

# Sachthema: GPS – Dem Navi auf der Spur

## Ein Lernzirkel mit 8 Stationen

Das Global Positioning System (GPS) nutzt Satelliten, die synchronisierte Zeitsignale aussenden. GPS-Empfänger (Auto- oder Trekking-Navigationsgeräte) berechnen aus den unterschiedlichen Laufzeiten, die die Signale von den verschiedenen Satelliten bis zur Erdoberfläche benötigen, die Position (Längengrad „Longitude“ und Breitengrad „Latitude“) des Standortes. Viele Navigationsgeräte lassen sich so einstellen, dass gefahrene Strecken als „Tracks“ abgespeichert werden. Tracks enthalten im Sekundenabstand aufgezeichnete Positionen mit Uhrzeit und oft Geschwindigkeit, Anzahl der Satelliten und Messgenauigkeit. Sie lassen sich in Tabellenkalkulationsdateien umwandeln und als Fahrspuren in Landkarten – z. B. den verschiedenen Google-Maps und dreidimensional in Google-Earth – darstellen.

Im Folgenden sollen diese Daten (Excel-Dateien unter dem Online-Link) untersucht werden. Dies geschieht an „Arbeits- und Forschungsstationen“, die unterschiedliche Schwerpunkte und Schwierigkeitsgrade aufweisen und unabhängig voneinander zu bearbeiten sind. Dabei werden zentrale Aspekte von Trigonometrie, Analysis, Vektorrechnung und Stochastik, so wie sie in diesem Buch erarbeitet wurden, lebendig. Die Arbeitsergebnisse einer jeden Station sollen abschließend der ganzen Lerngruppe präsentiert werden. Die einzelnen Stationen haben die folgenden thematischen Schwerpunkte:

GPS-Dateien   
735301-3881

Alle Stationen können ohne eigene Navigationsgeräte durchgeführt werden, da unter dem Online-Link (s.o.) Daten in zahlreichen Dateien zur Verfügung gestellt werden.

Unter dem Online-Link befinden sich neben den Excel-Dateien mit den aufgezeichneten Daten auch noch Ergänzungen zu einzelnen Stationen.

### Station 1:

#### Track-Dateien und ihre Darstellung in Google-Maps (teilweise unter dem Online-Link)

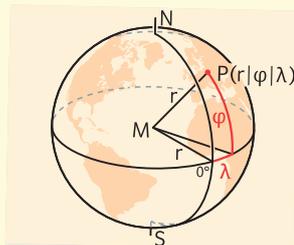
Welche Informationen speichern GPS-Navigationsgeräte, wie wandelt man die Informationen in für Tabellenkalkulationsprogramme lesbare Formate um und wie stellt man sie in Landkarten dar?



### Station 2:

#### Koordinatenumwandlung von der Kugel in die Ebene

Wie wandelt man die vom Navigationsgerät aufgezeichneten Kugelkoordinaten (geografische Länge  $\lambda$ /Breite  $\varphi$ , beide angegeben in Grad) in ebene  $xy$ -Koordinaten (beide in km) um? Wie zeichnet man Landkarten bzw. Fahrspuren mithilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms?



### Station 3:

#### Grafisch integrieren und differenzieren

Zeit  $\rightarrow$  Weg, Zeit  $\rightarrow$  Geschwindigkeits- und Weg  $\rightarrow$  Geschwindigkeits-Diagramme. Die vom Navigationsgerät aufgezeichneten Daten werden visualisiert, die grundlegenden Zusammenhänge der Differenzial- und Integralrechnung werden lebendig.

### Station 4:

#### Numerisch integrieren und differenzieren



Aus den Positionsangaben des Navigationsgeräts wird die zurückgelegte Wegstrecke, die Momentangeschwindigkeit und die momentane Beschleunigung mithilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms berechnet und mit den direkt vom Navigationsgerät aufgezeichneten Daten verglichen. Ergänzend kann man erforschen, wie ein Navigationsgerät arbeitet, wenn der Satellitenkontakt kurzzeitig abreißt (Tunnel) bzw. ganz unterbrochen wird (Halten in einer Station).

