

scheinlichkeitsrechnung. Die Reisedaten und die Anzahl der Reisenden seien dabei als beliebig, aber fest vorausgesetzt.

1. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, 1 (2, 3, 4, 5) Flugziele auszuschließen?
2. Ist es möglich, einen Wert für die Wahrscheinlichkeit anzugeben, dass man nach Budapest fliegen darf, wenn man kein Flugziel (1, 2, 3, 4, 5 Flugziele) ausschließt?
3. x sei die Anzahl der Flugziele, für die aktuell keine Flüge verfügbar sind. Für welche Werte von x ist es möglich, über geschickte Eingaben in dem Ausschlussfeld (Abb. 1) genau diese x Flugziele zu ermitteln? Begründe und beschreibe dein Vorgehen.
4. Angenommen, es ist $x = 4$. y bezeichne die Anzahl der Flugziele, die jeweils im Ausschlussfeld angeklickt werden. Wie oft muss man das Ausschlussfeld für $y = 4$ höchstens ausfüllen, um die 4 nicht möglichen Flugziele zu ermitteln? Wie lautet die Antwort für $y = 5$?
5. Was meinst du: Ist es besser, möglichst früh oder möglichst kurzfristig vor dem gewünschten Reiseternin zu buchen? Begründe im Hinblick auf den Überraschungseffekt. Begründe auch in anderer Hinsicht.

3 Lösungshinweise

1. Bei den acht möglichen Flugzielen gibt es acht Möglichkeiten, ein Flugziel auszuschließen. Allgemein gibt es $\binom{8}{k}$ Möglichkeiten k Flugziele auszuschließen, da es sich um eine Auswahl von k aus 8 verschiedenen Flugzielen ohne Berücksichtigung der Reihenfolge handelt.
2. Wenn man annimmt, dass alle Flugziele gleichwahrscheinlich sind, und man k Flugziele ausschließt, dann wäre die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{8-k}$.
3. Es gibt zwei Fälle:
 1. Fall: $x \geq 3$. Dann kann man herausfinden, welche Flugziele möglich sind, indem man folgendermaßen vorgeht: Durch Ausprobieren schließt man Flugziele so aus, bis eine Kombination vorliegt, die nicht möglich ist. Das geht, da man ja höchstens alle bis auf drei Flüge ausschließen kann. Dann tauscht man eine ausgeschlossene Stadt gegen eine nicht ausgeschlossene aus, bis die Meldung »keine Flüge verfügbar« nicht mehr erscheint. So findet man Schritt für Schritt heraus, welche Städte als Flugziel möglich sind.
 2. Fall: $x < 3$. Bei diesen Werten für x ist bei jeder Kombination ausgeschlossener Städte immer mindestens eine dabei, in die man fliegen kann, die aber nicht ausgeschlossen wurde. Da man als Information nur bekommt,

ob ein mögliches Reiseziel dabei ist oder nicht (und nicht wie viele), kann man leider nicht herausfinden, welche Städte in Frage kommen.

4. Zunächst wählt man vier beliebige Städte. Erhält man die Meldung, dass keine Flüge verfügbar sind, kennt man bereits die vier nicht möglichen Flugziele. Andernfalls muss man angeklickte Städte im weiteren Vorgehen so lange austauschen, bis die Meldung erscheint, dass keine Flüge verfügbar sind. Jeder Austausch, bei dem diese Meldung nicht erscheint, bedeutet lediglich, dass man in mindestens eine der vier nicht angeklickten Städte nicht fliegen kann. Man muss also auf jeden Fall herbeiführen, dass man alle möglichen Ziele ausgeschlossen hat. Dafür braucht man schlimmstenfalls $\binom{8}{4} = 70$

Versuche, denn so eine Konstellation gibt es ja genau einmal, und wenn man Pech hat, ist es die letzte.

Beim zweiten Teil der Aufgabe darf man fünf Ziele ausschließen. Hier muss man auch erst wieder eine Konstellation finden, bei der keine Buchung möglich ist. Es

gibt $\binom{4}{3} = 4$ Möglichkeiten aus den vier nicht verfügbaren

Zielen drei auszusuchen. Schlimmstenfalls sind dies die letzten vier Kombinationen, die übrig bleiben, wenn man nacheinander verschiedene Kombinationen von jeweils fünf Städten anklickt. Man braucht also höchstens

$\binom{8}{5} - 3 = 53$ Versuche, um eine nicht-mögliche Kombination zu finden.

Dann ist man aber wieder am Ziel, denn man weiß dann von jeder Kombination, ob sie möglich ist oder nicht (über die verbleibenden drei Kombinationen weiß man ja dann, dass sie nicht möglich sind).

5. Wenn man spät bucht, ist die Anzahl der nicht verfügbaren Flüge eher größer. Mit der Vorgehensweise von oben kann man dann möglicherweise bestimmen, wohin man fliegen möchte. Allerdings kann es bei einer späten Buchung natürlich auch sein, dass die attraktiveren Reiseziele schon nicht mehr zur Verfügung stehen. Hat man viel Zeit und möchte nur ganz bestimmte Ziele anfliegen, so sollte man regelmäßig überprüfen, ob man schon feststellen kann, welche Städte als Reiseziel möglich sind. So lässt sich der Termin abpassen, zu dem ggf. das gewünschte Reiseziel gebucht werden kann. Eine frühe Buchung führt eher zu einem »Überraschungsflug« als eine späte.

Dr. ASTRID BRINKMANN, Institut für Didaktik der Mathematik und Informatik, Fachbereich Mathematik und Informatik der Universität Münster, Fliednerstrasse 21, 48149 Münster, astrid.brinkmann@math.uni-muenster.de ■

Dem »Navi« auf der Spur

mit Google-Maps, Tabellenkalkulation, Analysis und Vektorrechnung

WOLFGANG RIEMER

Meinem verehrten Lehrer, Herrn KARL-HEINZ HÜR TEN, zum 86. Geburtstag gewidmet.

Dieser Beitrag zeigt, was GPS-Empfänger speichern und wie man dies im Mathematikunterricht nutzen kann.

1 Einleitung

Fast jeder Autofahrer besitzt heute sein Navigationsgerät. Es gibt Geräte, die auch Fahrspuren (»Tracks«) aufzeichnen. Das sind Textdateien mit exakt im Sekundenabstand abgespeicherten Positionsangaben. Während die prinzipielle Funktionsweise der GPS-Technologie als Thema für den Mathematikunterricht schon vor Jahren erschlossen wurde [1], blieben die Datenschätze, die diese Geräte liefern, bisher im Mathematik- und Physik-Unterricht unbeachtet: Mit den funktionalen Abhängigkeiten zwischen Zeit, Weg, Geschwindigkeit und Beschleunigung trägt man mit seinem Navigationsgerät »fundamentale Ideen der Analysis« in der Jackentasche, ohne es zu wissen. Und wenn man die Bewegung in der Ebene mit Skalar- und Vektorprodukt untersucht, kann man beim Kurvenfahren Fahrtrichtungen (als Integral der Winkelgeschwindigkeit), Querbeschleunigungen und Fliehkräfte studieren ... und nicht nur Analysis, sondern auch Vektorrechnung im wahrsten Sinne des Wortes »erleben«. Die Thematik eignet sich – da alle Bereiche der Schulmathematik angesprochen und als Werkzeuge genutzt werden, für den Mathematikunterricht ab Klassenstufe 9 bis zum Abitur [5].

2 Track-Dateien und Google-Maps

Viele GPS-Navigationsgeräte lassen sich so einstellen, dass die gefahrene Strecke als Folge von Wegpunkten abgespeichert wird. Wenn das Handbuch dazu keine Informationen enthält, sucht man einfach auf der Speicherkarte nach einem entsprechenden Ordner (z. B. UserTracks) oder nach Dateien mit aktuellem Datum. Im Folgenden beziehen wir uns auf ein Navigationsgerät der Firma Medion¹ mit GoPal Software. Bei diesem

Gerät haben die Dateinamen die Form A_datum_Uhrzeit.trk. So wurde die letzte Datei aus Abbildung 1 am 14.12.2008 um 12:31:34 Uhr abgespeichert. Die Zeit wird den GPS-Signalen entnommen.

Mit WordPad kann man einen Eindruck vom Inhalt der Dateien gewinnen. In Abbildung 2 erkennt man in Spalte 2 die Zeit im Sekundenabstand, beginnend mit 21:13:49 Uhr, dann folgen geographische Breite, Länge, Geschwindigkeit in km/h und Höhe über NN. Die letzte Spalte zeigt, die Zahl der empfangenen Satelliten, die vorletzte die Genauigkeit HDOP² der gemessenen Position.

