwillkürlich der Übergang von einer enaktiven zu einer symbolischen Termdarstellung.

Bei der Anwendung der Schuhbandformel auf Polygone hätten sich durch die Wahl des Koordinatenursprungs negative Koordinaten zwar vermeiden lassen, dies hätte jedoch im Gegenzug zu negativ orientierten Flächen geführt. Daher wurde stets angenommen, dass der Startpunkt beim Laufen zugleich als Koordinatenursprung fungieren sollte. Von dort aus lässt sich der Sportplatz fächerförmig in schmale Dreiecke aufteilen, wie eine von einem Schüler erstellte Präsentation zeigt (vgl. *Abb. 3*). Hält man sich an den Gegenuhrzeigersinn, so ergeben sich nur positiv orientierte Flächen, weil das Polygon keine einspringende Ecke hat (Vertiefungsmöglichkeit). Bevor es an die professionelle Auswertung von GPS-Daten mit dem Rechner ging, wurde das Schuhbandschema im „Kopfrechenmodus" an Siebenecken erarbeitet und am Rechner als Einstiegsbeispiel wiederholt,

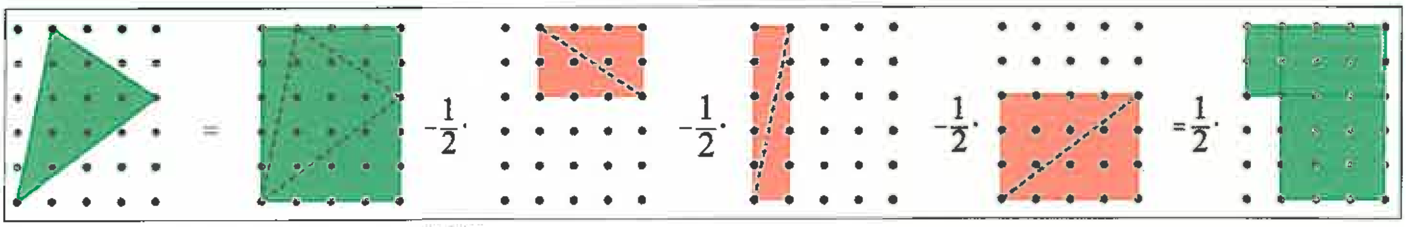


Abb. 2: Herleitung der Schuhbandformel für Dreiecke

$$\begin{matrix} P_1\,(4\,|\,3) \\ P_2\,(1\,|\,5) \end{matrix} \;\rightarrow\; \begin{matrix} Q_1\,(4\,|\,5) \\ Q_2\,(1\,|\,3) \end{matrix} \;\rightarrow\; 4\cdot 5 - 1\cdot 3 = 20 - 3 = 17 \;\rightarrow\; \frac{17}{2} = 8{,}5$$

Kasten 1: Rechenschema für die Differenz der Rechteckflächen

sodass auch ein gewisses Vertrauen zu den geometrisch nicht mehr direkt einsichtigen Rechnungen mit negativen Koordinaten aufgebaut wurde. Wieder wurde vermittelt, dass ein Kalkül noch über die Situation hinaus trägt, in der er entwickelt wurde. Die Invarianz der Schuhbandformel unter Verschiebungen wurde nebenbei von einzelnen Schülern entdeckt, wobei sie auch schon bemerkten, wie dies mit dem Schuhbandschema durch Addition und Subtraktion gleicher Summanden funktioniert.

Mit dem Dreisatz vom Globus zum metrischen Koordinatensystem

Es ist auch unter fächerübergreifenden Aspekten gewinnbringend, die Umrechnung der aufgezeichneten GPS-Daten in kartesische Koordinaten nicht vorzugeben, sondern mit den Schülerinnen und Schülern am Globus zu erarbeiten. Die historische Definition des Meters als 40-millionster Teil des Erdumfanges erlaubt eine Dreisatzrechnung: Teilt man 360° durch 40 Mio., so erhält man für einen Meter 9 Millionstel Grad. Da das benutzte GPS-Gerät ganzzahlige Daten in Millionstel Grad ausgibt, kann man diese Zahl mit der Längeneinheit $\frac{1}{9}\text{m} = 0{,}\overline{1}\text{m} \approx 11{,}1\text{cm}$ multiplizieren. Auf dem Globus erkennt man aber auch, dass die Längenkreise enger beisammen liegen als die Breitenkreise. Diesen Verkürzungsfaktor kann man aus den Proportionen einer Gittermasche bestimmen, die man mit transparenter Folie vom Globus abzeichnen oder unter Google Earth ausdrucken kann. Da die Lernenden in unserem Projekt aus der Bruchrechnung keinen Verhältnisbegriff mitbrachten und auch die geometrische Vorstellung eines Streckfaktors fehlte, musste erneut eine Dreisatzrechnung durchgeführt werden. Dies lässt sich vereinfachen, wenn man eine Gittermasche von 0,0036° mal 0,0036° im Maßstab 1 : 3600 ausdruckt, sodass sie in Nord-Süd-Richtung 11,1cm misst. Die z. B. für Vlotho in Ost-West-Richtung gemessenen 8,6 cm geben dann die Länge für ein Millionstel Grad in Ost-West-Richtung an.

Die Arbeit mit Medien

Es zeigte sich bei der Wahl der Projekte, dass sich Lernende mit starkem Interesse an technisch-informatischen Medien durch das Thema angesprochen fühlen. Die GPS-Technik konnte jedoch im Rahmen des Projektes nicht vertieft werden. Die Aufbereitung und Konvertierung der Daten des GPS-Gerätes (es wurde der miniHomer der Firma Znex nebst zugehöriger Software benutzt) musste in Lehrerhand bleiben, jedoch konnten die Schülerinnen und Schüler die Laufbahn in der Google-Maps-Darstellung direkt mit der von ihnen selbst erstellten Darstellung unter Excel vergleichen. Wenn – wie in der Akademie – Schülerinnen und Schüler sehr unterschiedliche Kenntnisse im Bereich der Tabellenkalkulation mitbringen, ist bei der Programmierung eine engere Lenkung erforderlich. So wurde in *Abb. 4* für jeden Schritt eine neue Spalte eingerichtet, damit die Bedeutung der Eingaben mitvollzogen werden kann und anschließend auch selbstständig Eingaben möglich werden. Zu beachten ist die Reihenfolge der Geokoordinaten: erst Nord (y-Wert), dann Ost (x-Wert).

Rückschau

Auf dem Weg von der Flächenberechnung am Geobrett bis zur Auswertung von GPS-Daten wurden viele inhaltliche Kompetenzbereiche der Jahrgangsstufen 5 und 6 in einem fachübergreifenden Kontext vernetzt. Besonders wurde das Verständnis für Koordinaten vertieft. Der Abstraktions- und Formalisierungsgrad blieb auch an schwierigen Stellen dem Entwicklungsstand von Schülerinnen und Schülern angemessen, die noch nicht auf den Kalkül der Buchstabenalgebra zurückgreifen können. Dabei wurde deutlich, wie weit man allein durch geometrische Überlegungen und grafische Darstellungen kommen kann.

Literatur

Bruner, J. S. (1970): Der Prozess der Erziehung. Berlin Verlag, Berlin

Malle, G. (1993): Didaktische Probleme der elementaren Algebra. Vieweg, Braunschweig

Schülerakademie Mathematik Münster: http://www.samms.nrw.de. Zugriff Mai 2013

Schülerakademie Mathematik SAM-OWL: http://www.bezreg-detmold.nrw.de/400_WirUeberUns/030_Die_Behoerde/040_Organisation/040_Abteilung_4/030_Dezernat_43/Unterrichtsfaecher/Schuelerakademie/index.php. Zugriff Mai 2013

Hinweis

Detailliertere Arbeitsunterlagen können Interessierte beim Verfasser per Mail anfordern.

Verfasser

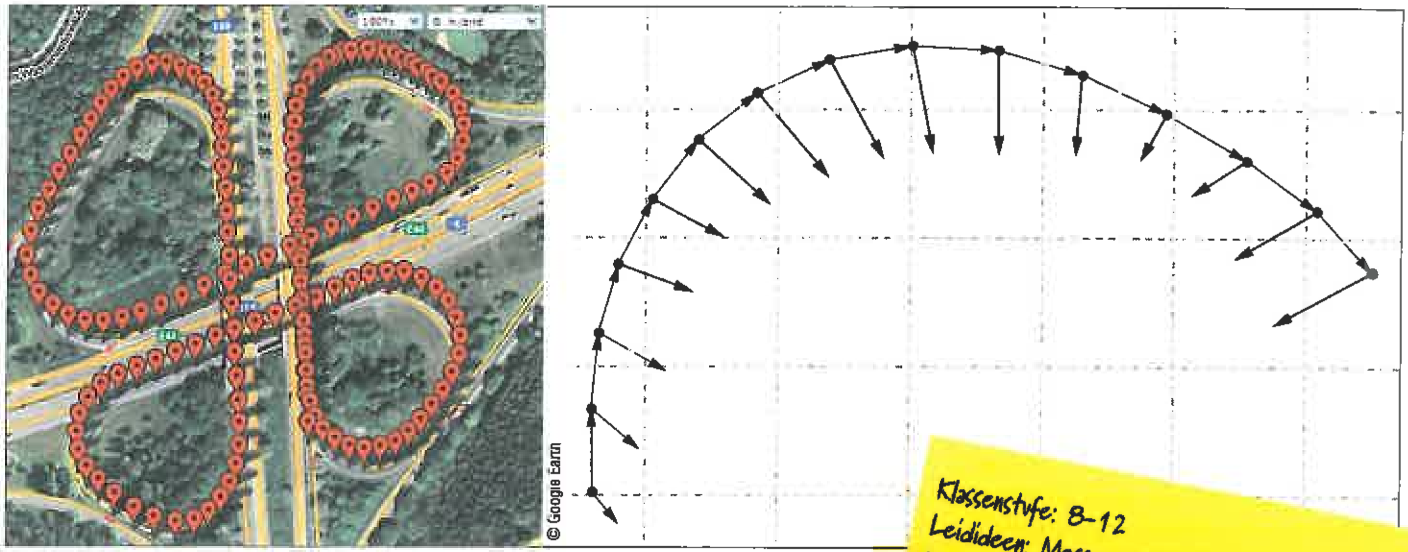
Dr. Volker Schubert
Weser-Gymnasium Vlotho
v.schubert@teleos-web.de

Abb. 3: Mit dem unter Excel erzeugten Bild der Laufbahn wird die Idee der Triangulierung verdeutlicht

	A	B	C	D	E	F	G
127	52.172.217	8.856.029	-466	730	-51,78	49,61	99,58
128	52.172.235	8.856.048	-448	749	-49,78	50,90	83,04

Spalte A: Breitengrad in Nordrichtung in Millionstel Grad
Spalte B: Längengrad in Ostrichtung in Millionstel Grad
Spalte C: Abweichung vom Startpunkt in Nordrichtung in Millionstel Grad
Spalte D: Abweichung vom Startpunkt in Ostrichtung in Millionstel Grad
Spalte E: Abweichung vom Startpunkt in Nordrichtung in m
Spalte F: Abweichung vom Startpunkt in Ostrichtung in m
Spalte G: Fläche eines Teildreiecks in m²

Abb. 4: Aufbau des Tabellenblattes



Im Autobahnkreuz Köln-Süd wirken auf den Fahrer beachtliche „Kraft-Vektoren" (Ausschnitt aus der Schleife oben rechts)

Klassenstufe: 8–12
Leitideen: Messen, funktionaler Zusammenhang
Kompetenzen: Kommunizieren; Mathematische Darstellungen verwenden
Online-Material: 2 Excel-Dateien, 1 gpx-Datei, Kasten 1 und Kasten 3

Mit GPS und Vektoren in die Kurve

Wolfgang Riemer

Vektorrechnung verbindet man mit analytischer Geometrie, mit Geraden, Ebenen, Normalenvektoren und Schnittwinkeln. Eine neue und spannende Dimension der Vektorrechnung eröffnet sich, wenn man aus GPS-Positionen Vektorketten bildet. Man berechnet daraus Kurvenradien, Drehgeschwindigkeiten, Beschleunigungen und Fliehkräfte quer zur Fahrtrichtung, Kräfte, die in einer Rechtskurve den Beifahrer in Richtung Fahrer ziehen und die Reifen zum Quietschen bringen können.