# Sachthema: GPS – Dem Navi auf der Spur

## Station 5:

### Fahrtrichtung als Integral der Drehgeschwindigkeit (teilweise unter dem Online-Link)

Mittels des Vektorproduktes „benachbarter“ Geschwindigkeitsvektoren kann man die Drehgeschwindigkeit (Winkelgeschwindigkeit in  $\frac{\text{Grad}}{\text{s}}$ ) und durch



Integration die aktuelle Kursrichtung berechnen. Wer das Vektorprodukt (fakultatives Thema) nicht kennt, erforscht anhand der Kreiseldaten, wie man mit dem GPS Flächen beliebiger geschlossener Kurven misst.

## Station 6:

### Brems- und Querschleunigung beim Kurvenfahren – Das Skalarprodukt in Aktion



Wenn man in der Ebene Geschwindigkeit und Beschleunigung als vektorielle Größen deutet, kann man beim Kurvenfahren die Querschleunigung berechnen und prüfen, ob die Reifen ins Quietschen kamen.

## Station 7:

### Luft- und Rollwiderstand – Das GPS ersetzt den Windkanal (unter dem Online-Link)

Wenn man ein mit hoher Geschwindigkeit fahrendes Auto oder Fahrrad auf ebener Strecke ausrollen lässt, kann man den Luftwiderstand und den Rollwiderstand bestimmen, indem man die Messdaten mit den Daten von Modellrechnungen vergleicht. Auch der Cw-Wert für die Windschnittigkeit lässt sich ermitteln.

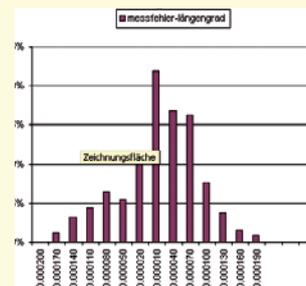


Das Gewicht des Fahrrads muss für die Berechnung bestimmt werden.

## Station 8:

### Wenn Gauß ein GPS gehabt hätte – Normal- und Exponentialverteilung

Man lässt ein Navigationsgerät eine längere Zeit an einem festen Ort liegen. Wegen der Messfehler (wandernde Satelliten, Einflüsse der Atmosphäre, Reflexionen der GPS-Signale an Gebäuden ...) streuen die Angaben zur gemessenen Position (Längen- und Breitengrad). Sind die Abweichungen von der wahren Position normalverteilt?



### Selbst experimentieren!

Unter dem Online-Link finden sich die folgenden Fahrtprotokolle mit Anregungen (in *gps-aufgaben-Zusatzdateien.pdf*) für eigene Forschungen:

- 01-nürburgring-nordschleife
- 02-ice-rb-siegburg-stuttgart-münchen-ohlstadt
- 03-ice-mainz-bonn-rheinstrecke
- 04-fahrrad-sportplatz
- 05-berfahrt-oberau-ettal
- 06-autobahn-keelblatt
- 07-kleinlaster-ausrollversuch
- 08-messfehler
- 09-flug-köln-berlin-köln

Sie wurden mit einem preiswerten Auto-Navigationsgerät aufgezeichnet. Wer selbst experimentieren möchte, findet in der Datei *GPS-Tipps.doc* technische Hinweise – auch zu geeigneten Geräten und Links mit weitergehenden Informationen sowie aktuelle Dateien von Rennstrecken.

# Sachthema: GPS – Dem Navi auf der Spur

## Station 1:

### Track-Dateien und ihre Darstellung in Google-Maps – Aufzeichnen, Umwandeln und Visualisieren von Fahrprotokollen

GPS-Navigationsgeräte speichern Fahrspuren in einer Vielzahl geräteabhängiger Formate. Alle Formate kann man so umwandeln, dass sie von Tabellenkalkulationsprogrammen gelesen werden (siehe dazu Erweiterungen zur Station 1 auf Seite 4). Fig. 1 zeigt den Ausschnitt einer solchen Datei. Es gibt Freeware-Programme und Webseiten, die nicht nur die Umwandlung kostenlos erledigen, sondern die Track-Dateien in beliebiger Vergrößerung auch als Spuren auf Landkarten (Google-Maps) darstellen. Fig. 2 zeigt eine Lkw-Fahrt von Bonn nach Köln mit einem gezoomten Ausschnitt an dem Autobahnkreuz Köln Süd (Fig. 3).