Mit dem Freeware-Programm »gpsbabel« kann man alle gebräuchlichen Dateitypen in Tabellenkalkulations-lesbare Formate umwandeln. Am einfachsten geht das über die Internet-Schnittstelle <http://www.gpsvisualizer.com/gpsbabel/>. Man klickt das Format an, welches das Navigationsgerät liefert und wählt das gewünschte Zielformat. Dann wird die Datei hochgeladen und die umgewandelte Datei steht zum Download bereit (Abb. 3).

Wenn man als Zielformat »Tab delimited fields ...« wählt, lässt sich die Datei (samt Spaltenüberschriften) problemlos in jede Tabellenkalkulation importieren.

Wie Abbildung 4 zeigt, wird aus den Ursprungsdaten auch die zurückgelegte Wegstrecke berechnet. Bei Excel stellt man unter Extras-Optionen-International das Dezimaltrennzeichen auf ».« und das Tausender-Trennzeichen auf ».« ein. Die Datums-Spalte lässt sich nach Wunsch formatieren.

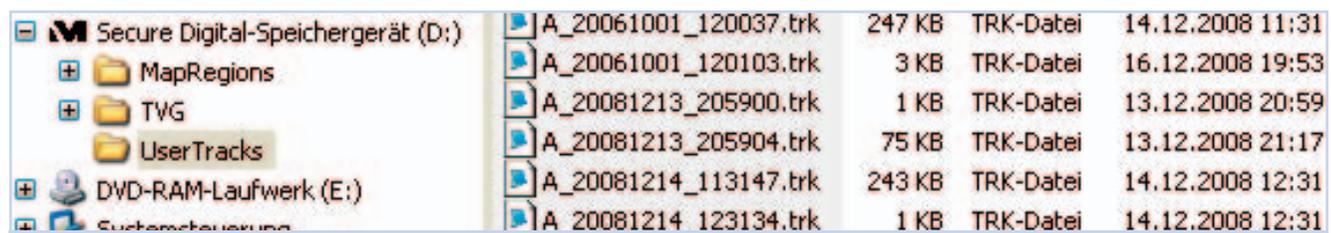


Abb. 1. So speichert das Medion Navi P4410 die Tracks.

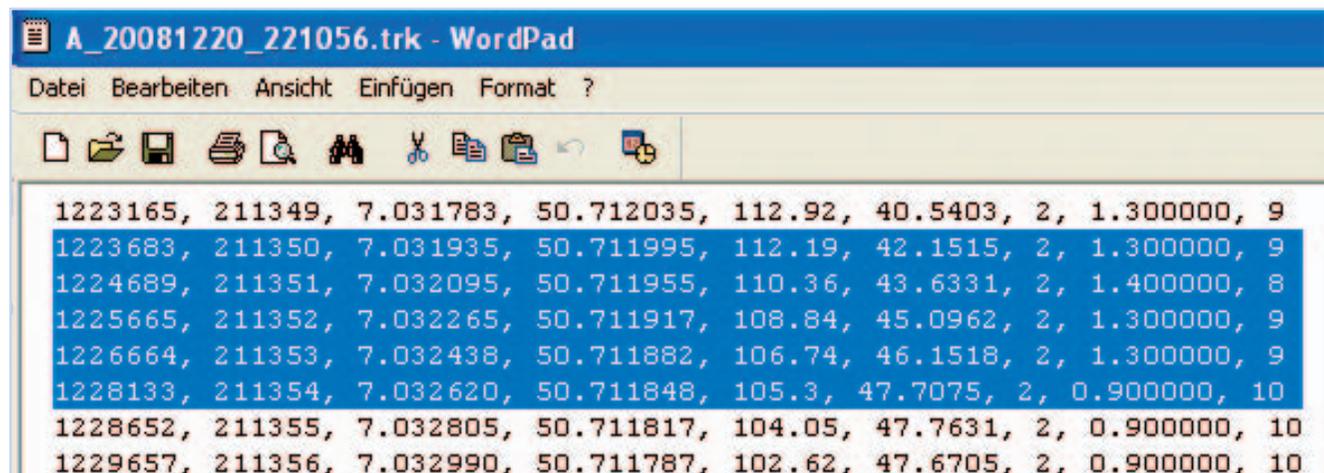


Abb. 2. Medion Daten, von GoPal-Software aufgezeichnet

¹ Navi P4410 auch über Aldi weit verbreitet

² Horizontal Dilution of Precision – horizontale »Verdünnung« der Genauigkeit

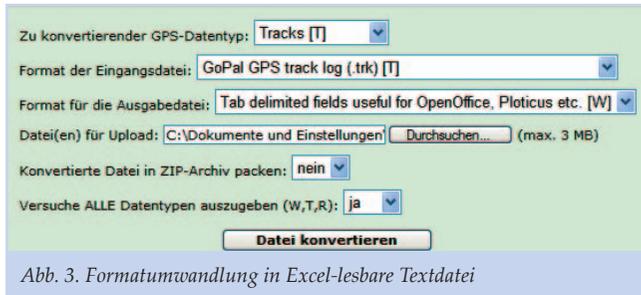


Abb. 3. Formatumwandlung in Excel-lesbare Textdatei

Neben der Umwandlung in Tabellenkalkulations-Formate bietet das obige Internetportal auch die Darstellung der Daten in Google-Maps an. Text-Dateien werden ebenso verarbeitet wie Tabellenkalkulations-Formate. Die Karten lassen sich beliebig zoomen, so dass die (im Sekundenabstand aufgezeichneten) Messpunkte sichtbar werden. Abbildung 5 zeigt das Protokoll einer Fahrt von Bonn nach Köln samt einem Ausschnitt am Autobahnkreuz Köln Süd.

2 Trigonometrie und Landkarten

2.1 Koordinatenumwandlung von der Kugel in die Ebene

Jeder Punkt P auf der Erdoberfläche lässt sich bekanntlich durch seine geographische Breite (Latitude) φ und seine geographische Länge (Longitude) λ beschreiben. So muss man vom Äquator um den Winkel $\varphi = 50,7^\circ$ nach Norden und vom Nullmeridian, auf dem der Londoner Vorort Greenwich liegt,

$7,0^\circ$ nach Osten gehen, um in die Nähe von Bonn zu gelangen. Diese »Kugelkoordinaten« (φ, λ) speichern GPS-Geräte im Sekundenabstand, woraus sich die Fahrspuren (»Tracks«) ergeben.

Lokal sieht die Erde aus wie eine Ebene, deren Punkte sich durch x -Koordinaten (Richtung Osten) und y -Koordinaten (Richtung Norden) beschreiben lassen. Wenn man sich von P aus um 1° nach Norden bewegt, entspricht das mit dem Erdradius $r = 6\,370\,000$ m stets der Strecke

$$\Delta y = \frac{2\pi r}{360} = 111,177 \text{ km.}^3$$

Wenn man sich um 1° nach Osten bewegt, muss diese Streckenlänge (abhängig vom Breitengrad φ) mit $\cos\varphi$ multipliziert werden, d. h.

$$\Delta x = 71,369 \text{ km bei Bonn.}$$

2.2 Landkarten mit Excel zeichnen

Abbildung 6 zeigt, wie die Umrechnung und das Kartenzeichnen mit Excel gelingen. Die vom Navigationsgerät gemessenen Kugelkoordinaten stehen in den Spalten B und C. In die Zellen I3 und J3 werden die Breite und die Länge des ersten Messpunktes kopiert. Dort soll der Ursprung der Landkarte liegen. In Zelle I3 trägt man den Erdradius ein. In J2 berechnet man den Radius des aktuellen Breitenkreises »=cos(bogenmass(J3))*I2«. Die x - und y -Koordinaten ergeben sich dann durch Kopieren der Formeln »=bogenmass(C6-I\$3)*J\$2« (Zelle I6) und »=bogenmass(B6-J\$3)*I\$2« (Zelle J6) »nach unten«.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Index	Lat	Lon	Altitude (m)	Distance (km)	Speed (km/s)	Course (°)	Time	HDOP	Satellites
170	168	50.712035	7.031783	112.92	0.582289	40.540298	0	08:12:20-21:13:49	1.3	9
171	169	50.711995	7.031935	112.19	0.593892	42.151501	0	08:12:20-21:13:50	1.3	9
172	170	50.711955	7.032095	110.36	0.606017	43.633099	0	08:12:20-21:13:51	1.4	8
173	171	50.711917	7.032265	108.84	0.618725	45.096199	0	08:12:20-21:13:52	1.3	9
174	172	50.711882	7.032438	106.74	0.631527	46.151798	0	08:12:20-21:13:53	1.3	9
175	173	50.711848	7.03262	105.3	0.644903	47.7075	0	08:12:20-21:13:54	0.9	10
176	174	50.711817	7.032805	104.05	0.658393	47.7631	0	08:12:20-21:13:55	0.9	10
177	175	50.711787	7.03299	102.62	0.671854	47.670502	0	08:12:20-21:13:56	0.9	10