Sinnstiftender Mathematikunterricht mit „Gefühl und Verstand"

Wenn man mit einem GPS-Empfänger in der S-Bahn geradeaus fährt und Wege, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen zueinander in Beziehung setzt, entdeckt man die gundlegenden Zusammenhänge zwischen einer Funktion und ihren Ableitungen. Man arbeitet im Kernbereich der Analysis. Wenn man aber Kurvenfahrten protokolliert, lassen sich zusätzlich höchst interessante Größen wie Drehgeschwindigkeit, Querbeschleunigung und Krümmungsradien mithilfe von Vektoren quantitativ untersuchen[1]. Während die anspruchsvollen inhaltlichen Details beim Arbeiten mit Vektoren der Sekundarstufe II vorbehalten bleiben, stoßen die Funktionsgraphen, die entstehen, wenn man diese Größen in Abhängigkeit von der Fahrzeit darstellt, schon in der Sekundarstufe I auf reges Interesse. Ein Grund dafür ist, dass man die in den Funktionsgraphen codierten Informationen beim Kurvenfahren tatsächlich fühlen kann.

Funktionsgraphen interpretieren

In *Kasten 1* wird die Fahrt durch ein Autobahn-Kleeblatt mithilfe von sechs Funktionsgraphen visualisiert. Die Bedeutung der Graphen können Lernende bereits in der Sekundarstufe I selbstständig entschlüsseln. So lässt sich die Fahrtrichtung („Kurs") in *Abb. 5* mit den Positionen im Kleeblatt in Verbindung bringen und der gesamte Drehwinkel von –1080° am Ende entspricht tatsächlich drei Volldrehungen im Uhrzeigersinn[2]. In *Abb. 6* erkennt man, dass die Kurvenradien in allen vier Schleifen an den engsten Stellen bei ca. 40 m liegen. Und auch die Tatsache, dass aus Sicherheitsgründen in jeder Autobahnkurve ein kleines „Geradenstück" eingebaut ist, lässt sich am Verlauf des Krümmungsradius verfolgen. Auf den „Geradenstücken" wachsen die Radien rasant an („Polstellen"). In *Abb. 3* erkennt man den Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit (im Sinne von „Tempo"[3]) und Drehgeschwindigkeit: Sobald man geradeaus fährt (Drehgeschwindigkeit 0) beginnt der Fahrer zu beschleunigen, die Geschwindigkeit steigt. Und auch das Zusammenspiel von Tangential- und

1 Im neuen Kernlehrplan für Nordrhein-Westfalen ist in der „Einführungsphase" neben einer Einführung in die Analysis auch eine Beschäftigung mit Geschwindigkeits- und Kraftvektoren obligatorisch. Dieser Artikel eröffnet Möglichkeiten inhaltlicher Vernetzungen.

2 Volker Schubert ergänzt dies wie folgt: Nebenbei bemerkt ist das didaktisch sehr bemerkenswert, weil man ja zunächst 4 geschlossene Schleifen sieht. Der Widerspruch klärt sich durch die fehlenden 4 spitzen Winkel an den Überkreuzungen auf, die sich zu 360° zusammensetzen lassen. Oder man bedenkt, dass die 4 Schleifen, wenn sie im Uhrzeigersinn durchfahren werden, ihrerseits wieder im Gegenuhrzeigersinn angeordnet sind, was dazu führt, dass das Parallelogramm in der Mitte einmal gegen die Uhr umfahren wurde. Eine weitere Möglichkeit besteht darin zu zählen, wie oft man exakt in Richtung Norden (oder eine andere vorgegebene Richtung) fährt.

3 Der Begriff Geschwindigkeit wird hier in doppelter Bedeutung genutzt, einerseits als Geschwindigkeitsvektor (gerichtete Größe), andererseits als Betrag dieses Vektors, der das „Tempo" oder die „Tachogeschwindigkeit" meint. In der Physik bewährt es sich, Geschwindigkeitsvektor und Tempo begrifflich stärker voneinander zu trennen.

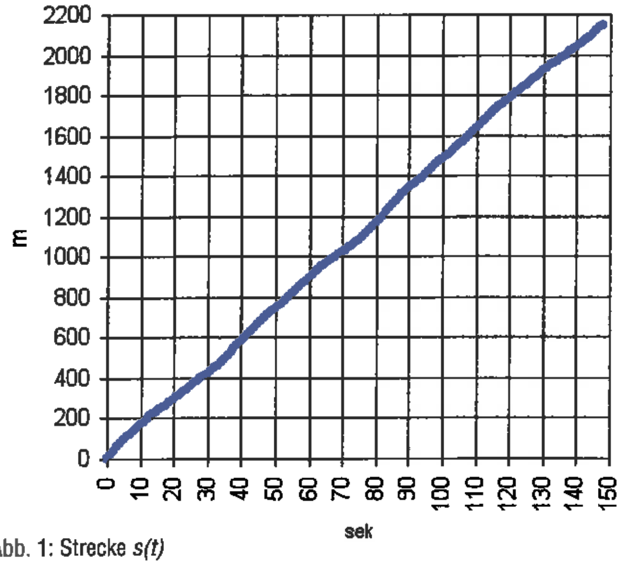


Abb. 1: Strecke $s(t)$

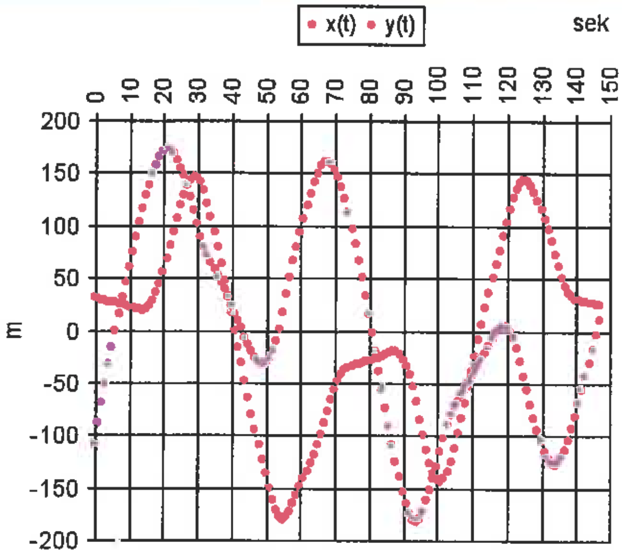


Abb. 2: Koordinaten $x(t)$ und $y(t)$

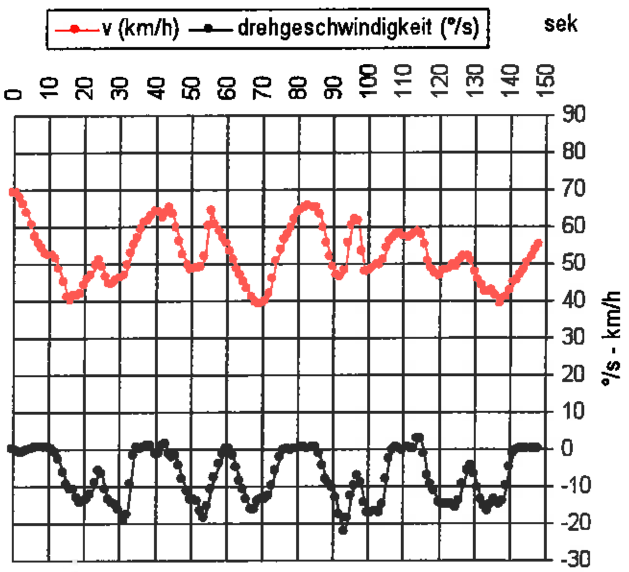


Abb. 3: Geschwindigkeit $v(t)$ und Drehgeschwindigkeit $\omega(t)$

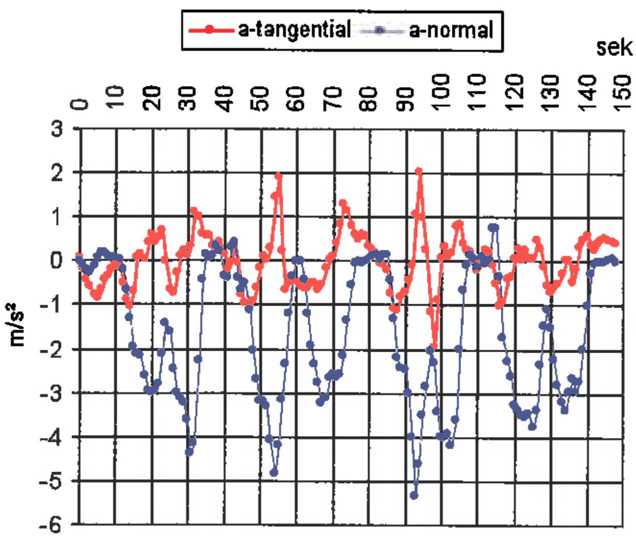


Abb. 4: Tangential- und Querbeschleunigung $a_{tan}(t)$ und $a_{normal}(t)$

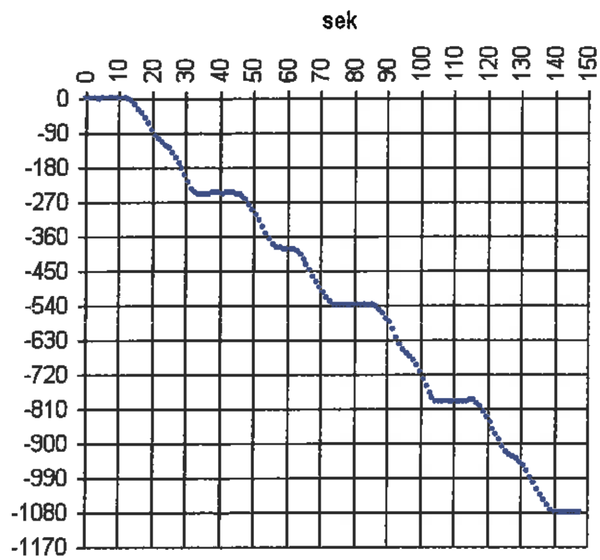


Abb. 5: Kurs $\alpha(t)$

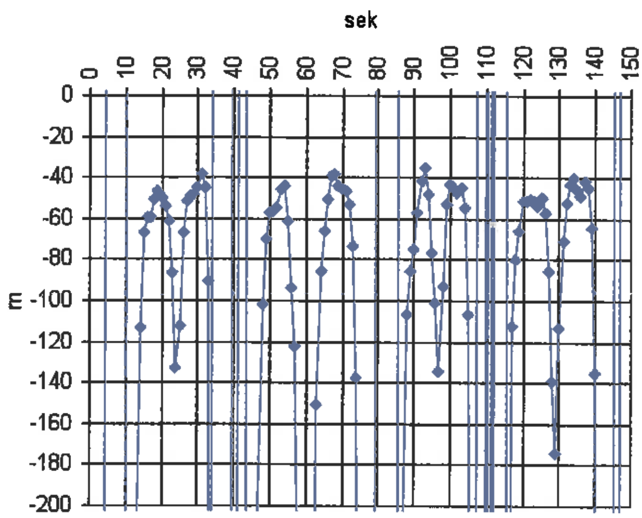


Abb. 6: Kurvenradius $r(t)$

Kasten 1: Mit Funktionsgraphen durchs Autobahnkleeblatt (online verfügbar)

Die Erdbeschleunigung *g*, Tangential- und Querbeschleunigung beim Kurvenfahren

- Erdbeschleunigung: Wenn du im Schwimmbad vom Turm ins Wasser springst, nimmt deine Geschwindigkeit je Sekunde um ca. 10 m/s = 36 km/h zu. Für die Geschwindigkeitszunahme 10 m/s je s schreibt man kurz 10 m/s². Nach zwei Sekunden in der Luft bewegst du dich also schon mit ca. 72 km/h. Diese „rasante" Beschleunigung nennt man Erdbeschleunigung $g \approx 10$ m/s². Verantwortlich dafür ist die Erdanziehungskraft, die für jedes kg deines Körpers etwa 10 N beträgt.
- Tangentialbeschleunigung in Fahrtrichtung: Bei einer Vollbremsung auf trockenem Asphalt nimmt die Geschwindigkeit jede Sekunde um ca. 5 m/s ab. Die Bremsbeschleunigung beträgt −5 m/s² also etwa $\frac{1}{2}$ g: Auf jedes kg deines Körpers wirken 5 N, soviel, wie 5 Tafeln Schokolade wiegen.
- Querbeschleunigung senkrecht zur Fahrtrichtung: Aber auch, wenn du mit quietschenden Reifen eine Kurve durchfährst, spürst du eine Kraft senkrecht zur Fahrtrichtung. Sie ist für die Querbeschleunigung verantwortlich, die (dich zwar nicht schneller macht, aber) dafür sorgt, dass du nicht aus der Kurve fliegst. Wenn die Reifen zu quietschen beginnen, wirken auch hier ca. $\frac{1}{2}$ g ≈ 5 m/s². Auf jedes kg deines Körpers wirken dann auch hier ca. 5 N nach rechts (Rechtskurve) oder links (Linkskurve).