1	A	B	C	D	E	F	G	H
Index	Lat	Lon	Distance (km)	Speed (km/h)	Time	HDOP	Satellites	
170	168	50.712035	7.031783	0.582289	40.540298	20.12.08 21:13	1.3	9
171	169	50.711995	7.031935	0.593892	42.151501	20.12.08 21:13	1.3	9
172	170	50.711955	7.032095	0.606017	43.633099	20.12.08 21:13	1.4	8
173	171	50.711917	7.032265	0.618725	45.096199	20.12.08 21:13	1.3	9
174	172	50.711882	7.032438	0.631527	46.151798	20.12.08 21:13	1.3	9
175	173	50.711848	7.03262	0.644903	47.7075	20.12.08 21:13	0.9	10
176	174	50.711817	7.032805	0.658393	47.7631	20.12.08 21:13	0.9	10
177	175	50.711787	7.03299	0.671854	47.670502	20.12.08 21:13	0.9	10

Fig. 1: Ergebnis der Formatumwandlung



Fig. 2, 3: Von Bonn nach Köln mit Ausschnitt am Kreuz Köln Süd von der A555 auf die A4 (Datei Station-1-lkw-bonn-köln.trk)

- 1 a) Wandeln Sie die Datei *Station-1-lkw-bonn-köln.trk* in eine Tabellenkalkulationsdatei um.
- b) Stellen Sie die gesamte Fahrspur oder auch Teile davon als Landkarte dar.
- c) Vergrößern Sie ein besonders interessant erscheinendes Wegstück.

- 2 a) Beschreiben Sie, was Sie der Fig. 4 (Kölner Hbf. Gleis 12) entnehmen können.
- b) Bei „rasant genommenen Kurven“ scheinen die Fahrspuren neben den sichtbaren Fahrbahnen zu liegen (Fig. 3). Spekulieren Sie über mögliche Hintergründe.
- c) Zeichnen Sie eine Fahrt mit dem Navi auf. Erproben Sie die Formatumwandlung und Darstellung eines Details in einer Landkarte.
- d) Wie verhält sich das Navigationsgerät bei fehlendem Satellitenkontakt, wenn Sie z. B. durch eine Unterführung fahren?



Fig. 4

## GPS-Dateien

Station-1-lkw-bonn-köln.trk  
735301-3881

Gängige Track-Formate sind .gpx, .nmea, .trk ...

Seit 2005 stellt die Firma Google ihre Landkarten privaten Nutzern im Netz zur Verfügung.

www.gpsvisualizer.com eignet sich hervorragend zur Formatumwandlung zum Zeichnen von Karten. Weitere Hinweise finden sich in der Datei *GPS-Tipps.doc*.

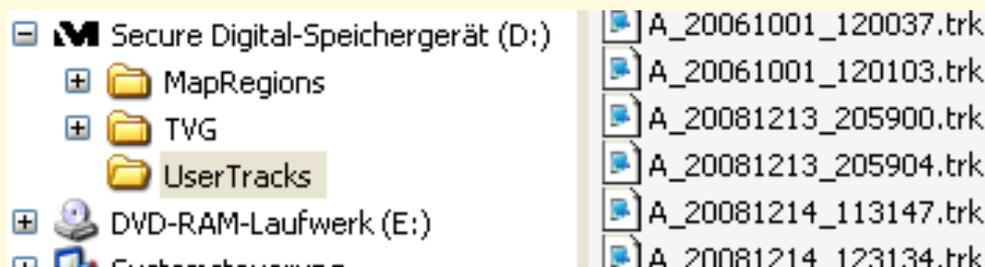
# Sachthema: GPS – Dem Navi auf der Spur

## Erweiterung zu Station 1:

### Track-Dateien und ihre Darstellung in Google-Maps – Aufzeichnen, Umwandeln und Visualisieren von Fahrprotokollen

#### A Dateiformate

Viele GPS-Navigationsgeräte lassen sich so einstellen, dass die gefahrene Strecke als Folge von Wegpunkten in einer Datei abgespeichert wird. Der Dateiname besteht im Wesentlichen aus dem Datum und der Uhrzeit, zu dem die Speicherung erfolgt (Fig. 1). Beliebte Formate sind je nach Modell: .trk (Medion), .gpx (Garmin), .nmea (Qstarz) usw.



Informationen zur Genauigkeit „HDOP“ findet man bei Wikipedia: [http://en.wikipedia.org/wiki/Dilution\\_of\\_precision\\_\(GPS\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Dilution_of_precision_(GPS)).