Abb. 4. Ergebnis der Formatumwandlung

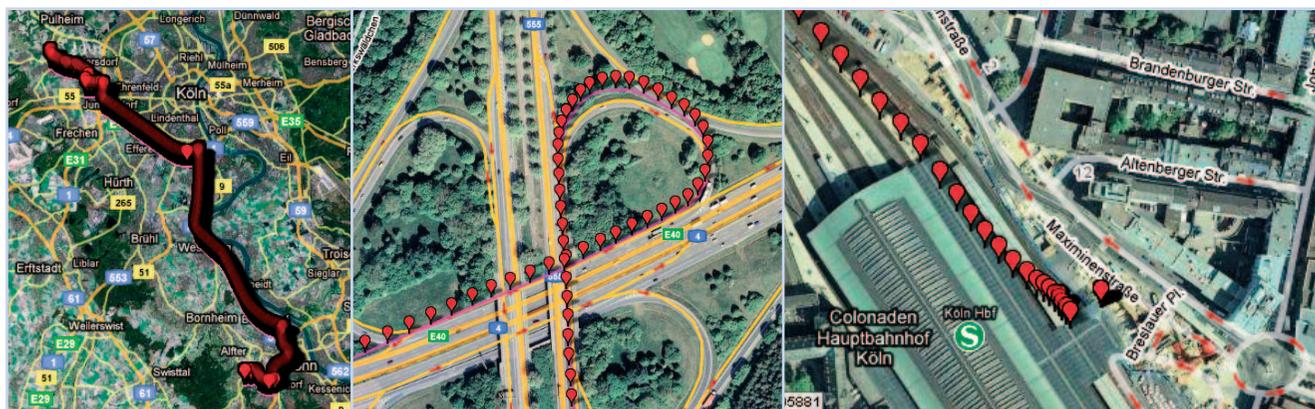


Abb. 5. a) von Bonn nach Köln mit b) Ausschnitt am Kreuz Köln Süd und c) Einsteigen in die S-Bahn, Köln Hbf

³ 1/60 davon entspricht einer Bogenminute und wird als Seemeile (1,85295 km) bezeichnet.

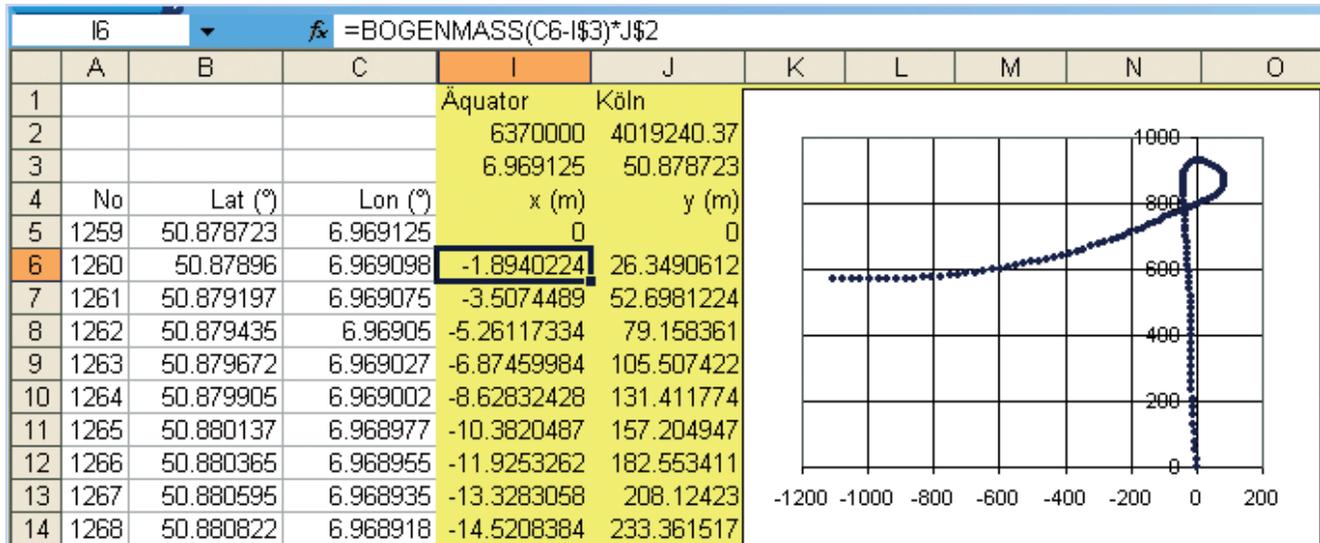


Abb. 6. Die Google-Karte aus Abb. 5b als Excel-Punktdiagramm

Wie man sieht, werden die x -Koordinaten langsam kleiner (negativ), die y -Koordinaten rasch größer. Man fährt also mit hoher Geschwindigkeit nach Norden und ein wenig nach Westen. Das zeigt auch die Karte, die man nun als Punktdiagramm aus den Spalten I und J gewinnt.

3 Fahrtprotokolle – Integration und Differenziation

3.1 Neue Perspektive

Mit Bewegungsproblemen führt man seit jeher in fundamentale Ideen der Differenzial- und Integralrechnung ein. Wenn man statt ausgedachter (geschönter, vgl. [6; S. 95]) Daten selbst gemessene Realität in den Unterricht mitbringt, werden emotionale Brücken in die Alltagswelt geschlagen, Lösungen werden an der Realität überprüfbar.

Beispiel 1: Abbildung 7 enthält Daten einer S-Bahnfahrt von Köln Weiden nach Köln Hbf. Fassen Sie möglichst viele Informationen in Worte, die Sie dem Ausschnitt des Protokolls entnehmen können. Versuchen Sie, nur anhand dieser Tabelle eine Antwort auf die Frage: »Wie schnell würde die S-Bahn von 0 auf 100 km/h beschleunigen«?

Beispiel 2: Die drei Grafiken aus Abbildung 8 werden an die Schüler einer Dreiergruppe ausgeteilt. Jeder für sich soll versuchen, möglichst viele Aussagen zu formulieren, die er dem Graphen entnehmen kann.

Dann setzt man sich zusammen, tauscht sich aus und überprüft die Aussagen der jeweils anderen an der eigenen Grafik. Und dann kann man untersuchen, wie pünktlich die S-Bahn war. Also die Realität am Modell messen.

3.2 Modellbildung

Es sieht so aus (Hypothese), als würde die Geschwindigkeit beim Anfahren linear mit der Zeit ansteigen und beim Bremsen linear abfallen. In beiden Fällen müsste der Weg dann quadratisch von der Zeit abhängen. (Stücke einer nach oben bzw. nach unten geöffneten Parabel.) Begründen Sie diesen theoretischen Zusammenhang mithilfe von Integralen. Untersuchen Sie die Hypothese mit detaillierten Ausschnitten aus dem Fahrtprotokoll.

Wie überzeugend die Ergebnisse solcher Modellbildungs-Untersuchungen sind, zeigt Abbildung 9. Man vergleicht den zurückgelegten Weg s (Spalte O) in Abhängigkeit von der Zeit (in Sekunden, Spalte N) mit der Modellparabel $s(t) = 0,5 at^2$, wobei der Faktor a (angenommene Beschleunigung) mit einem Schieberegler eingestellt wird.

Schöner kann die Übereinstimmung zwischen Modell und Wirklichkeit nicht sein.

Die S-Bahn scheint Parabeln zu kennen. Sie beschleunigt beim Start mit $a = 1,1 \text{ m/s}^2$ (erster Wert in Spalte P). Aber die Abbildung belegt, dass das Parabelmodell nur in der Anfangsphase des Beschleunigungsvorganges trägt, danach nimmt der Weg nur noch linear mit der Zeit zu, die Bahn fährt mit konstanter Geschwindigkeit.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Index	Lat	Lon	Distance (km)	Speed (km/s)	Time	HDOP	Satellites
58	56	50.940885	6.815527	0.01438	0	7:37:33	1	8
59	57	50.940885	6.815527	0.01438	0	7:37:34	0.9	9
60	58	50.940942	6.815568	0.021346	6.61164	7:37:35	0.9	9
61	59	50.940945	6.815603	0.023824	10.5008	7:37:36	0.9	9
62	60	50.940953	6.815658	0.027783	15.5012	7:37:37	0.9	9
63	61	50.940967	6.815728	0.032935	19.0756	7:37:38	0.9	9
64	62	50.940978	6.815812	0.038953	22.4648	7:37:39	0.9	9
65	63	50.940992	6.815907	0.045797	25.8354	7:37:40	0.9	9
66	64	50.94101	6.816013	0.053497	30.1506	7:37:41	0.9	9
67	65	50.941032	6.816157	0.063891	36.225101	7:37:42	0.9	9
68	66	50.94105	6.816312	0.074946	40.151402	7:37:43	0.9	9
69	67	50.94107	6.816482	0.087077	43.799801	7:37:44	1	8
70	68	50.941092	6.816663	0.100007	48.318699	7:37:45	1.2	7
71	69	50.941118	6.816877	0.115294	53.337601	7:37:46	1.1	8
72	70	50.941142	6.8171	0.131163	56.3008	7:37:47	0.9	9
73	71	50.941168	6.81734	0.148245	60.2826	7:37:48	0.9	9
74	72	50.941198	6.817598	0.166648	65.227402	7:37:49	0.9	9
75	73	50.941227	6.817867	0.185791	68.820297	7:37:50	1	8
76	74	50.941257	6.81815	0.20592	72.431702	7:37:51	1	8
77	75	50.941288	6.818447	0.227037	75.765297	7:37:52	1	8
78	76	50.941323	6.818755	0.24899	78.450699	7:37:53	1	8
79	77	50.941352	6.819073	0.271528	81.969498	7:37:54	1	8