Kurz: Während des Kurvenfahrens ändert sich die Geschwindigkeit durch die Tangentialbeschleunigung, die Richtung durch die Querbeschleunigung.

Kasten 2: Lesehilfe zu Abb. 4

Geschwindigkeitsvektor, Geschwindigkeit und Beschleunigungsvektor

L24 =(J25-J23)/2

	F	J	K	L	M	N	O	R	S	T	U	V	W	X
4	Zeit	x (m)	y (m)	vx (m/s)	vy (m/s)	v (m/s)	s (km)	d-alpha (°)	alpha (°)	ax (m/s²)	ay (m/s²)	a-tang	a-normal	r (m)
22	18:41:55	19.99	127.74	2.03	11.23	11.41	0.232	-9.77	-19.95	1.82	-1.06	-0.71	-1.98	-67
23	18:41:56	23.01	138.30	4.07	10.34	11.11	0.243	-10.77	-30.72	2.00	-0.75	0.03	-2.13	-59
24	18:41:57	28.13	148.42	6.03	9.73	11.45	0.255	-11.07	-41.79	1.91	-1.03	0.13	-2.17	-59
25	18:41:58	35.07	157.76	7.89	8.28	11.44	0.266	-13.07	-54.86	1.91	-1.78	0.03	-2.61	-50
26	18:41:59	43.91	164.99	9.85	6.17	11.63	0.278	-14.50	-69.36	1.91	-2.31	0.40	-2.97	-46
27	18:42:00	54.78	170.10	11.71	3.67	12.27	0.290	-14.28	-83.64	1.46	-2.70	0.58	-3.01	-49
28	18:42:01	67.33	172.33	12.77	0.78	12.79	0.303	-13.61	-97.25	0.56	-2.95	0.38	-2.97	-54
29	18:42:02	80.31	171.66	12.84	-2.22	13.03	0.316	-12.31	-109.56	0.02	-2.86	0.51	-2.82	-61
30	18:42:03	93.00	167.88	12.80	-4.95	13.72	0.330	-9.11	-118.67	-0.16	-2.22	0.65	-2.13	-86
31	18:42:04	105.91	161.76	12.52	-6.67	14.19	0.344	-6.12	-124.78	-0.70	-1.28	-0.02	-1.46	-133

Abb. 7: Kalkulationsblatt zu den Abbildungen 1–6 (Datei: kleeblatt.xls)

- Die **Geschwindigkeit** ist bei Bewegungen in der *xy*-Ebene ein zweidimensionaler Vektor, der angibt, welche Strecke man je Sekunde in *x*- und *y*-Richtung zurücklegt. So gilt für die Fahrt aus *Abb.* 7 um 18:41:57 Uhr: $\vec{v} = \binom{v_x}{v_y} \approx \binom{6{,}03}{9{,}73}$ (Zeile 24, Spalten L und M). Das Auto bewegt sich mit 6,03 m/s nach Osten und mit 9,73 m/s nach Norden. Der Betrag dieses Geschwindigkeitsvektors $v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 11{,}45$ ist die **Geschwindigkeit** („Tachogeschwindigkeit") gemessen in m/s. Durch Aufsummieren der je Sekunde zurückgelegten Wegstreckenlängen erhält man die Länge der gefahrenen Strecke in Spalte O.
- Die Komponente v_x des Geschwindigkeitsvektors um 18:41:57 (Zelle L24) erhält man z. B., indem man die Längen der während der benachbarten 2 Sekunden zwischen 18:41:56 und 18:41:58 in *x*-Richtung zurückgelegte Strecke durch 2 s teilt. Die Kalkulationsformel L24 = (J25-J23)/2 ist in *Abb. 7* oben eingeblendet. Selbstverständlich kann man auch Zeitintervalle von einer Sekunde zur Geschwindigkeitsberechnung heranziehen.
- Auch die **Beschleunigung** ist als „Geschwindigkeitsänderung/verstrichene Zeit" bei ebenen Bewegungen ein **Vektor**. In Zeile 24 werden auch hier wieder die Geschwindigkeitsvektoren für eine Sekunde nachher und für eine Sekunde vorher voneinander subtrahiert und die Differenz wird (wegen der 2 s Zeitdifferenz) halbiert. Mit den Zeilennummern als Index erhält man für den Beschleunigungsvektor um 18:41:57 $\vec{a}_{24} = \frac{1}{2}(\vec{v}_{25} - \vec{v}_{23}) = \binom{a_x}{a_y} = \binom{1{,}91}{-1{,}03}$.

  Das Auto beschleunigt in *x*-Richtung mit 1,91 m/s² und bremst in *y*-Richtung mit 1,03 m/s².
- Die Spalte R enthält die **Drehgeschwindigkeit** (in °/s), mit der sich das Fahrzeug beim Durchfahren der Kurve dreht. Sie beträgt zur Zeit $t = 24$ s (um 18:41:57 Uhr) -11,07 °/s. Da es sich um eine Rechtskurve handelt, zählt die Drehgeschwindigkeit negativ. Man berechnet sie, indem man den Winkel $d\alpha$ zwischen den Geschwindigkeiten $\vec{v}_{23}$ und $\vec{v}_{25}$ halbiert. Dazu nutzt man die Beziehung $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin(\sphericalangle\,(\vec{u};\vec{v}))$ für das Vektorprodukt der beteiligten Geschwindigkeitsvektoren.
- Durch Aufsummieren der Drehwinkel im Sekundenabstand ergibt sich die die momentane **Fahrtrichtung** (der „Kurs") in Spalte S – bezogen auf eine anfänglich festgelegte Startrichtung.

Kasten 3: Physikalische Begriffe konkret – Kalkulationsblatt zu den Abbildungen 1–6 aus Kasten 1 (steht online zur Verfügung)

Querbeschleunigung erschließt sich aus *Abb. 4*, wenn man Schülerinnen und Schülern die Lesehilfe aus *Kasten 2* zur Verfügung stellt. Man erkennt, dass die Querbeschleunigung schnell doppelt so groß wird wie Tangentialbeschleunigung – und dass man vor den engen Kurven (mit großer Querbeschleunigung) zuerst einmal deutlich abbremst (große negative Tangentialbeschleunigung).

Die Grafiken wurden mit einer einzigen Kalkulationstabelle (kleeblatt.xls, *Abb. 7*) aus den Daten eines GPS-Tracks erzeugt. Lernende, die mit Tabellenkalkulation vertraut sind, können eigene GPS-Koordinaten in die Kalkulationsvorlage übertragen und so eigene Kurvenfahrten prinzipiell schon in der Sekundarstufe I grafisch auswerten.

Vektoren in Aktion

In der Sekundarstufe II ist der Fokus ein anderer. Hier sollen Vektoren als Werkzeuge erlebt werden, mit deren Hilfe man zweidimensionale Bewegungen quantitativ erfassen und dann so auswerten kann wie in *Kasten 1* vorgestellt. Die folgenden Auswertungsschritte werden in *Kasten 3* (unter Rückgriff auf die numerischen Werte der Kalkulationstabelle aus *Abb. 7*) so konkretisiert, dass Lernende mit Vorkenntnissen der Vektorrechnung diese weitgehend selbstständig erarbeiten können.

Die Positionen, die ein GPS-Empfänger im Sekundenabstand aufzeichnet, definieren eine Folge von Ortsvektoren $\vec{x}_t$. Den Index t deutet man als Zeit (gemessen in Sekunden).

- Den *Geschwindigkeitsvektor* zur Zeit t erhält man (näherungsweise) über die vorausgehende und die folgende Position als $\vec{v}_t = \frac{1}{2}(\vec{x}_{t+1} - \vec{x}_{t-1})$.
- Der zugehörige Einheitsvektor $\vec{v}_{0;t} = \frac{\vec{v}_t}{|\vec{v}_t|}$ definiert die *Bewegungsrichtung* zur Zeit t.
- Bei Bewegungen in der Ebene wird mit der Geschwindigkeit (im Sinne einer gerichteten Größe) auch die ***Beschleunigung*** eine vektorielle Größe. Zur Zeit t ist sie gegeben durch $\vec{a}_t = \frac{1}{2}(\vec{v}_{t+1} - \vec{v}_{t-1})$. Durch Zerlegung in eine Komponente längs der Fahrtrichtung ($\vec{v}_{0;t}$) und eine Komponente orthogonal dazu ($\vec{n}_{0;t}$) erhält man die *Längs- (Tangential-)* und die *Quer- (Normal-) Beschleunigung*. Näheres auf der Kopiervorlage.
- Da die Bewegungsrichtungen $\vec{v}_{0;t}$ komplanare Vektoren sind, zeigen deren Vektorprodukte in Linkskurven nach oben (vom Erdmittelpunkt weg), in Rechtskurven nach unten (zum Erdmittelpunkt hin). *Sie lassen sich als Zahlen deuten, deren Vorzeichen die Drehrichtung angibt.* Wegen der Eigenschaft $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin(\sphericalangle(\vec{u};\vec{v}))$ des Kreuzproduktes erhält man die