Fig. 1: So speichern Medion Navis Tracks. Die Dateinamen haben die Form A\_datum\_Uhrzeit.trk. So wurde die letzte Datei am 14.12.2008 um 12:31:34 Uhr abgespeichert. Die Zeit wird den GPS-Signalen entnommen.

Man kann diese Dateien mit einem Textverarbeitungsprogramm ansehen (Fig. 2), unerwünschte Sonderzeichen mit „Suchen und Ersetzen“ entfernen bzw. umwandeln, sodass eine Textdatei entsteht, die sich in einem Tabellenkalkulationsprogramm öffnen lässt.

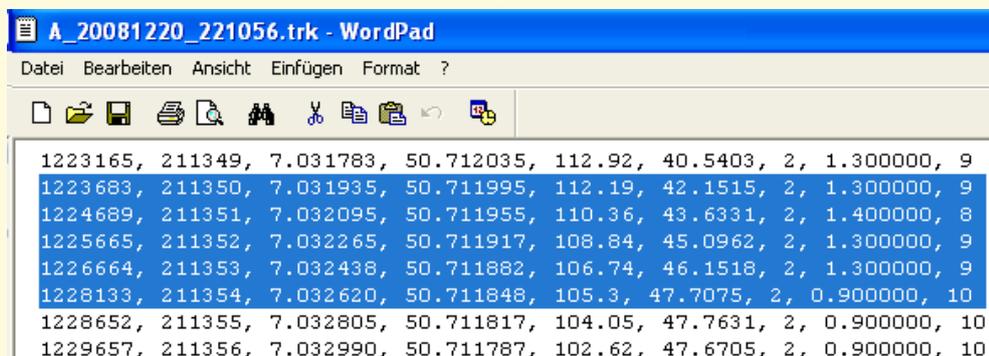


Fig. 2: Medion .trk-Daten, von GoPal-Software aufgezeichnet. Man erkennt in Spalte 2 die Zeit im Sekundenabstand, beginnend mit 21:13:49 Uhr, dann folgen geografische Breite, Länge, Geschwindigkeit in  $\frac{\text{km}}{\text{h}}$  und Höhe über NN. Die letzte Spalte zeigt die Zahl der empfangenen Satelliten, die vorletzte die Genauigkeit HDOP (Horizontal Dilution of Precision) der gemessenen Position. Spalte 1 ist ohne Bedeutung.

```
<trkpt lat="50.933630" lon="6.882943"><ele>63.58</ele><time>2009-03-15T10:22:25Z</time></trkpt>  
<trkpt lat="50.933630" lon="6.882943"><ele>64.55</ele><time>2009-03-15T10:22:26Z</time></trkpt>  
<trkpt lat="50.933630" lon="6.882943"><ele>64.55</ele><time>2009-03-15T10:22:27Z</time></trkpt>
```

Fig. 3: Garmin .gpx-Daten, sie enthalten nur Positions-Höhen- und Zeitangaben.

# Sachthema: GPS – Dem Navi auf der Spur

## B Formatumwandlung

Mit dem Freeware-Programm gpsbabel (<http://www.gpsbabel.org>) kann man alle gebräuchlichen Formate in Tabellenkalkulations-lesbare Formate umwandeln. Am einfachsten geht das über die Internet-Schnittstelle <http://www.gpsvisualizer.com/gpsbabel>. Man klickt das Format an, welches das Navi liefert, und wählt das gewünschte Zielformat. Dann wird die Datei hochgeladen und die umgewandelte Datei steht zum Herunterladen bereit (Fig. 1).

Wenn man als Zielformat „Tab delimited fields...“ wählt, lässt sich die Datei (samt Spaltenüberschriften) in jedes Tabellenkalkulationsprogramm importieren. Wie Fig. 2 zeigt, wird aus den Ursprungsdaten auch die zurückgelegte Wegstrecke berechnet.