Bahnhof/Haltestelle	Datum	Zeit
Köln-Weiden West	Di, 10.03.09	ab 07:36
Lövenich		ab 07:38
Köln-Müngersdorf Technologiepark		ab 07:41
Köln-Ehrenfeld		ab 07:44
Köln Hansaring		ab 07:48
Köln Hbf	Di, 10.03.09	an 07:50

Abb. 7. a) Protokoll einer S-Bahnfahrt von Köln Weiden nach Köln Hbf und b) der Fahrplan der zum Vergleich

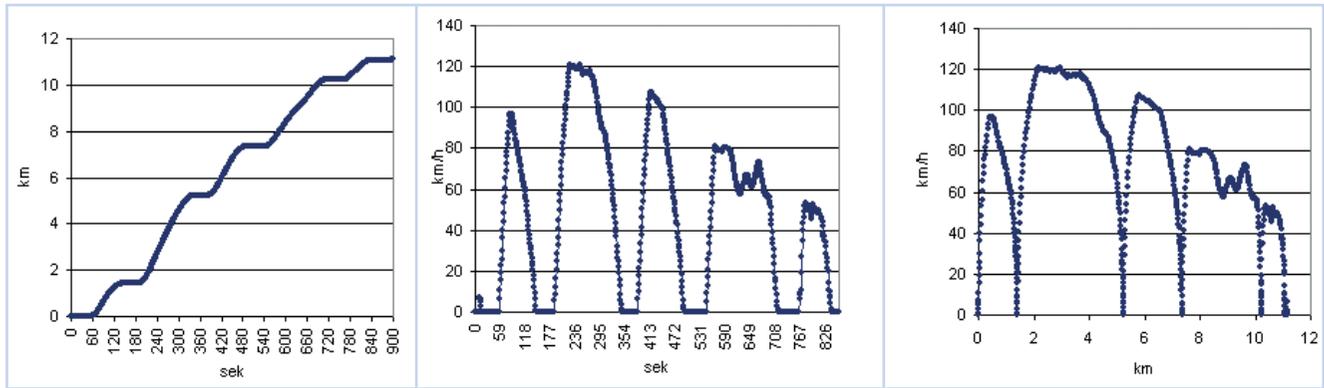


Abb. 8. Graphen zur S-Bahnfahrt aus Abb. 7 mit sechs Haltestellen

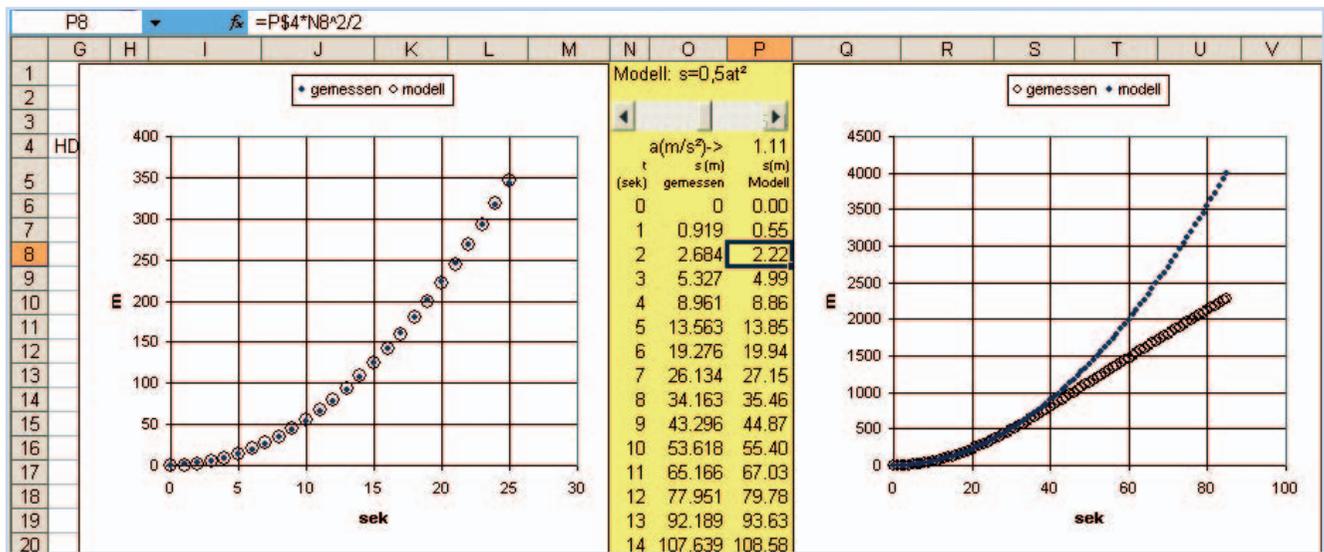


Abb. 9. a) Gleichförmig beschleunigte Bewegung beim Anfahren der S-Bahn, b) konstante Geschwindigkeit bei weiterer Fahrt

3.3 Vertrauen ist gut, Kontrolle ist besser

Abbildung 10 zeigt die Spur einer Straßenbahnfahrt mit der Linie 13 in Köln. Die zugehörigen vom Navigationsgerät aufgezeichneten Messwerte sind in Abbildung 11 weiß unterlegt. Es ist klar, dass es die zurückgelegte Strecke und die Geschwindigkeiten nur aus den Positionen berechnen kann. Das können wir mit Excel auch.

Aus den (in km umgerechneten) Positionsangaben zweier aufeinander folgender Zeilen lassen sich mit dem Satz des Pythagoras die in jeder Sekunde zurückgelegten Wegstückchen berechnen. Sie liefern durch Addieren den Gesamtweg in Spalte L. Durch numerisches Differenzieren »(Weg eine Sekunde später – Weg eine Sekunde zuvor)/2 Sekunden« erhält man die momentanen Geschwindigkeiten, die – wie die Abbildung 11 belegt – sehr gut mit den vom Navigationsgerät gelieferten



Abb. 10. Spur einer Straßenbahnfahrt in Köln

Größen zusammen passen. Durch »numerisches Differenzieren« der Geschwindigkeiten erhält man die Beschleunigungen aus Abbildung 12.

Wird der Satellitenkontakt bei Unterführungen kurz unterbrochen, extrapoliert das Gerät linear und produziert dann einen Sprung, wenn der Funkkontakt wieder besteht. Wenn der Kontakt zu den Satelliten ganz abreißt, erlebt man das Gerät bei einer »wilden« Suche.

4 Kurvenfahrt

4.1 Kursberechnung

Abbildung 13 zeigt die Spur einer zweimaligen Kreiseldurchfahrt, wobei der neu gebaute Kreisel in Google-Maps noch nicht eingetragen ist. Die Startrichtung

$$\alpha(0) = 221,383^\circ \quad (O = 0^\circ, N = 90^\circ)$$

lässt sich aus den ersten Spurpunkten mit Winkelfunktionen berechnen (Abb. 14). Wenn man aber aus der Fahrtrichtung (in $^\circ$) nicht nur die Himmelsrichtung, sondern auch entnehmen möchte, wie oft man den Kreisel durchfahren hat, muss man die (orientierten – eine Linksdrehung zählt positiv) Winkeländerungen sekundenweise addieren, also die Drehgeschwindigkeit ω (in $^\circ/s$) integrieren.