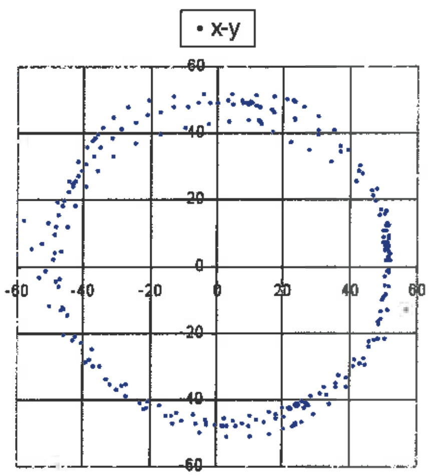


Abb. 8: Verteilerkreis

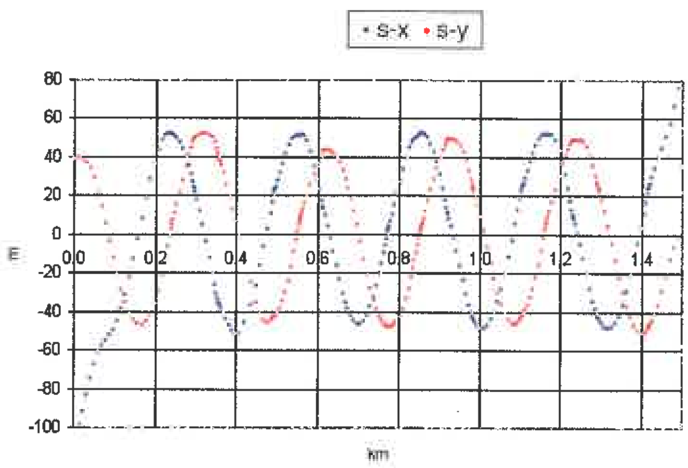


Abb. 9: Positionen *(x,y)* in Abhängigkeit vom Weg *s*

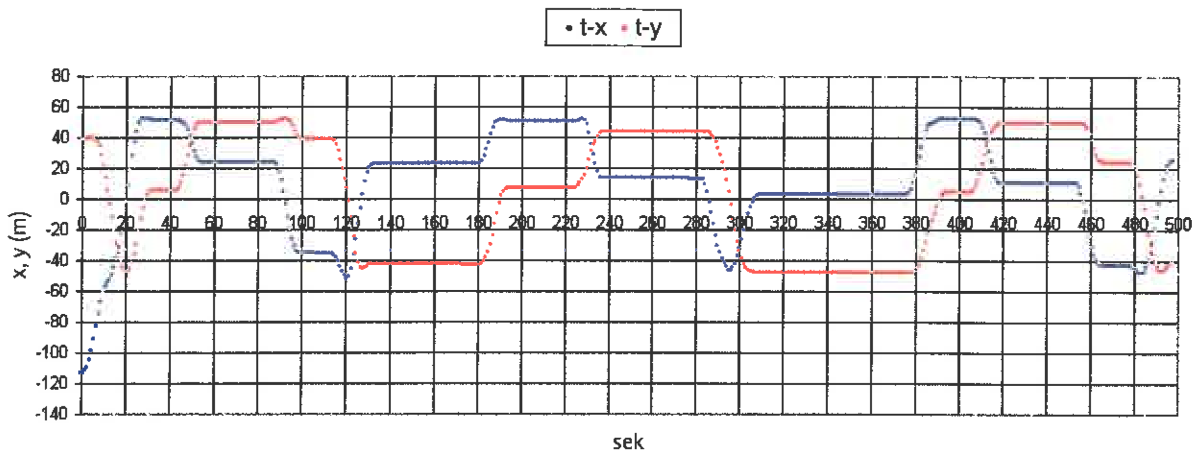


Abb. 10: Positionen *(x,y)* in Abhängigkeit von der Zeit *t*

Kasten 4: Protokoll einer Fahrt durch den Bonner Verteiler-Kriesel im Süden Kölns vorzeichenbehaftete *Drehgeschwindigkeit* zur Zeit t aus der vorherigen und der folgenden Bewegungsrichtung als $\omega_t = \frac{1}{2}\arcsin(|\vec{v}_{0;t-1} \times \vec{v}_{0;t+1}|)$.

- Den (orientierten) *Kurvenradius* r zur Zeit t erhält man gemäß der Abbildung auf der *Kopiervorlage*, indem man die während zweier Sekunden zurückgelegte Strecke s durch den (orientierten) Drehwinkel $d\alpha$ teilt:
$$r_t = \frac{s}{d\alpha} = \pm\frac{|\vec{x}_{t+1} - \vec{x}_{t-1}|}{|\vec{v}_{0;t-1} \times \vec{v}_{0;t+1}|}$$
Dabei deutet man das Kreuzprodukt im Nenner als *Zahl* mit entsprechendem Vorzeichen.

Lernende, die mit Vektoren sowie mit Skalar- und Vektorprodukt vertraut sind, können diese Beziehungen mithilfe einer Anleitung selbstständig erarbeiten (s. *Kopiervorlage*). Dabei erweist sich die Kalkulationsvorlage aus *Abb. 7* als sehr hilfreich, weil sie einerseits selbstständige numerische Kontrollen ermöglicht und andererseits aufzeigt, wie man die Vektorrechnungen in einer Kalkulationstabelle durchführen kann.

Man erkennt an der Grafik auf der *Kopiervorlage* und in der Kalkulationstabelle aus *Abb. 7*: Der Fahrer hat zur Zeit $t = 27$ die erste enge Rechtskurve des Kleeblattes durchfahren und gibt im Hinblick auf das bevorstehende Geradenstückchen schon wieder etwas Gas: Die Tangentialbeschleunigung zeigt mit + 0,58 [m/s²] nach vorne. Die Querbeschleunigung ist an dieser engen Stelle der Rechtskurve mit – 3,01 [m/s²] aber ca. fünfmal so groß wie die Tangentialbeschleunigung.

Wenn man sich beim Kurvenfahren mit einem GPS-Empfänger den trigonometrischen Funktionen nähern möchte, empfiehlt es sich, statt der Autobahn-Kleeblätter Verkehrskreisel (ruhig mehrmals hintereinander) zu durchfahren. Das geht auch mit einem Fahrrad. Lassen Sie sich durch die Grafiken aus *Kasten 4* inspirieren, die vom „Verteilerkreis" im Süden der Stadt Köln stammen. Vielleicht finden Sie heraus, wie viele Ampeln dieser merkwürdige Kreisverkehr dem Besucher zu bieten hat?

Abb. 11: Wenn Sie ein Auto mehrfach durch Verkehrskreisel fahren sehen, könnte es sich um einen Mathematiklehrer handeln, der mit seinem GPS-Empfänger Sinusgraphen erzeugen möchte

Resümee

Die Fähigkeit, Funktionsgraphen samt zugehöriger Wertetabellen interpretieren zu können, ist ein wichtiger Teil der, auch im Mathematikunterricht, beständig zu fördernden Lesekompetenz. Die beim Kurvenfahren mit einem GPS-Empfänger anfallenden Daten bieten dazu eine Fülle authentischen Materials, das wegen der Alltagsnähe bei Schülerinnen und Schülern auch schon in der Sekundarstufe I auf großes Interesse stößt, insbesondere dann, wenn man eigene Kurvenfahrten mit einer Kalkulationsvorlage auswerten darf. In der Sekundarstufe II bietet die Thematik ausgezeichnete Anknüpfungspunkte, Vektoren als nützliche Werkzeuge zur Datenauswertung einmal in einem völlig neuen Kontext zu erleben. Die in den Arbeitsunterlagen angebotene Unterstützung erleichtert ein problemorientiertes und selbstständiges Erarbeiten der Thematik durch die Lernenden. Dass sich die Auswertung von Kurvenfahrten auch als Facharbeitsthema hervorragend eignet, steht außer Frage. Auch dafür können dieser Beitrag und ein GPS-Empfänger die Grundlage sein.

Hinweis:

Zum Bearbeiten der Kopiervorlage benötigen die Schülerinnen und Schüler die Kästen 1 und 3 sowie die Excel-Datei kleeblatt.xls zum Artikel. Alle drei Dateien stehen online zur Verfügung.

Verfasser:
Dr. Wolfgang Riemer
Zentrum für schulpraktische Lehrerausbildung Köln
w.riemer@arcor.de

PM / Thema: MIT POSITIONEN RECHNEN – GPS IM MATHEMATIKUNTERRICHT NUTZEN // Heft 53 / 55. Jahrgang / 2013

Aufgabe:

Aus sekündlich aufgezeichneten GPS-Positionen kann man den Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}$ und den Bescheunigungsvektor $\vec{a}$ berechnen (vgl. *Kasten 3*). So gilt um 18:42:00 (zur Zeit t = 27 s, wenn man die Zeilennummern als Zeitmarken deutet) $\vec{v}_{27} = \binom{11{,}71}{3{,}67}$ und $\vec{a}_{27} = \binom{1{,}46}{-2{,}70}$

- Berechne den Einheitsvektor $\vec{v}_0$ der Fahrtrichtung und den dazu orthogonalen Einheitsvektor $\vec{n}_0$.
- Zerlege den Beschleunigungsvektor $\vec{a}$ in eine Komponente in Bewegungsrichtung $\vec{v}_0$ und eine Komponente senkrecht dazu in Richtung $\vec{n}_0$: $\vec{a} = \lambda \cdot \vec{v}_0 + \mu \cdot \vec{n}_0$ (vgl. *Abb. A*), indem du ein lineares Gleichungssystem für λ und μ aufstellst. λ ist dann die Tangential- und μ die Querbeschleunigung (in $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$).
- Begründe mit deinen Kenntnissen über das Skalarprodukt, dass man die Koeffizienten auch wie folgt berechnen kann: $\lambda = \vec{a} \cdot \vec{v}_0 = 0{,}58 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right]$ und $\mu = \vec{a} \cdot \vec{n}_0 = 3{,}01 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right]$.
- Ergänze in der Kalkulationsvorlage zwei Spalten, in denen die Tangential- und Querbeschleunigungen sekundenweise berechnet werden (wie in *Abb. 7*). Erstelle außerdem einen Beschleunigungsgraphen (wie in *Kasten 1, Abb. 4*).
- Überprüfe mithilfe der Geschwindigkeitsvektoren $\vec{v}_{28}$ und $\vec{v}_{26}$, dass sich das Auto zur Zeit t = 27 tatsächlich mit der Drehgeschwindigkeit ω = -14,28 $\left[\frac{°}{\text{s}}\right]$ dreht. Ergänze die Spalten R und S mit Drehgeschwindigkeit und Kursrichtung in der Kalkulationsvorlage. Zeichne Grafiken wie in *Kasten 1, Abb. 3* und *Abb. 5*.
- Nutze die Beziehung $s = r \cdot d\alpha$ (*Abb. B*, $d\alpha$ im Bogenmaß), um aus dem Drehwinkel und dem zurückgelegten Weg s den Krümmungsradius r der Kurve zur Zeit t = 27 zu berechnen. Ergänze in der Kalkulationsvorlage eine Spalte für den Krümmungsradius r und zeichne eine Grafik wie in *Kasten 1, Abb. 6*.

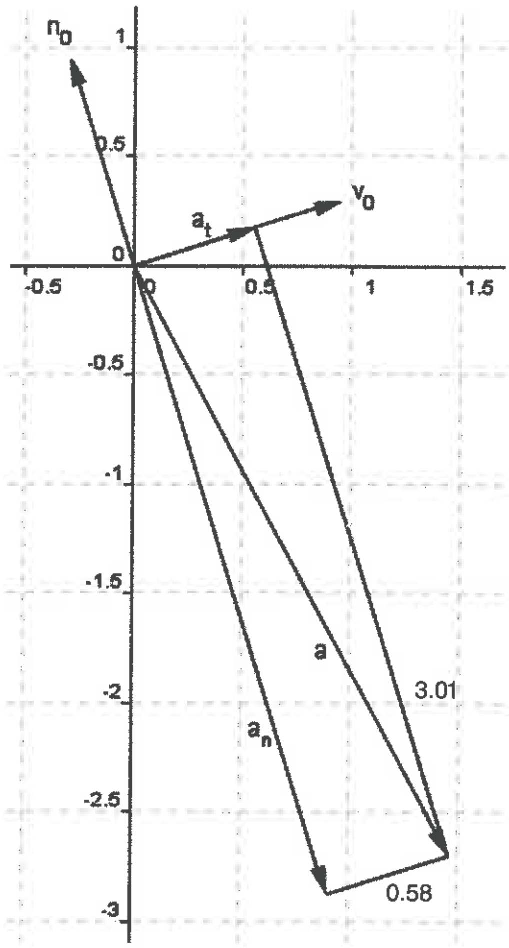


Abb. A: Zerlegung des Beschleunigungsvektors $\vec{a}_{27}$ in Tangential- und Normalkomponenten

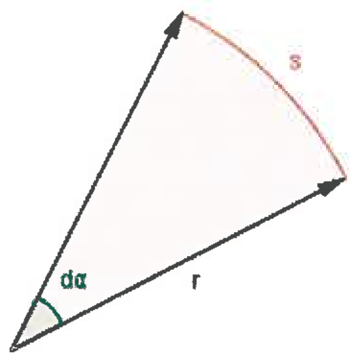


Abb. B: Berechnung des Krümmungsradius r aus Strecke s und Drehwinkel $d\alpha$: $s = r \cdot d\alpha$

Flug Köln-Berlin Startphase über der Wahnbachtalsperre, 473,1 km/h, 1279 m ü. NN

Google Earth. Bilddaten: © 2009 Tele Atlas, Geo Content, Aerowest

GPS-Daten aufarbeiten – eine Gebrauchsanweisung

Wolfgang Riemer

Wer ein Navigationsgerät bzw. einen GPS-Datenlogger besitzt oder eine entsprechende App auf seinem Smartphone installiert hat, kann Bewegungen aufzeichnen, in Landkarten nachfahren, durch Bewegungsfunktionen visualisieren und die aufgezeichneten Tracks mit Tabellenkalkulationen auswerten. Als Werkzeuge werden neben Kalkulationstabellen auch Google Earth und GpsVisualizer vorgestellt.