Fig. 1: Ergebnis der Formatumwandlung mit GPSbabel

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Index	Lat	Lon	Distance (km)	Speed (km/h)	Time	HDOP	Satellites
107	105	50.712113	7.027962	0.27661	45.151798	21:12:46	1.4	7
108	106	50.712093	7.028138	0.289215	43.6702	21:12:47	1.4	8
109	107	50.712077	7.028308	0.301329	42.3923	21:12:48	1.4	8
110	108	50.71206	7.028473	0.313113	40.614399	21:12:49	1.4	8
111	109	50.712043	7.028628	0.324202	37.540001	21:12:50	1.4	8
112	110	50.712028	7.028772	0.334489	34.910198	21:12:51	1.4	8
113	111	50.712013	7.028905	0.344011	33.243401	21:12:52	1.4	8
114	112	50.711998	7.029035	0.353326	32.373001	21:12:53	1.4	8

Fig. 2: Ergebnis der Formatumwandlung mit GPSbabel

## C Fahrspuren in Landkarten darstellen (Google-Maps)

Neben der Formatumwandlung bietet das obige Internetportal auch die Darstellung der Daten in Google-Maps an. Man kann im Feld File#1 die komplette Track-Datei hochladen, wobei alle Formate, selbst Excel-Dateien, akzeptiert werden. Schneller geht es, wenn man nur die Spalten „Lat“ und „Lon“ mit den GPS-Positionen (samt Spaltenüberschrift) über die Windows-Zwischenablage in die Maske „Or paste your data here“ einfügt. Wenn die Tracks mit Pin-Nadeln Punkt für Punkt gezeichnet werden sollen, wählt man in „Force plain text to be his type“ die Option „Waypoints“.

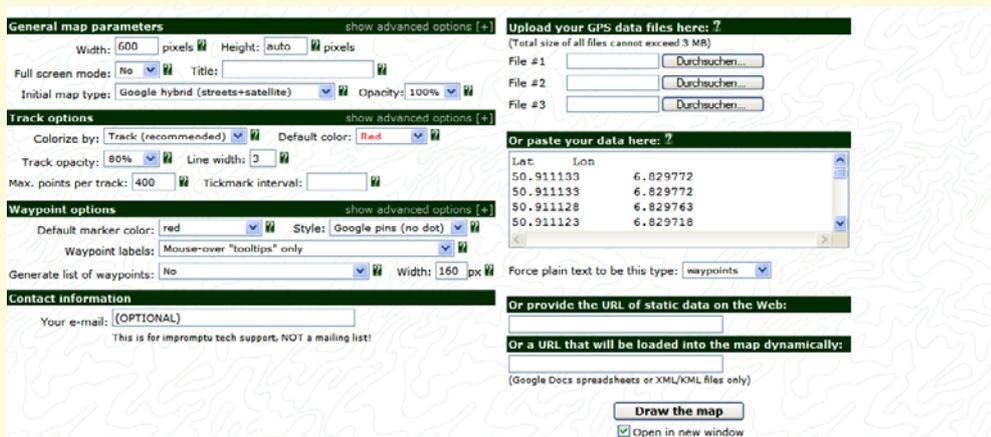


Fig. 3

Die entstehenden Karten (siehe Seite 3, Fig. 2, 3) lassen sich dann beliebig zoomen.

# Sachthema: GPS – Dem Navi auf der Spur

## D Berechnungen durchführen bzw. Grafiken erstellen lassen

Unter [http://www.gpsvisualizer.com/profile\\_input](http://www.gpsvisualizer.com/profile_input) kann man – auch ohne Excel selbst zu bemühen – aus den über GPS gemessenen Daten (Länge, Breite, Höhe, Zeit ...) Diagramme erstellen lassen, bei denen man die x- und y-Achse mit Daten belegen kann wie Zeit, Strecke, Geschwindigkeit, Kurs, Längengrad, Steiggeschwindigkeit ... (nur Beschleunigungen fehlen).

Beispiele zu einem Linienflug von Köln nach Sardinien:

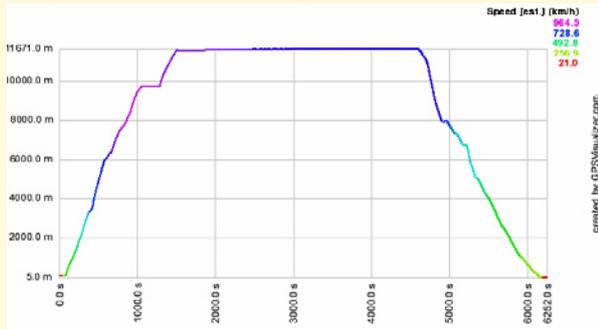


Fig. 1: Flughöhe in Abhängigkeit von der Zeit, gefärbt nach Geschwindigkeit.