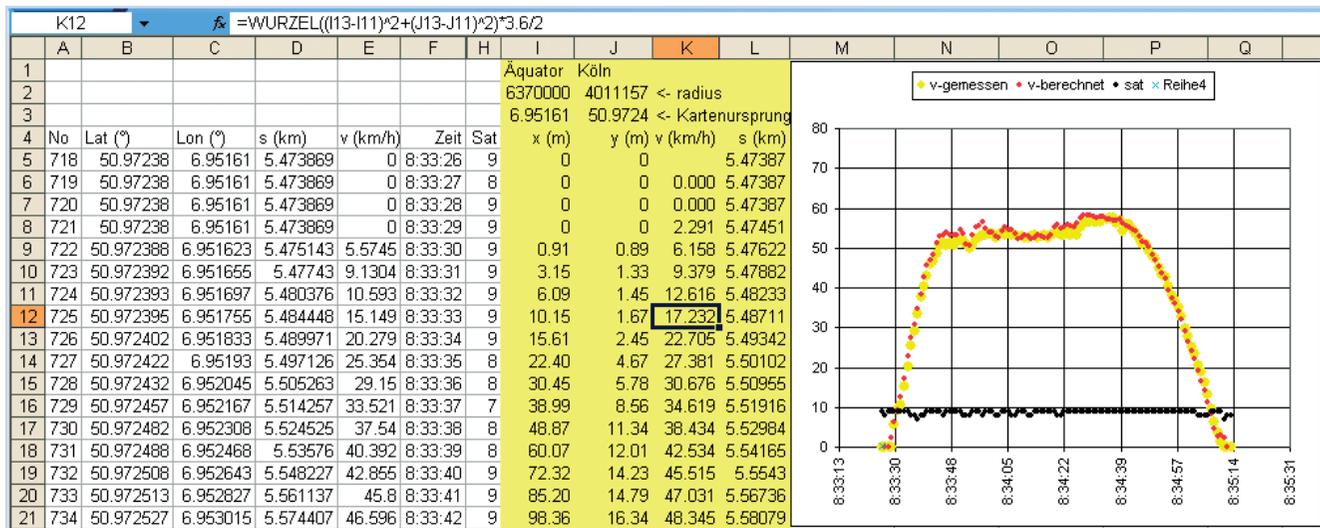


Abb. 11. Gemessene Daten (weiß) mit Kontrollrechnungen (gelb) aus Abb. 10. Die Grafik visualisiert auch die Zahl empfangener Satelliten.

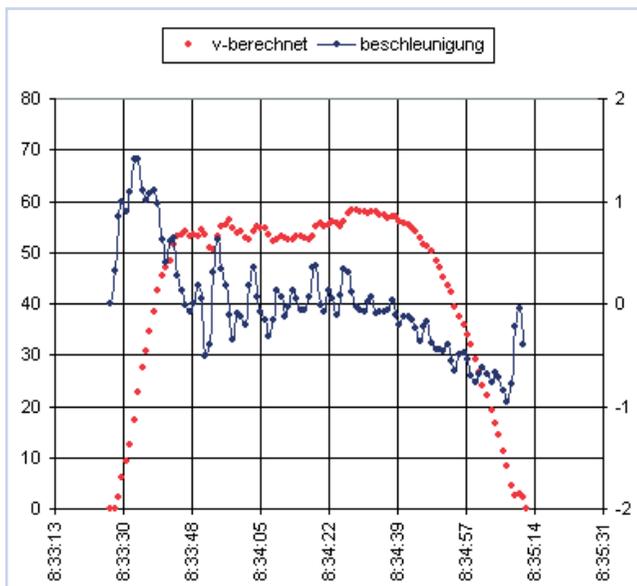


Abb. 12. Geschwindigkeit in km/h (rot) linke Hochachse und Beschleunigung in m/s² (blau) rechte Hochachse

Berechnung des Kurvenradius r :

Wenn man den Winkel $d\alpha$ im Bogenmaß misst, dann gilt für die Länge des Kreisbogens

$$s = r \cdot d\alpha \quad \text{bzw.} \quad r = \frac{s}{d\alpha}$$

Um r zu berechnen, teilt man also die Länge des Wegstückchens s zwischen zwei benachbarten Punkten durch den Drehwinkel $d\alpha$ (Spalte N, Abb. 14). Wenn r negativ ist, fährt man eine Rechtskurve, sonst eine Linkskurve⁴.

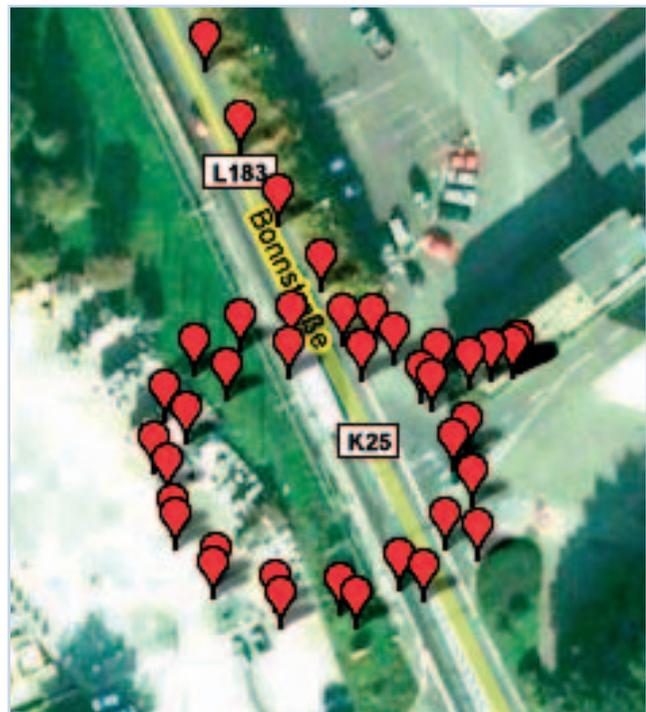


Abb. 13. Erst zweimal durch den Kreis, dann Richtung NO ($\approx 100^\circ$)

Es gilt

$$\alpha(t) = \alpha(0) + \int_0^t \alpha(\tau) d\tau$$

Diese Integration wird mit Excel (Abb. 14) durchgeführt, den zeitlichen Richtungsverlauf entnimmt man Abbildung 15.

4.2 Krümmungsradius

Wenn man eine Kurve als Fahrt auf einem kleinen Kreisbogen deutet, kann man ihr einen »Kurvenradius« r zuordnen: Je kleiner der Radius, desto enger ist die Kurve. Bei einer »Geradausfahrt« wird der Krümmungsradius »unendlich« groß.

⁴ Natürlich kann man aus der Spur einer Kreisfahrt auch die eingeschlossene Fläche $A = \int y(t) \cdot \vec{v}_x(t) dt$ oder $A = \int x(t) \cdot \vec{v}_y(t) dt$ berechnen und das Ergebnis mit der mit der Kreisflächenformel $A = r^2 \pi$, vergleichen. Dabei ist r der Krümmungsradius. Die Ergebnisse des Vergleichs sind beeindruckend gut. Auch manche Trekking-Navigationsgeräte (z. B. Garmin Oregon 300) berechnen zu geschlossenen Tracks die eingeschlossene Fläche.

N7		=ARCSIN((K6*L8-K8*L6)/(M6*M8))/PI()*180/2														
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	
1								Äquator	Köln							
2								6370000	4016444.27	<- radius						
3								6.829772	50.911133	<- Kartenursprung	startrichtung ->	221.383				
4	No	Lat (°)	Lon (°)	s (km)	(km/h)	Zeit	HDOP	Sat	x (m)	y (m)	vx (m/s)	vy (m/s)	v (m/s)	d-alpha (°)	alpha (°)	r (m)
5	0	50.91113	6.829772	0	0	19:40:04	1	10	0	0	0	0	0	0	221.383	
6	1	50.91113	6.829772	0	0	19:40:05	1	10	0	0	-0.315	-0.278	0.420		221.383	
7	2	50.91113	6.829763	0.0008	7.686	19:40:06	1	10	-0.63090159	-0.55588737	-1.893	-0.556	1.973	-12.874	208.510	-8.8
8	3	50.91112	6.829718	0.004	10.63	19:40:07	0.9	11	-3.78540955	-1.11177473	-2.979	-0.834	3.094	-8.184	200.326	-21.7
9	4	50.91111	6.829678	0.0071	11.28	19:40:08	0.9	11	-6.58941662	-2.22354947	-3.715	0.000	3.715	-17.107	183.219	-12.4
10	5	50.91112	6.829612	0.0118	19	19:40:09	0.9	11	-11.2160283	-1.11177473	-5.293	1.779	5.584	-10.333	172.886	-31.0
11	6	50.91115	6.829527	0.0183	25.34	19:40:10	0.9	11	-17.1745433	1.33412968	-6.484	2.446	6.930	3.177	176.063	125.0
12	7	50.91117	6.829427	0.0257	26.41	19:40:11	0.9	11	-24.184561	3.78003409	-7.185	1.556	7.352	11.203	187.266	37.6