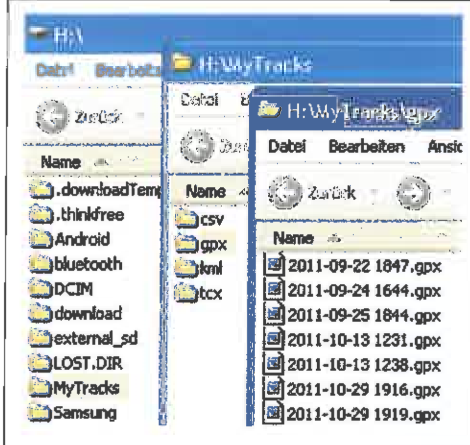
Tracks

Tracks sind Textdateien, in denen (z. B. im Sekundenabstand) gemessene Positionen abgespeichert sind. Die Dateinamen setzen sich meist zusammen aus Datum/Uhrzeit und einer Dateiendung wie .gpx, .csv, .kml, .kmz. Alle diese Dateiformate kann man – wie unten beschrieben – in das .gpx-Format umwandeln. Man kann die Dateien über eine USB-Verbindung auf den Computer übertragen und mit einem Texteditor inspizieren (für ein Smartphone ist dies z. B. mit MyTracks möglich, vgl. den Beitrag von Neugebauer im vorliegenden Heft und *Abb. 1*). Eine gpx-Datei ist als Download zum Heft verfügbar.

Google Earth

Google Earth nutzt man normalerweise, um Tracks im kml- oder kmz-Format statisch auf einem virtuellen Globus darzustellen. Interessanter ist die Visualisierung von Tracks im .gpx-Format, die man wegen der in den Dateien enthaltenen Zeit-Informationen animiert nachfahren und über Geschwindigkeitsprofile punktweise auswerten kann. Man geht wie folgt vor:

- Google Earth installieren von *www.earth.google.de/download-earth.htm* und starten.
- Mit „Datei Öffnen" (Achtung: alle Dateitypen anzeigen lassen, damit man auch .gpx Tracks angeboten bekommt) den .gpx-File laden und als .kml importieren wie in *Abb. 2*.
- Der Track wird automatisch in der Landkarte dargestellt *(Abb. 3)*.
- Wenn man auf den „Videoplayer" (in *Abb. 3* oben links schwach zu erkennen) klickt, fährt der blaue Pfeil den Track mit der aus den GPS-Daten ermittelten Geschwindigkeit animiert nach.
- Nach Rechtsklick auf den Track in der Karte wird das Geschwindigkeitsprofil angezeigt. Man kann es mit der Maus abfahren und am roten Pfeil in der Karte genau sehen, wo welche Geschwindigkeit gefahren wurde.



Den Inhalt einer .gpx Datei kann man mit einem Texteditor wie WordPad ansehen.
Zu erkennen sind die geografischen Koordinaten und dazu Zeitstempel im Sekundenabstand:

<trkpt lat="50.333977" lon="6.944810">
<time>2009-08-10T10:49:32Z</time>
</trkpt>
<trkpt lat="50.333965" lon="6.944802">
<time>2009-08-10T10:49:33Z</time>
</trkpt>

Abb. 1: Der Ordner Mytracks im Smartphone enthält Unterordner, in denen Tracks in verschiedenen Formaten abgelegt werden

Google Earth Karten mit km/h – beschrifteten „Mouse-over" Trackpunkten

Noch anschaulicher wird die Darstellung, wenn man Tracks nach Geschwindigkeiten einfärbt wie in *Abb. 4:*

- dazu wandelt man den .gpx-Track zunächst über das Internet-Portal Gpsvisualizer http://www.gpsvisualizer.com/map?form=googleearth in das .kml-Format um, wie in *Abb. 5,*
- im Feld *Upload your GPS data files* gibt man die Track-Datei (.gpx) ein,
- wählt das Output Format .kml (oder .kmz),
- wählt als Altitude Mode: clamped to ground (Für Flugdaten wie in der Eingangsgrafik verwendet man: Extruded connected to ground as a wall),
- färbt den Track nach Geschwindigkeit und
- wählt bei „Draw as waypoints" data from the colorized field.
- Wenn man dann „convert" anklickt, steht der .kml- oder .kmz-File zum Download bereit.

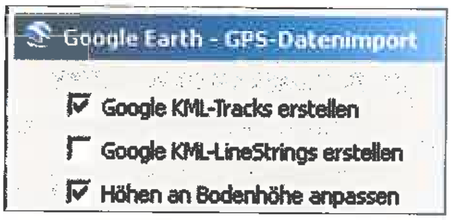
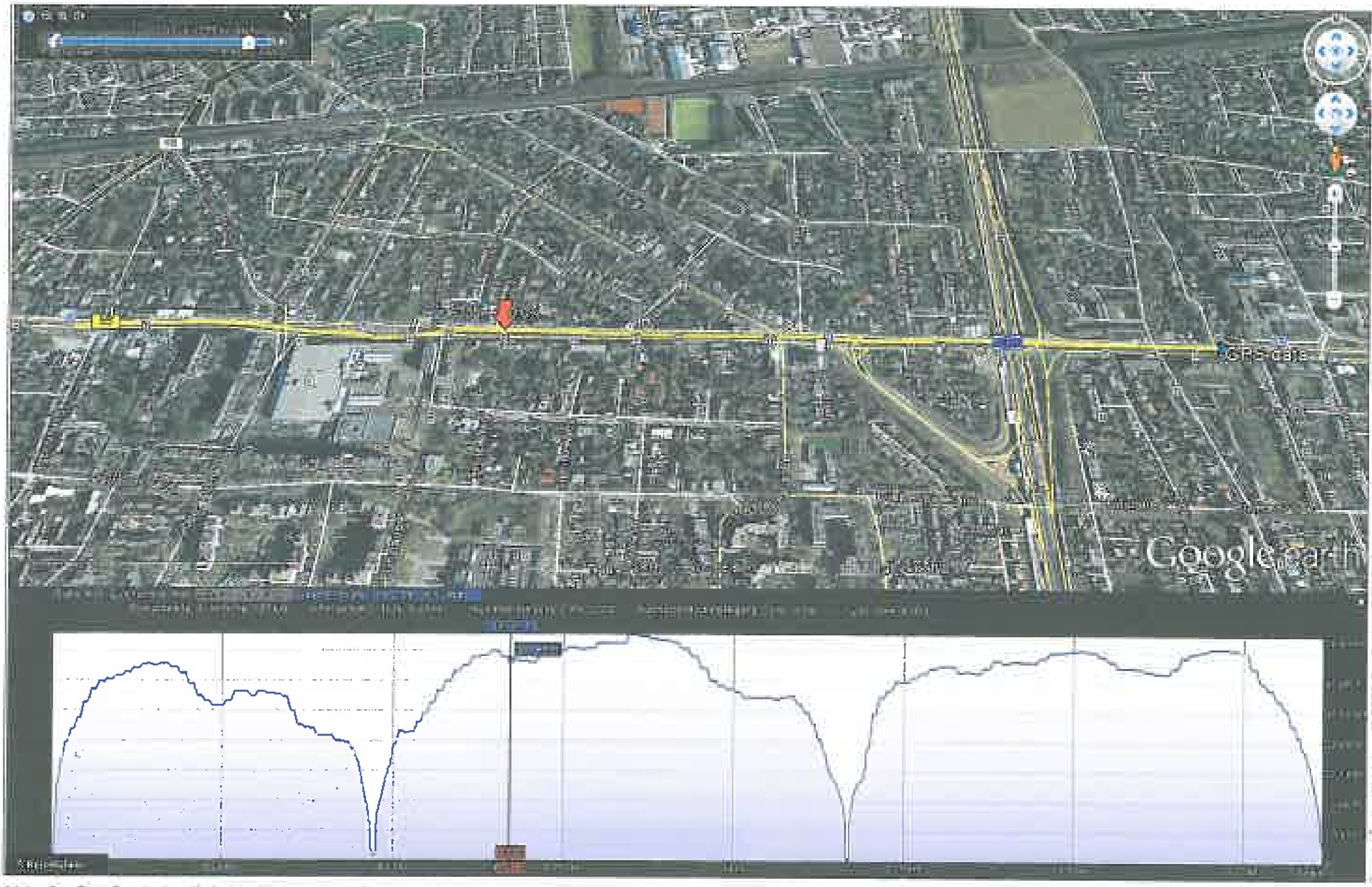


Abb. 2: Ein .gpx-Track in Google-Earth importieren

- Nach dem Laden in Google Earth wird die Geschwindigkeit nun an jedem Trackpunkt angezeigt, wenn man mit der Maus darüber fährt, wie in *Abb. 4* zu sehen.

Funktionsgraphen zeichnen

- Google-Earth erzeugt nur Weg-Geschwindigkeits-Graphen. Ein Werkzeug zur Erstellung beliebiger Funktionsgraphen ist http://www.gpsvisualizer.com.
- Man klickt auf „draw a profile" und gibt im Feld „Upload your GPS data files" die Track-Datei (.gpx) ein oder kopiert aus einer Excel-Tabelle die Spalten *Lat, Lon, Time* mit Spaltenüberschriften in das Eingabefeld *(Abb. 6).*
- Man wählt die Größen aus, die auf der x/y-Achse dargestellt werden sollen, (z. B. „elapsed time" – die verstrichene Zeit in s – auf der x- und „distance" (in km) auf der y-Achse, färbt den Gra-



Google Earth. Bilddaten: © 2009 GeoBasis – DE / BKG, © 2012 AeroWest

Abb. 3: Straßenbahn linie1.gpx (steht online zur Verfügung) in Google-Earth mit Geschwindigkeitsprofil anzeigen und animiert nachfahren

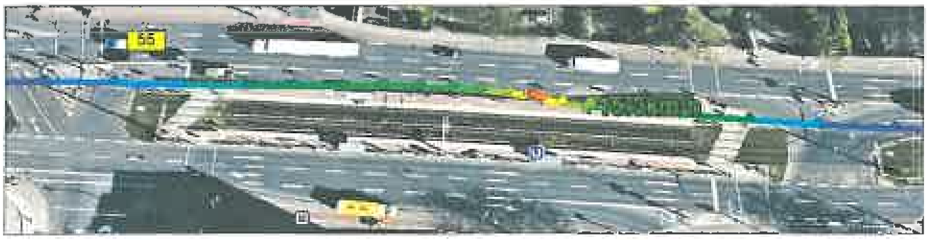


Abb. 4: linie-1.kmz nach Geschwindigkeiten eingefärbt Google Earth. Bilddaten: © 2009 GeoBasis – DE / BKG, © 2012 AeroWest

phen nach einer dritten Größe (z. B. „speed“) und klickt „draw a profile“. Es entsteht ein Zeit-Weg-Diagramm wie in *Abb. 7*.

Tracks mit einer Tabellenkalkulation auswerten

- Man stellt beispielsweise in Excel unter „Extras – Optionen international“ den Punkt als Dezimaltrennzeichen ein, denn „GPS spricht englisch“.
- Dann wandelt man die .gpx-Datei (z. B. mit www.gpsvisualizer.com/convert_input) in eine .csv Textdatei um. Dabei kann man die Fahrstrecke, Geschwindigkeit und Höhe mit berechnen lassen.
- In Excel liest man mit „Daten – Externe Daten importieren“ *(Abb. 8)* die erzeugte .csv-Datei ein. Man erkennt, dass geographische Breite „Lattitude“ und Länge „Longitude“ (in Grad) mit sechs Nachkommastellen aufgezeichnet werden. Die Zellen der Spalte „Time“ müssen ggf. als hh:mm:ss formatiert werden.
- Da 1 Meter klassisch als der 40 000 000te Teil des Erdumfangs (360°) definiert ist, entspricht 1 Millionstel Grad in N-S Richtung (Lattitude) 1/9 m ≈ 0,111 m und in W-O Richtung auf der geographischen Breite Deutschlands 0,070 m. Das kann man nutzen, um die Positionen in Meter umzurechnen.
- Alternativ dazu gibt es in der Datei gps-Vorlage.xls die Funktionen *x(), y()*, dt() mit denen man gemäß *Abb. 9* die Umwandlung von geografischen in metrische Positionen und von Zeitdifferenzen in Sekunden vornehmen kann.
- Aus aufeinander folgenden (*x*; *y*)-Positionen berechnet man mithilfe des Satzes von Pythagoras die zurückgelegten „Wegstückchen“ und mit (symmetrischen) Differenzenquotienten

$$V_i = \frac{\sqrt{(x_{i+1} - x_{i-1})^2 + (y_{i+1} - y_{i-1})^2}}{t_{i+1} - t_{i-1}}$$

die mittleren Geschwindigkeiten über 2s-Intervallen, die man in der Praxis als Momentangeschwindigkeiten deutet.