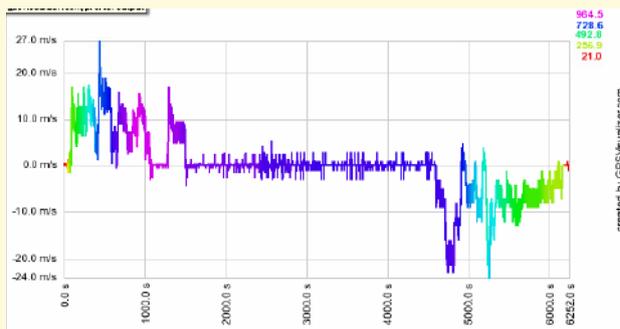


Fig. 2: Steiggeschwindigkeit, gefärbt nach Geschwindigkeit.

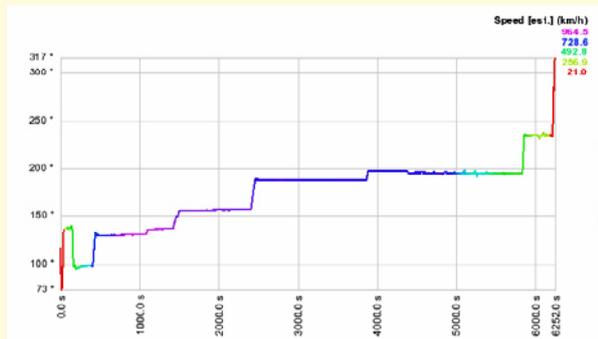


Fig. 3: Flugrichtung („Kurs“) in Abhängigkeit von der Zeit, gefärbt nach Geschwindigkeit.

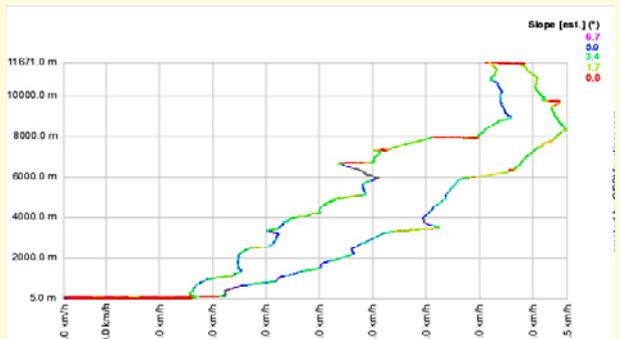


Fig. 4: Flughöhe in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit, gefärbt nach dem Steigungswinkel („slope“).

## E Hardware und Software

(Stand Juni 2009, wird unter [www.riemer-koeln.de](http://www.riemer-koeln.de) aktualisiert.)

Folgende Navigationsgeräte zeichnen Spuren im Sekundenabstand auf:

- Auto**
  - Medion (P4410, P4425, MD96130 mit GoPal-Software ab Version 3.0AE.  
Die häufig bereits vorinstallierten Versionen ME verfügen laut Hersteller nicht über diese Funktionen und müssten erweitert werden. Updates unter <http://www.mediongopal.de/?BEREICH=software&TPL=navigator3.html&UNAV=4>)
  - Clarion (Map 670)
  - Garmin Nüvi (ab 700er Serie)
- Trekking**
  - Garmin Oregon (mit GPS- und barometrischer Höhenaufzeichnung)
  - Garmin Colorado
  - Garmin eTrex
- Sport**
  - QStarz 2000 (mit GPS-Höhenaufzeichnung)
- Handys (Smartphones)**
  - Samsung i600

Smartphones (und Notebooks mit externer GPS-Maus) zeichnen Spuren im Sekundenabstand auf, wenn man eine entsprechende Software installiert. Für Windows Mobile sind z.B. die Programme KDR Tracker und Smartrunner sehr zu empfehlen. (Nach diesen Begriffen googeln.)

Viel Freude und Erfolg beim Experimentieren wünscht Wolfgang Riemer aus Köln

# Sachthema: GPS – Dem Navi auf der Spur

## Station 2:

### Koordinatenumwandlung: Von der Kugel in die Ebene – Grad in km

Jeder Punkt P auf der Erdoberfläche lässt sich durch seine geografische Länge (Longitude)  $\lambda$  und seine geografische Breite (Latitude)  $\varphi$  beschreiben. So muss man vom Äquator  $\varphi = 50,7^\circ$  nach Norden und vom Nullmeridian, auf dem der Londoner Vorort Greenwich liegt,  $7,0^\circ$  nach Osten gehen, um in die Nähe von Bonn zu gelangen.