Abb. 14. Berechnungen zur Kreiseldurchfahrt in Abb. 13

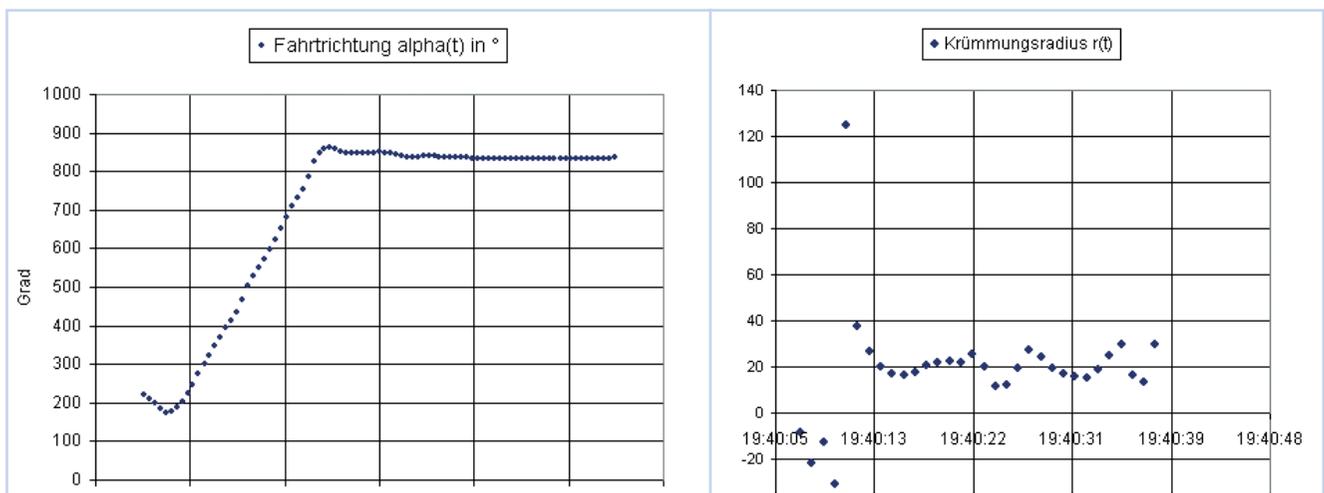


Abb. 15. Fahrrichtung und Krümmungsradius während der Kreiselfahrt. Bei der Einfahrt in den Kreisel nimmt man erst eine kleine Linkskurve.

Zu den Berechnungen in Abbildung 14:
Der Geschwindigkeitsvektor \vec{v}_t wird zu jedem Zeitpunkt t aus den Positionen eine Sekunde vorher bzw. eine Sekunde später berechnet:

$$\vec{v}_t = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{P_{t-1}P_{t+1}})$$

Die Winkelgeschwindigkeit ω erhält man analog, indem man den Winkel $d\alpha$ zwischen den Geschwindigkeitsvektoren eine Sekunde vorher und eine Sekunde nachher bestimmt und durch die verstrichene Zeit (2 s) teilt nach der Formel

$$\sin(d\alpha) = \frac{1}{2} \frac{|\vec{v}_{t-1} \times \vec{v}_{t+1}|}{|\vec{v}_{t-1}| \cdot |\vec{v}_{t+1}|} \text{ (markierte Zelle N7 in Abb. 14).}$$

Die Kursrichtung α ergibt sich, indem man den Drehwinkel $d\alpha$ zu der vorherigen Richtung α addiert (Spalte O).

5 Tangential- und Quereschleunigung

Bevor man mit dem Auto eine Kurve anfährt, drosselt man die Geschwindigkeit (Bremsbeschleunigung entgegen der Fahrtrichtung – wegen der Trägheit »fliegt« man nach vorne).

Gleichzeitig wirkt bei einer Rechtskurve eine Quereschleunigung nach rechts – durch die Trägheit wird man nach links gedrückt. Mit Hilfe von Vektoren lassen sich Brems- und Quereschleunigung berechnen. Das wird am Beispiel der Kurve

aus Abbildung 5b durch das Kölner Südkreuz mithilfe der Abbildung 16 und 17 erläutert:

Aus Abbildung 17a entnimmt man, dass der Geschwindigkeitsvektor um 21:32:45 Uhr (Zeile 50, Abb. 17) den Wert

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,4 \\ 9,78 \end{pmatrix}$$

hat. Das Auto fährt mit 1,4 m/s in x -Richtung (Osten) und mit 9,78 m/s in y -Richtung (Norden).

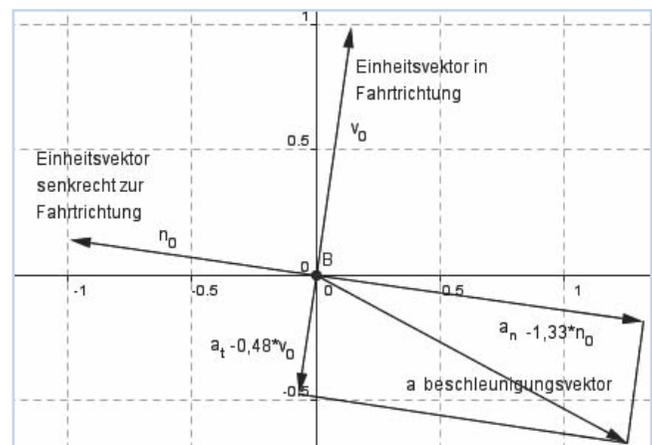


Abb. 16. Zerlegung des Beschleunigungsvektors in zueinander orthogonale Komponenten

Der Betrag dieses Vektors

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 9,88 \text{ in m/s}$$

bzw. 36,88 km/h ist die »Tachogeschwindigkeit« (Spalte E). Der zugehörige Einheitsvektor

$$\vec{v}_0 = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \begin{pmatrix} 0,142 \\ 0,990 \end{pmatrix}$$

gibt die Fahrtrichtung an. Orthogonal »links« zur Fahrtrichtung steht der Normalen-Einheitsvektor

$$\vec{n}_0 = \begin{pmatrix} -0,990 \\ 0,142 \end{pmatrix} \quad (\text{Abb. 16}).$$

Auch die Beschleunigung ist als »Geschwindigkeitsänderung/ verstrichene Zeit« ein Vektor. In Zeile 50 ergibt er sich, wenn die Geschwindigkeitsvektoren eine Sekunde nachher und vorher voneinander subtrahiert und die Differenz (wegen der 2 s Zeitdifferenz) halbiert, zu

$$\vec{a} = \frac{1}{2} (\vec{v}_{51} - \vec{v}_{49}) = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,25 \\ -0,67 \end{pmatrix}.$$

Das Auto beschleunigt in x-Richtung mit 1,25 m/s² und bremst in y-Richtung mit -0,67 m/s² (Abb. 17a, Zellen L50 und M50). Tangential- und Normalbeschleunigung erhält man hieraus, indem man diesen Beschleunigungsvektor nach Abbildung 16 zerlegt in eine Komponente in Fahrtrichtung \vec{v}_0 und eine in Richtung \vec{n}_0 senkrecht dazu. Dazu projiziert man den Beschleunigungsvektor auf diese Einheitsvektoren. Man erhält die Tangentialbeschleunigung (Bremsbeschleunigung)

$$a_{\text{tang}} = \vec{a} \cdot \vec{v}_0 = -0,48 \text{ in m/s}^2$$

(Abb. 17, Zelle M50). Das Auto reduziert seine Geschwindigkeit in einer Sekunde um 0,48 m/s. Die Normalbeschleunigung (Abb. 17, Zelle N50) ist mit

$$a_{\text{normal}} = \vec{a} \cdot \vec{n}_0 = -1,33 \text{ in m/s}^2$$

mehr als doppelt so groß wie die Bremsbeschleunigung. Wegen des negativen Vorzeichens liegt eine Rechtskurve vor. Nach der Newton-Formel $F = m\vec{a}$ wird ein 50 kg schwerer Fahrer mit $-50 \cdot 0,48 \text{ N} = -24 \text{ N}$ nach vorne und mit $50 \cdot 1,33 \text{ N} = 66,5 \text{ N}$ in Richtung Fahrertür gedrückt.

Den Geschwindigkeitsverlauf der in Abbildung 5b dargestellten Fahrt zeigt Abbildung 18, das Zusammenspiel von Brems- und Querbearbeitung entnimmt man Abbildung 19.