Zum Weiterlesen

Vielen GPS-Geräten ist Software zur Bearbeitung und Auswertung von Tracks beigelegt. Es gibt aber neben dem englischen www.gpsvisualizer.com auch deutschsprachige Freeware zur Trackverarbeitung:

- Jasta: http://www.it-pannonia.com/index.php?option=com_content&task=view&id=13&Itemid=34
- Track Analyse: http://www.gps-track-analyse.de/9.html
- Nützliche Informationen auch zu empfehlenswerten Apps für alle gängigen Betriebssysteme findet man unter http://www.kowoma.de/
- Wie man mit speziellen Trackformaten umgeht und auch Tropfendiagramme in google-Maps erzeugt, kann man hier nachlesen: http://www2.klett.de/sixcms/media.php/229/GPS_Tipps.pdf

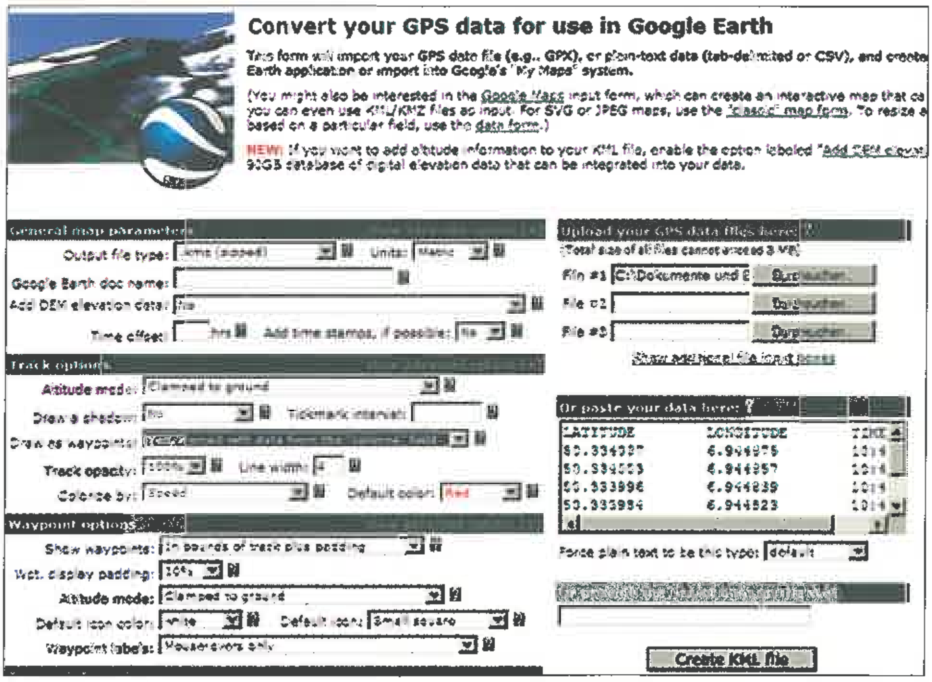


Abb. 5: www.gpsvisualizer.com zur Trackformat-Umwandlung und zur Auswertung

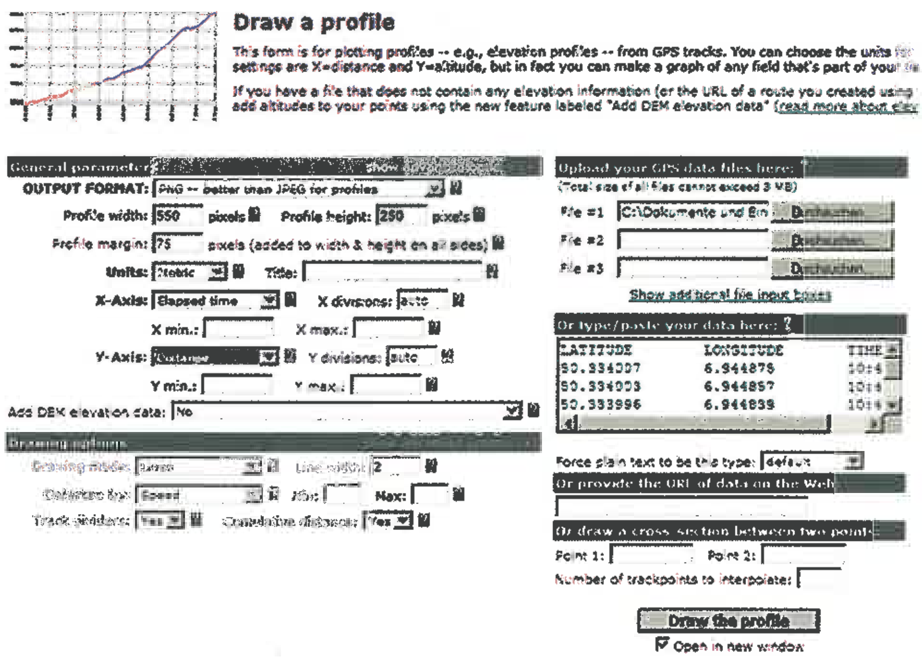


Abb. 6: mit www.gpsvisualizer.com Graphen von Bewegungsfunktionen zeichnen

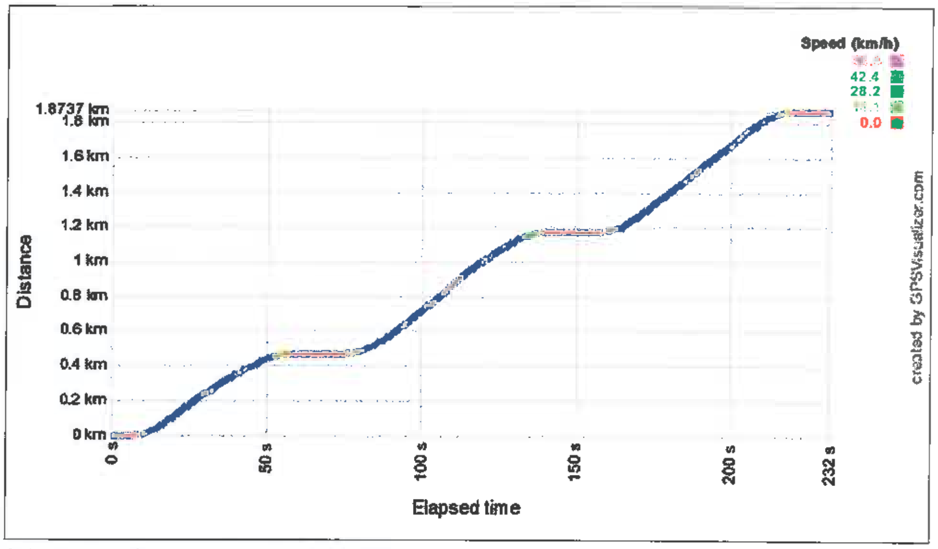


Abb. 7: Nach Geschwindigkeit gefärbter Zeit-Weg Graph der Straßenbahnfahrt aus *Abb. 3*

- Wer sehr schnelle Bewegungsänderungen wie etwa Vollbremsungen mit Fahrrad oder Auto untersuchen möchte, dem sei der QSTARTZ – Datenlogger BT-Q1000eX (5 Hz oder 10 Hz) empfohlen.

Verfasser
Dr. Wolfgang Riemer
Zentrum für Schulpraktische Lehrerausbildung Köln
w.riemer@arcor.de

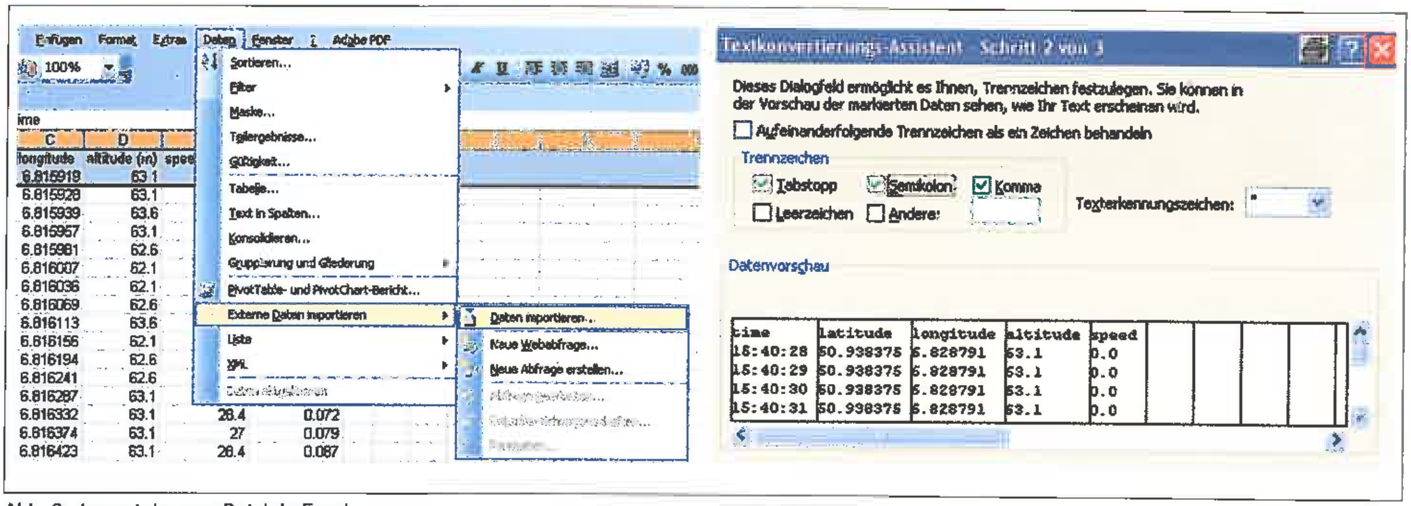
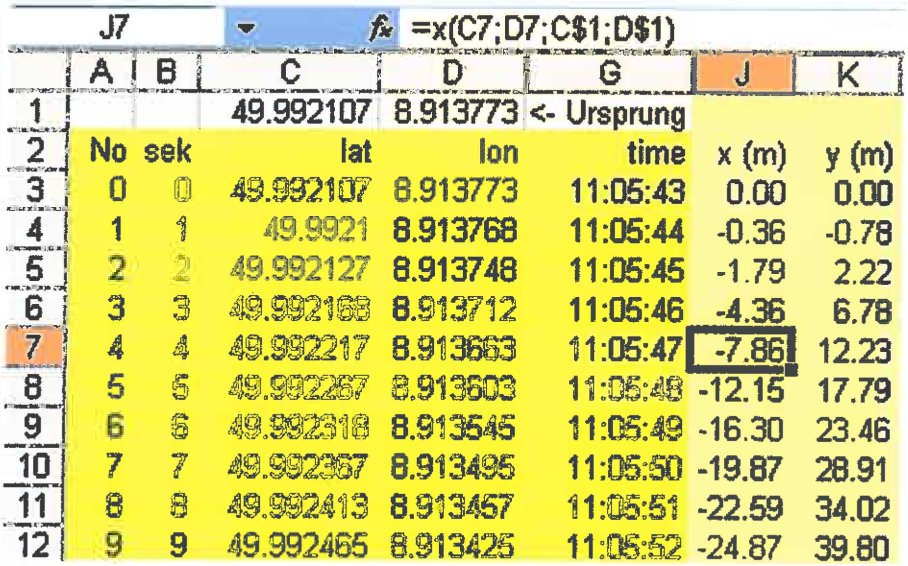
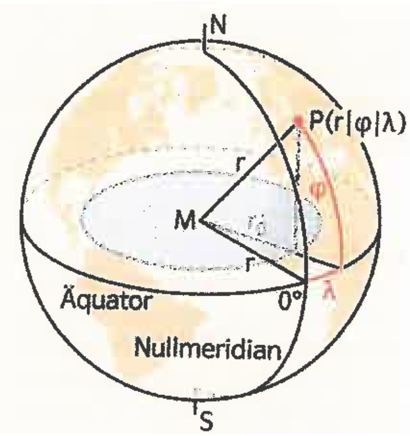


Abb. 8: Import der .csv Datei in Excel.



J7 f_x =x(C7;D7;C$1;D$1)

	A	B	C	D	G	J	K
1			49.992107	8.913773	<- Ursprung		
2	No	sek	lat	lon	time	x (m)	y (m)
3	0	0	49.992107	8.913773	11:05:43	0.00	0.00
4	1	1	49.9921	8.913768	11:05:44	-0.36	-0.78
5	2	2	49.992127	8.913748	11:05:45	-1.79	2.22
6	3	3	49.992168	8.913712	11:05:46	-4.36	6.78
7	4	4	49.992217	8.913663	11:05:47	-7.86	12.23
8	5	5	49.992267	8.913603	11:05:48	-12.15	17.79
9	6	6	49.992318	8.913545	11:05:49	-16.30	23.46
10	7	7	49.992367	8.913495	11:05:50	-19.87	28.91
11	8	8	49.992413	8.913457	11:05:51	-22.59	34.02
12	9	9	49.992465	8.913425	11:05:52	-24.87	39.80



aus: Lambacher-Schweizer: Mathematik Qualifikationsphase Leistungskurs/Grundkurs, ISBN 978-3-12-735401-0, Seite 435 Fig. 1

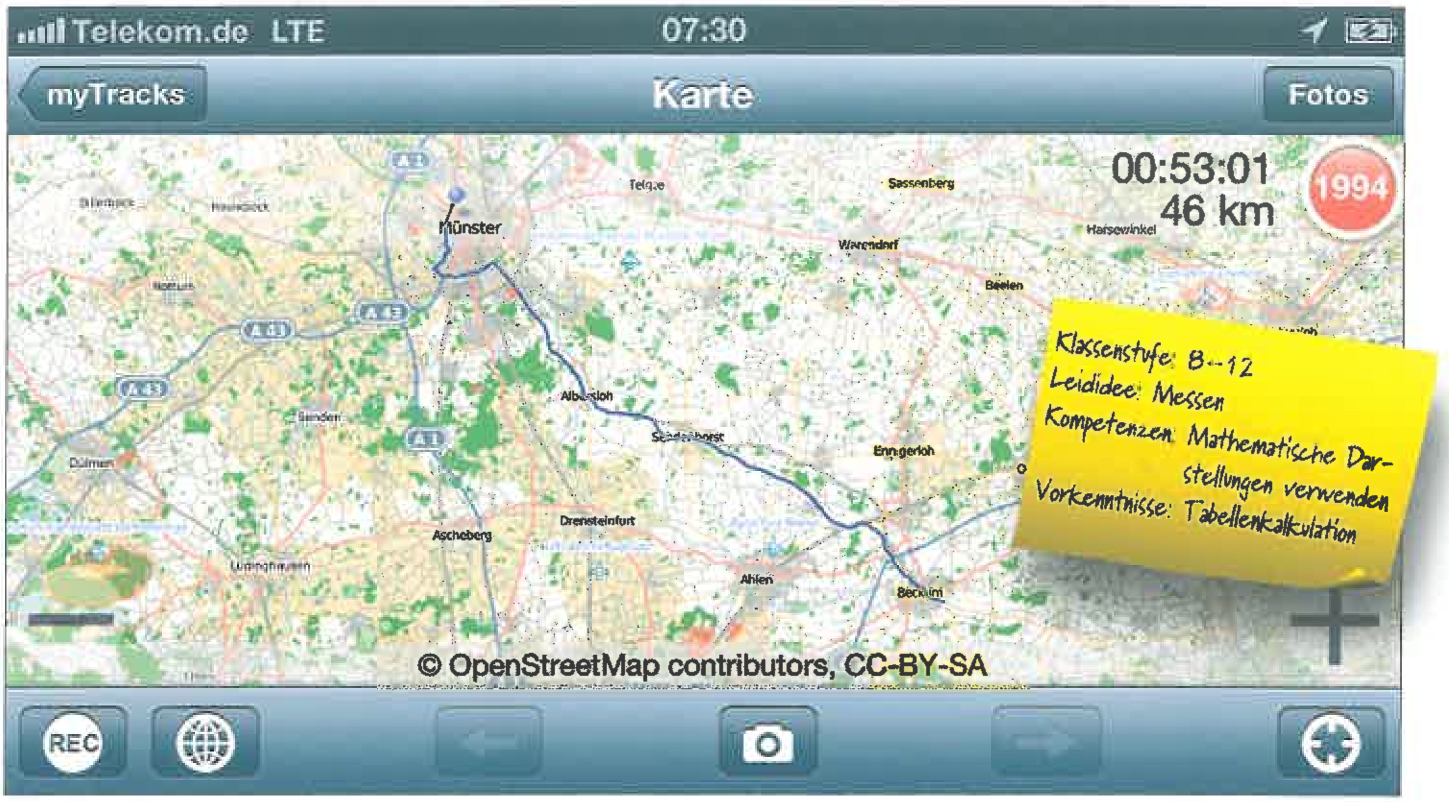
In gps-vorlage.xls gibt es folgende Funktionen
= *x* (lat;lon;lato;lono) (Spalte H)
= *y* (lat;lon;lato;lono) (Spalte I)
= df (t;to) berechnet den Sekundenunterschied (Spalte B)

φ = lat = Breite…Richtung → Norden
λ = lon = Länge…Richtung → Osten

$$y = \frac{lat - lat_0}{180}\pi \cdot r \text{ (Erdradius } r = 6370000)$$

$$x = \frac{lon - lon_0}{180}\pi \cdot r \cdot \cos\left(\frac{lat}{180}\cdot\pi\right)$$

Abb. 9: Koordinatenumrechnung in gps-vorlage.xls



GPS-Datenaufzeichnung mit Smartphones

Christoph Neugebauer

Benötigte man vor einiger Zeit noch teure Navigationsgeräte oder GPS-Datenlogger um seine Position erfassen zu können, reicht es mittlerweile aus, eine entsprechende App auf seinem Smartphone zu installieren. Einige kostenlos verfügbare Apps werden in diesem Beitrag vorgestellt.

GPS-Apps

Egal ob beim Joggen, Radfahren, Wandern oder Geocaching, es gibt zahlreiche Anwendungen, die den GPS-Empfänger des Handys nutzen, um so Touren aufzuzeichnen oder den Fahrradcomputer zu ersetzen. Die Installation und Verwendung einiger dieser Programme sollen im Folgenden näher erläutert werden.

Ausgewählt wurden kostenlose Apps mit positiven Nutzerbewertungen auf verschiedenen Online-Portalen (u. a. chip.de). Auch wenn eine aktive Datenverbindung des Smartphones besteht, kommt es zu keinen verdeckten Kosten z. B. durch Darstellung der Route in einer Karte. Als GPS-Datenlogger für Smartphones wurden die Anwendungen „GPS Essentials" (für Android), „GPSTracker Lite" (für Android) und „Meine Tracks" (für Android und iOS) ausgewählt.

GPS Essentials

Die App „GPS Essentials" für Android ist eine umfangreiche Toolsammlung. Sie bietet viele verschiedene GPS-Widgets, darunter Funktionen zur Kartendarstellung per „Google Maps", „OpenStreetMap" und „MapQuest" sowie Informationen zu Route, Wegpunkten, Entfernung, Höhe und Geschwindigkeit. Unterstützt werden Im- und Export von KML- und GPX-Dateien. Unter dem Link https://market.android.com/details?id=com.mictale.gpsessentials findet man die Anwendung zum Download bereit und kann sie direkt danach installieren. Als Mindestvoraussetzungen für die Installation der englischsprachigen Anwendung benötigt man eine CPU mit 600 MHz, 20 MByte RAM, 20 MByte HDD und einem 1.5 Android Betriebssystem oder höher.

Nach dem Start öffnet sich der Startbildschirm *(Abb. 1)*, der Icons zu allen Funktionen der Applikation enthält. Unter „**Settings**" können u. a. das „GPS Update Interval" (fastest, 10 sek. bis 10 min.), das „Tracking Update Interval" (fastest, 1 sek. bis 2 min.), das Positionsformat und die Einheiten eingestellt werden. Bevor die ersten Daten erfasst werden können, müssen unter „Dashboard" *(Abb. 2)* noch die zu messenden Parameter ausgewählt werden. Insgesamt stehen 57 wählbare Werte zur Verfügung. Ist das GPS-Signal des Smartphones eingeschaltet, so verschwindet die in *Abb. 1* zu lesende Fehlermeldung im Display und die Aufzeichnung der Daten kann beginnen. Dazu betätigt man im Menü „Tracks" den Button in der linken unteren Ecke. Gestoppt wird die Aufnahme entsprechend in der rechten unteren Ecke.

Alle von „GPS Essentials" gesammelten Informationen werden im Ordner *com.mictale.gpsessentials* auf der SD Karte des Smartphones gespeichert. Unter dem Menüpunkt „Tracks" kann mithilfe des Symbols

Abb.1: Startbildschirm „GPS Essentials“

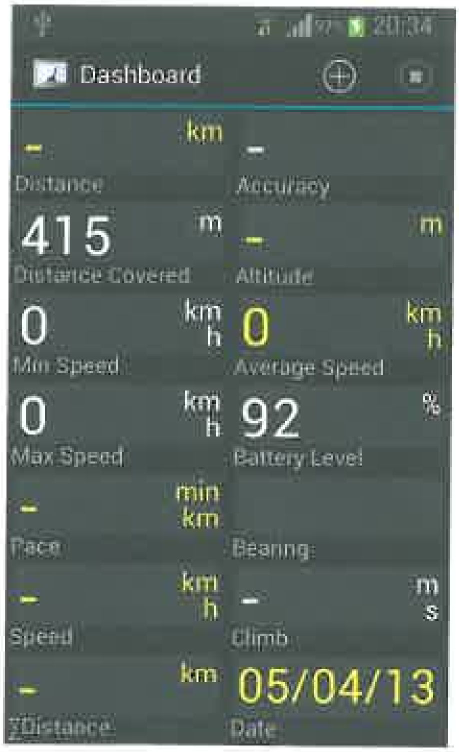


Abb.2: Wahl der Parameter in „GPS Essentials“

Abb.3: Startbildschirm „GPSTracker Lite“

zwischen den Tracks gewechselt werden. Langes Drücken auf einen der Tracks öffnet ein weiteres Fenster mit den Optionen „Edit Details“, „Show on Map“, „Delete“, „Export“ und „Resume“. Wählt man die Option „Export“ so kann neben dem Dateinamen und dem Ort des Exports auch der zu exportierende Dateityp gewählt werden: KML (Google Earth), KML (Google Maps), GPX 1.0 oder GPX 1.1. Den Inhalt einer GPX-Datei kann man mit einem Texteditor wie WordPad ansehen oder in einer Tabellenkalkulation weiter verarbeiten. KML-Dateien können direkt in „Google Earth“ bzw. „Google Maps“ importiert werden. Es besteht jedoch auch die Möglichkeit, GPX-Dateien direkt als KML-Dateien zu importieren (vgl. Beitrag „GPS-Daten aufbereiten – eine Gebrauchsanweisung“ von W. Riemer im vorliegenden Heft).