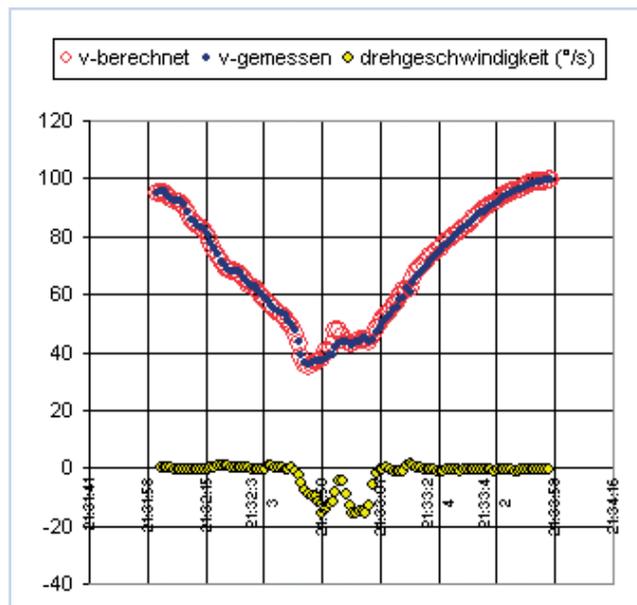


Abb. 18. Geschwindigkeit und Winkelgeschwindigkeit in der Kurve

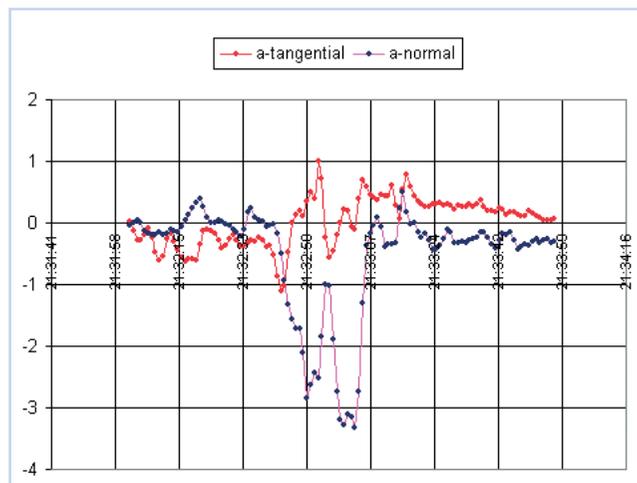


Abb. 19. Tangential- und Normalbeschleunigung im Zusammenspiel

O52		f ₅ = (I52*M52-J52*L52)/K52														
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	
4	No	Lat (°)	Lon (°)	s (km)	v (km/h)	Zeit	x (m)	y (m)	vx (m/s)	vy (m/s)	v (m/s)	ax (m/s ²)	ay (m/s ²)	a-tang	a-normal	
48	1302	50.88647	6.968543	28.658063	43.355301	21:32:43	-40.83	861.29	-0.39	11.90	11.90	0.54	-1.08	-1.10	-0.51	
49	1303	50.886572	6.968542	28.669418	38.7253	21:32:44	-40.90	872.63	0.32	10.73	10.73	0.89	-1.06	-1.03	-0.93	
50	1304	50.886663	6.968552	28.679573	36.688099	21:32:45	-40.20	882.75	1.40	9.78	9.88	1.25	-0.67	-0.48	-1.33	
51	1305	50.886748	6.968582	28.689267	35.780602	21:32:46	-38.09	892.20	2.81	9.39	9.80	1.49	-0.44	0.00	-1.56	
52	1306	50.886832	6.968632	28.699255	36.595501	21:32:47	-34.58	901.54	4.38	8.89	9.92	1.60	-0.64	0.13	-1.71	
53	1307	50.886908	6.968707	28.709221	36.947399	21:32:48	-29.32	909.99	6.00	8.12	10.09	1.51	-0.86	0.20	-1.73	
54	1308	50.886978	6.968803	28.719525	37.243698	21:32:49	-22.59	917.77	7.40	7.17	10.31	1.54	-1.45	0.10	-2.11	
4	I	J	K	L	M	N	O									
4	vx (m/s)	vy (m/s)	v (m/s)	ax (m/s ²)	ay (m/s ²)	a-tang	a-normal									
48	= (G49-G47)/2	= (H49-H47)/2	= WURZEL(I48 ² + J48 ²) / 2	= (I49-I47)/2	= (J49-J47)/2	= (I48*I48 + J48*J48) / 2	= (I48*M48 - J48*L48) / 2									
49	= (G50-G48)/2	= (H50-H48)/2	= WURZEL(I49 ² + J49 ²) / 2	= (I50-I48)/2	= (J50-J48)/2	= (I49*I49 + J49*J49) / 2	= (I49*M49 - J49*L49) / 2									
50	= (G51-G49)/2	= (H51-H49)/2	= WURZEL(I50 ² + J50 ²) / 2	= (I51-I49)/2	= (J51-J49)/2	= (I50*I50 + J50*J50) / 2	= (I50*M50 - J50*L50) / 2									

Abb. 17. a) Berechnung von Tangential- und Querbearbeitung, b) und die dahinter stehenden Excel-Formeln

6 GPS statt Windkanal

Radler kennen das: Wenn man bei voller Fahrt aufhört zu treten, wird das Rad durch den Luftwiderstand zunächst stark gebremst. Am Ende rollt es aber dann doch sehr lange, weil der Luftwiderstand verschwunden ist und der Rollwiderstand unabhängig von der Geschwindigkeit sehr klein ist. Das zeigt sich auch am Geschwindigkeitsverlauf beim Ausrollen eines Opel-Corsa auf dem Standstreifen einer Autobahn (Abb. 20).

Die Formel für die Luftwiderstandskraft (in N) lautet:

$$F_{Luft} = \rho \cdot c_w \cdot A \cdot v^2 / 2.$$

Dabei ist

- A die Stirnfläche des Fahrzeuges in m².
- c_w der Luftwiderstandsbeiwert, der angibt, wie viel Prozent der Stirnfläche A für den Luftwiderstand wirksam ist. c_w · A bezeichnet man als effektive Stirnfläche.
- v die Geschwindigkeit in m/s.
- ρ die Luftdichte = 1,2 kg/m³.

Für die Rollwiderstandskraft (in N) gilt

$$F_{Roll} = c_r \cdot m \cdot g$$

- mit c_r Rollwiderstandsbeiwert in Prozent. Er gibt an, wie viel Prozent der Gewichtskraft als Rollwiderstand wirken.
- m Masse des Fahrzeuges,
- g = 9,81 m/s² Erdbeschleunigung.

Aus den Daten des Ausrollversuchs kann man (ohne Windkanal) den Luft- und Rollwiderstand des Autos ermitteln: Man vergleicht die gemessene Realität mit einer Excel-Modellrechnung (Abb. 20). Die gesuchten Werte der effektive Stirnfläche c_w · A und des Rollwiderstandsbeiwertes c_r trägt man in den Zellen A3 und B3 (als veränderbare Modellparameter) ein. In

Spalte D wird dann ausgehend von der Startgeschwindigkeit 29,2822 m/s Sekunde für Sekunde die neue Geschwindigkeit errechnet. Dazu ermittelt man aus (1) und (2) in jeder Zeile die geschwindigkeitsabhängige Bremskraft

$$F_{Brems} = F_{Luft} + F_{Roll}$$

die Bremsbeschleunigung

$$a_{Brems} = F_{Brems} / m$$

(Geschwindigkeitsabnahme je Sekunde) und daraus die Geschwindigkeit in der nächsten Sekunde.

Durch Einstellen der Regler erreicht man eine nahezu perfekte Deckung zwischen gemessenem und modelliertem Geschwindigkeitsverlauf. Wie man Abbildung 21 entnimmt, ist der Rollwiderstandsbeiwert bei diesem PKW 0,01, d. h. ca. 1 % des Fahrzeuggewichts (95 kg) muss man zum Schieben aufbringen. Die effektive Stirnfläche beträgt c_w · A = 0,95 m². Bei einer Stirnfläche von 2 m² entspricht das dem c_w-Wert 0,475. Das ist (bei diesem alten Corsa) ein bisschen ungünstiger als der im einer Internetrecherche gefundene Reklamewert von 0,32, belegt aber, dass die Modellrechnungen realistische Ergebnisse liefern.

7 Schlussbemerkung

Ein Unterrichtsprojekt zum Thema Rollwiderstand- und Luftwiderstandsbeiwerte (»Windschnittigkeit«) von Fahrradfahrern (mit Fahrradtachos aus der Zeit, als GPS noch zu teuer war), findet man in [2].

Experimente, die früher nur mit teuren Beschleunigungssensoren [3] oder Analyse von Videoaufnahmen [4] möglich waren, sind in GPS-Zeitalter so einfach geworden, dass es möglicherweise gar nicht mehr lange dauern wird, bis solche Beispiele

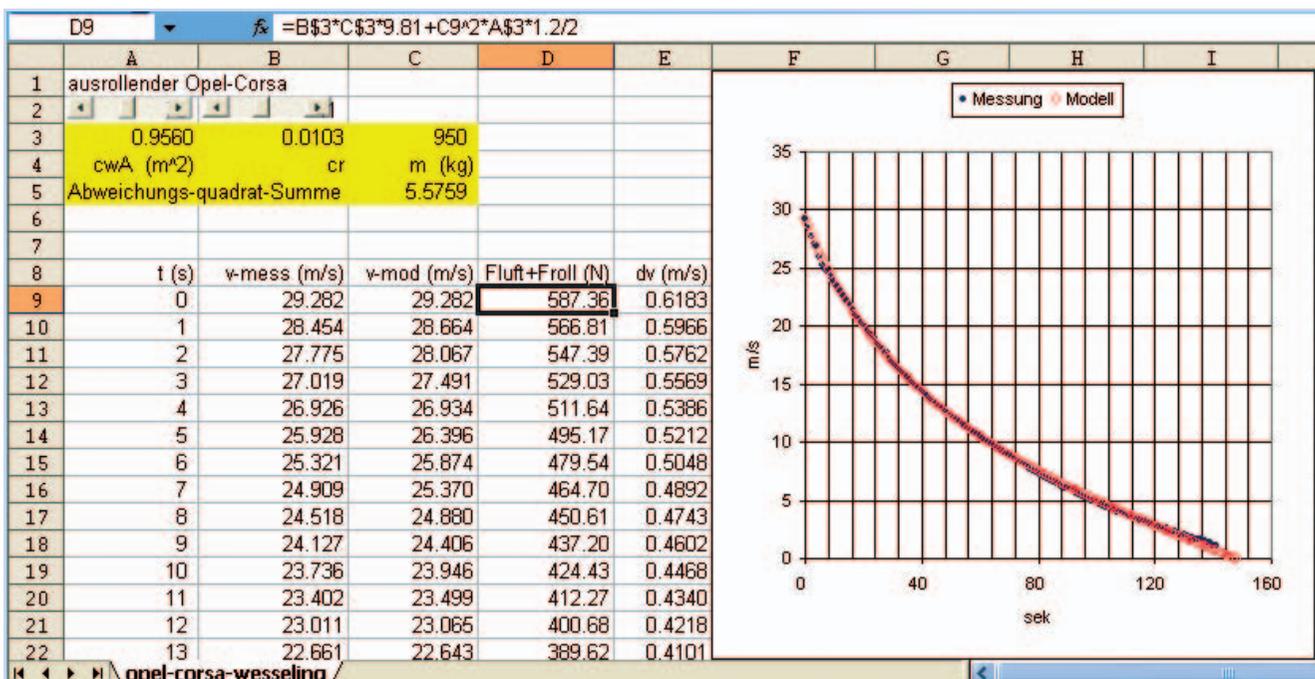


Abb. 20. Geschwindigkeitsverlauf beim Ausrollen eines Opel Corsa: a) Realität und b) Modell

unter dem Stichwort »Modellierungskompetenz« auch in zentrale Prüfungsaufgaben Eingang finden werden.

Die hier dargestellten GPS-Dateien wurden mit dem Medion P4410 (s. Fußnote 1) aufgezeichnet. Auch die Firmen Clarion und Garmin bieten Auto-Navigationsgeräte an, die Spuren aufzeichnen (Clarion Map 7-80, Garmin ab 700er Serie). Bei Trekking-Geräten und GPS-Sportuhren ist die Spuraufzeichnung Standard. Damit Geschwindigkeiten richtig angezeigt werden, müssen die GPS-Geräte die Daten glätten. Das ist für den Einsatz im Mathematikunterricht unerlässlich. Gleichzeitig wird deutlich, dass – vor jeder Modellrechnung – schon das Aufnehmen von Messdaten eine Modellierung von Realität ist.

Kann man die in Kernlehrplänen und Bildungsstandards immer wieder geforderte »Modellierungskompetenz« noch greifbarer machen? Kleine Datenlogger (Qstarz BT-Q2000) und höherwertige Trekking-Geräte (Garmin Oregon 300), zeichnen Daten dreidimensional auf. Man kann sie auch in Modellflugzeugen und bei Achterbahnfahrten »mitfliegen« lassen und damit den Sprung in die dritte Dimension wagen. In [5] und [7] findet man Track-Dateien zu Linienflügen, Bahnfahrten (ICE-Schnellstrecken) und von Trainingsrunden auf Rennstrecken (Nürburgring) sowie ein komplettes »GPS-Stationenlernen« mit Aufgaben und Lösungen.

Literatur

- [1] D. HAUBOCK: GPS in der analytischen Geometrie – Istron Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht Bd. 6, 86–103. – Hildesheim: Franzbecker 2000.
- [2] W. RIEMER: Radeln mit dem Computer im Rucksack. – MNU 48 (1995) Nr. 2, 80–87.
- [3] W. RIEMER: Trägheitsnavigation – Ein Mathematik – Physik-Projekt. – MNU 49 (1996) Nr. 6, 362–365.
- [4] W. RIEMER: Videoanalyse im Mathematikunterricht. – MNU 59 (2006) Nr. 2, 68–72.
- [5] www.riemer-koeln.de bietet einen Lernzirkel zum Thema »Dem Navi auf der Spur« sowie eine ausgearbeitete Unterrichtseinheit im Rahmen einer Einführung in die Differenzialrechnung, ebenso die in diesem Artikel angesprochenen Excel-Dateien.
- [6] H. GRIESEL u. a. (Hg.): Elemente der Mathematik 12/13. – Hannover: Schroedel Verlag 2000.
- [7] LAMBACHER-SCHWEIZER: Kursstufe. – Stuttgart: Klett-Verlag 2009, 388–399.

Dr. WOLFGANG RIEMER, w.riemer@arcor.de, August-Bebel-Str. 80, 50259 Pulheim, unterrichtet Mathematik, Physik und Informatik am Heinrich-Mann-Gymnasium in Köln und ist Fach- und Hauptseminarleiter am Studientseminar für Lehrämter an Schulen in Köln. ■

Das »Flutterbandhenge«

Bau einer astronomischen Kreisanlage mit einfachsten Mitteln

BURKARD STEINRÜCKEN – MICHAEL WINKHAUS

Schüler der Astro-AG des Carl-Fuhlrott-Gymnasiums in Wuppertal bauten aus Anlass der »Nacht der Industriekultur« am 10. Juli 2004 auf der Halde Hoheward im Ruhrgebiet eine astronomisch orientierte Kreisanlage, die sich ideell an prähistorische Kreisgrabenanlagen und Hengebauwerke anlehnt. Das »Flutterbandhenge« umschließt einen etwa 36 Meter großen Kreis und besitzt vier zu den Sonnenwendrichtungen orientierte Zugangswege, so genannte »Prozessionsstraßen«. Einige hundert Besucher verfolgten den Bau und erlebten in den Abendstunden den Untergang der Sonne in der vorausbestimmten und gekennzeichneten Richtung. Das Flutterbandhenge dient dem Studium und der Erprobung horizontastronomischer Beobachtungstechniken. Es eignet sich sehr gut als astronomische Projekteinheit. Planung, Bau und Präsentation können innerhalb einer Projektwoche durchgeführt werden.

1 Didaktischer und astronomiehistorischer Hintergrund

Die vielfältigen Erscheinungen am Himmel und am Horizont bieten zahlreiche Zugänge zur Himmels- und Naturkunde, die im Klassenraum, im Labor oder am Computerbildschirm verschlossen bleiben und sich nur in der Natur unter freiem Himmel öffnen. Im Ruhrgebiet mit seiner großen Bebauungsdichte und der fast ebenen Topographie mangelt es leider an den für diesen sinnesorientierten Zugang zur Astronomie erforderlichen Beobachtungsorten und Landschaftsverhältnissen, so dass hier kaum freie Sicht auf den Himmel und insbesondere den Horizont gegeben ist. Folge davon ist eine weitgehende Unkenntnis über elementare Himmelserscheinungen bei der Stadtbevölkerung und -jugend, die die stimmungsvollen horizontnahen Himmelsereignisse oft nur im Strandurlaub erlebt. Die durch den Ruhrgebietsbergbau entstandenen Abraum-

halden bieten jedoch als künstlich gestaltete Landschaftsmomente die Beobachtungsperspektive auf den Himmelsrand und damit einen Ausweg aus dem zivilisationsbedingten Mangel an freier Sicht. Von diesen Halden bietet sich mithin die Möglichkeit der Beobachtung des Horizontes im ansonsten eher flachen Land.

Zur Belebung der uralten Tradition der Horizontastronomie wurde vom Regionalverband Ruhrgebiet im Jahr 2008 auf der Halde Hoheward im nördlichen Ruhrgebiet ein für die Öffentlichkeit frei zugängliches spektakuläres Horizontobservatorium errichtet, welches zu derartigen Beobachtungen anregen soll (Abb. 1). Die Idee für dieses Projekt stammt vom Initiativkreis Horizontastronomie im Ruhrgebiet e. V. [1]. Das hier beschriebene Flutterbandhenge, das mit wenig Aufwand an jedem geeigneten Ort mit Horizontsicht errichtet werden kann, entstand vor dem Bau des Horizontobservatoriums als provisorisches Vorgängerbauwerk am gleichen Standort [2].