GPSTracker Lite

Im Gegensatz zu „GPS Essentials“ bietet der deutschsprachige „GPSTracker Lite“ (https://play.google.com/store/apps/details?id=g.android.gpstracker&hl=de) weniger Tools zur Aufnahme und Auswertung

Abb.4: Datenaufnahme mit „GPSTracker Lite“

Abb.5: Einstellmöglichkeiten in „Meine Tracks“

Abb.6: Aufzeichnung in „Meine Tracks“

aufgenommener GPS-Daten an. Von Vorteil ist die bessere Übersichtlichkeit im Vergleich zu „GPS Essentials". „GPSTracker Lite" interpretiert – wie auch die anderen GPS Anwendungen – das Signal und speichert im Sekundenintervall die Geodaten.

Damit werden neben den Routen auch Informationen wie Durchschnittsgeschwindigkeiten, Höhenmeter oder Entfernungen bereitgestellt. Unter dem Menüpunkt „Status" *(Abb.3)* werden aktuelle Daten wie Datum, Zeit, Geschwindigkeit, Beschleunigung und die Koordinaten des Ortes angezeigt. Unter „Einstellungen" – „Allgemein" kann auch Google Maps als Karte ausgewählt werden. Der Menüpunkt „Einstellung" – „Fortgeschritten" erlaubt zusätzlich die Auswahl des Speicherortes, des Datenformats (GPX bzw. Text), die Einstellung von Zeit- und Distanzintervallen sowie der Messgenauigkeit. Liegt die Messgenauigkeit unter einem definierten Wert, so wird der Standort nicht erfasst. Bevor die Messwertaufnahme beginnt („Starten"), öffnet sich zunächst noch ein weiteres Fenster, in dem zusätzliche Angaben zur Route gemacht werden können. Während der Aufnahme kann man sich grafisch den Verlauf der Geschwindigkeit oder der Höhe anzeigen lassen, den Verlauf der Route auf der Karte oder in einer Statistik verfolgen oder die Datenaufnahme im Logbuch betrachten *(Abb.4)*. Beendet man die Aufnahme („Abbrechen") so können unter „Log files" alle aufgenommenen Routen abgerufen werden. Neben der Speicherung im zuvor ausgewählten Format können die Daten direkt als E-Mail oder an „MyMaps", an „OpenStreetMap", an „Facebook" bzw. an „Goggle Spreadsheets" gesendet werden.

Meine Tracks

Als weitere Anwendung soll „Meine Tracks" vorgestellt werden. Auch diese App (https://play.google.com/store/apps/details?id=com.google.android.maps.mytracks&hl=de) zeichnet Route, Geschwindigkeit, Entfernung und Höhe auf. Die Daten können während der Aufzeichnung live aufgerufen werden. Außerdem ist es möglich, Wegpunkte der Route zu markieren und regelmäßige Sprachmeldungen über den Fortschritt anzuhören.

Direkt nach dem Start kann mit der Aufzeichnung der ersten Route begonnen werden. Die Buttons zum Starten, Pausieren und Stoppen der Aufzeichnung befinden sich am unteren Rand des Displays *(Abb.6)*. Man findet sich in der deutschen Menüführung sehr gut zurecht. Die voreingestellten Parameter können übernommen werden. Selbstverständlich können die Einstellungen aber auch individuell angepasst werden. Unter dem Menüpunkt „Aufzeichnung" *(Abb. 5)* kann u. a. das Zeitintervall der Aufzeichnung eingestellt werden. Zur Auswahl stehen 2 sek., 3 sek., …, 30 sek. und „kleinster (empfohlen)". Wie groß dieses Intervall genau ist, ist allerdings nicht feststellbar. Weiterhin lässt sich auch hier die GPS-Genauigkeit einstellen. So kann ein Standort ignoriert werden, wenn die Genauigkeit einen vorher festgelegten Wert unterschreitet. Während der Aufzeichnung kann man zwischen den Optionen „Karte", „Diagramm" und „Statistik" wechseln (Abb.6). „Meine Tracks" kann die aufgenommenen Tracks in Google Drive, Google Maps, Google Fusion Tables oder Google Text & Tabellen speichern bzw. auf externe Speichergeräte als GPX-, KML-, CSV- oder TCX-Dateien exportieren.

Fazit

Vergleicht man die drei vorgestellten Anwendungen miteinander, so kann man sagen, dass sie sich bezüglich der Genauigkeit der Messung nicht voneinander unterscheiden. Alle drei Datenlogger erfassen das GPS-Signal sehr gut und in frei wählbaren Zeitintervallen. Die aufgezeichneten Daten können jeweils in unterschiedlichen Dateiformaten abgespeichert werden. Hier bietet „Meine Tracks" den Vorteil, dass bereits das in Excel importierbare Dateiformat CSV gewählt werden kann. Die beiden anderen Datenlogger speichern ihre Daten in Formaten, die zunächst z. B. mit „GPS Visualizer" in eine CSV-Datei umgewandelt werden müssen. ■

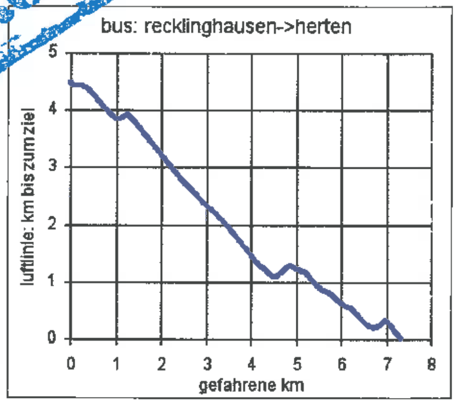
Verfasser

Dr. Christoph Neugebauer
Studienrat i. H.
Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Institut für Didaktik der Mathematik und der Informatik
neugebauer@uni-muenster.de

Mit GPS im Linienbus zur Schule

Wolfgang Riemer

Linienbusse fahren Umwege. Trecking-Navis machen mit der Anzeige *„vmg“ (VelocityMadeGood)* sichtbar, wie langsam man dabei trotz hohen Tempos *„v“* dem Ziel näher kommt. Mit „Pythagoras und Cosinus“ kommt man dem Unterschied zwischen beiden Geschwindigkeiten auf die Schliche, übt sich darin, Graphen zu lesen und sieht den Schulweg in einem neuem Licht.



Kopiervorlage 1

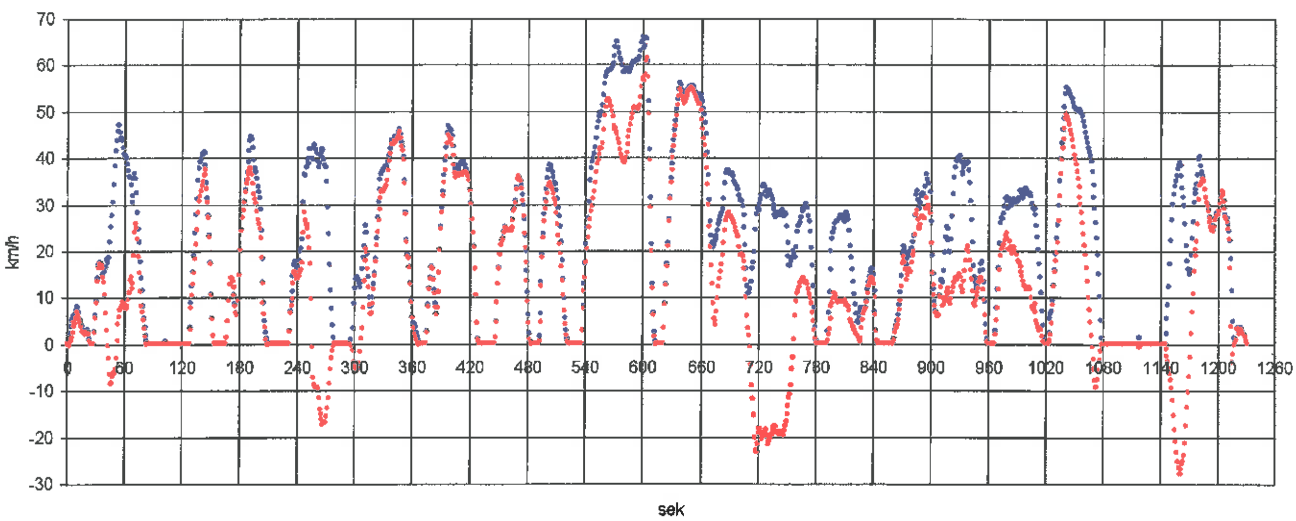
Navigationsgeräte sind gute Fahrtenschreiber. Der blaue Funktionsgraph zeigt den Geschwindigkeitsverlauf einer Busfahrt zur Rosa-Parks Gesamtschule in Herten.

1 In geschlossenen Ortschaften darf man höchstens 50 km/h fahren. Der Bus fuhr aber teilweise schneller. Markiere auf der Karte, wo. Begründe!

2 a) Der rote Graph zeigt die Geschwindigkeit, mit der sich der Bus auf der Luftlinie dem Ziel nähern würde. Er liegt unter dem blauen Graphen. Muss das immer so sein oder ist das Zufall? Begründe.

Google Maps. Kartendaten: © GeoBasis – DE / BKG 2009

b) Wo findet man auf der Landkarte Stellen, an denen sich die beiden Geschwindigkeitsgraphen stark unterscheiden? Wie erklärst du, dass der rote Graph manchmal unter der Zeitachse verläuft? Wo findet man diese Stellen in der Landkarte? Erkläre!



Heading, Bearing, *VelocityMadeGood:* der Cosinus in Aktion

© Garmin Deutschland GmbH 2013
© Alpstein Tourismus GmbH & Co. KG Geoinformationen
© GeoBasis-DE/GEObasis.nrw 2012
© 2010 Intermap Technologies Inc.All rights reserved.
© 2012 NAVTEQ. All rights reserved.
© ADFC, Bett & Bike
© Deutscher Wanderverband (www.wanderbares-deutschland.de)

1. Wie die Abbildungen zeigen, messen Trecking-Navis beim Ansteuern eines Ziels (blauer Pin) zwei Winkel, die als Heading = Fahrtrichtung (328° bzw. 90°) und Bearing = Zielrichtung (26° bzw. 63°) bezeichnet werden. Mit dem Geodreieck kannst du herausfinden, um welche Winkel es sich handelt und von welcher Richtung aus sie gemessen werden.
2. Neben der Tachogeschwindigkeit *v* (Speed 50,5 km/h bzw. 63,8 km/h) messen sie auch die Zielgeschwindigkeit *vmg* = *VelocityMadeGood* (26,8 km/h bzw. 56,9 km/h), mit der man sich auf der Luftlinie dem Ziel nähern würde. Kontrolliere die folgende Formel mit dem Taschenrechner:

   vmg = velocity*cos(heading-bearing). Begründe die Formel an einer eigenen Skizze.
3. Der Linienbus 224 startet um 07:29:19 in S(0;0) am HBF Recklinghausen und erreicht sein Ziel, die Rosa Parks Gesamtschule R(-4410; -760) um 07:49:50 (Positionsangaben in Meter).
   a) Kontrolliere die Positionsangaben am eingeblendeten Maßstab in der Landkarte (siehe *Kopiervorlage 1*).
   b) Berechne die Zielgeschwindigkeit *vmg* um 07:49:50 und um 07:48:39, indem du die die Entfernungen des Busses zum Ziel eine Sekunde vorher und nachher bestimmst – und analog auch die Fahrgeschwindigkeit. Vergleiche deine Ergebnisse zur Kontrolle mit den Tabellenangaben.
   c) Berechne aus den Positionen *x, y* die Fahrtrichtung, die Zielrichtung und kontrolliere die in 2. angegebene Formel erneut.

time	x (m)	y (m)	v (km/h)	vmg (km/h)
07:29:19	0	0	0	0
07:38:49	-2211	107	61.6	46.0
07:38:50	-2228	114	63.5	46.3
07:38:51	-2244	120	64.6	45.6
07:48:38	-4642	-686	38.4	-26.7
07:48:39	-4652	-691	38.9	-27.9
07:48:40	-4661	-696	38.4	-28.1
07:49:50	-4410	-760	0.0	0.0

Fahrprotokoll (Auszug)