Diese „Kugelkoordinaten“ ( $\varphi; \lambda$ ) speichern Navis im Sekundenabstand, woraus sich die Fahrspuren („Tracks“) ergeben.

Lokal sieht die Erde aus wie eine Ebene, deren Punkte sich durch x-Koordinaten (Richtung Osten) und y-Koordinaten (Richtung Norden) beschreiben lassen. Wenn man sich von P aus um  $1^\circ$  nach Norden bewegt, entspricht das stets der Strecke  $\Delta y = \frac{2\pi r}{360} = 111177\text{m}$ .

Wenn man sich um  $1^\circ$  nach Osten bewegt, entspricht das (abhängig vom Breitengrad  $\varphi$ ) der Strecke  $\Delta x = \frac{2\pi r_0}{360} = \cos(\varphi) \cdot 111177\text{m}$  ( $\approx 71,369\text{km}$  bei Bonn).

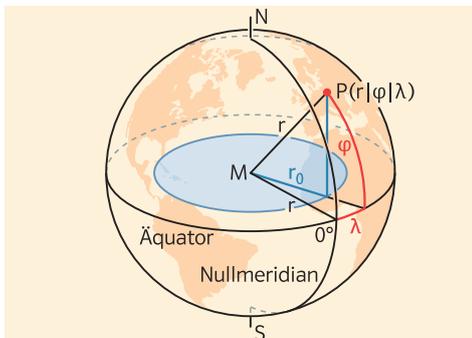


Fig. 1: Modellvorstellung: Erde als Kugel mit Radius  $r = 6370000\text{m}$ ,  $r_0 = r \cdot \cos(\varphi)$

GPS-Dateien

Station-2-lkw-bonn-köln.xls  
735301-3881

$\frac{1}{60}$  von  $1^\circ$  nach Norden entspricht einer Bogenminute und wird als Seemeile (1,85295 km) bezeichnet.

Am Äquator entspricht  $1^\circ$  nach Osten 111177m, am Nordpol 0m.

### Landkarten mit Excel zeichnen

Fig. 2 zeigt, wie die Umrechnung und das Karten-Zeichnen mit Excel gelingt. Man lädt die Datei (hier das Blatt *kreuz-köln-süd* aus der Datei *Station-2-lkw-bonn-köln.xls*) mit den gemessenen Kugelkoordinaten in den Spalten B und C. In die Zellen I3 und J3 werden die Länge und die Breite des ersten Messpunktes kopiert. Dort soll der Ursprung der Landkarte liegen. In Zelle I2 trägt man den Erdradius ein. In Zelle J2 berechnet man den Radius des aktuellen Breitenkreises  $=\cos(\text{bogenmass}(J3))*I2$ .

Die x- und y-Koordinaten ergeben sich dann durch Kopieren der Formeln  $=\text{bogenmass}(C6-I\$3)*J\$2$  (Zelle I6) und  $=\text{bogenmass}(B6-J\$3)*I\$2$  (Zelle J6) „nach unten“. Wie man sieht, werden die x-Koordinaten langsam kleiner (negativ), die y-Koordinaten rasch größer. Man fährt also mit hoher Geschwindigkeit nach Norden und ein wenig nach Westen. Das zeigt auch die Karte, die man nun als Punktdiagramm aus den Spalten I und J gewinnt.

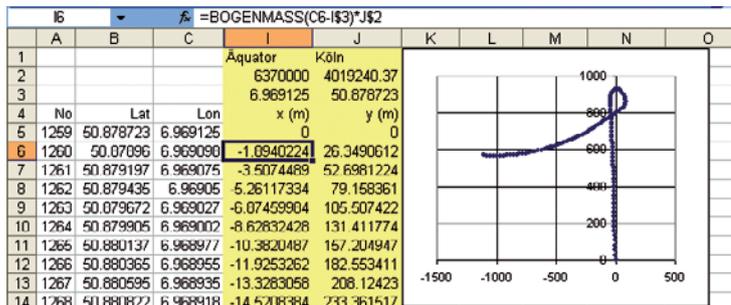


Fig. 2

Ambitionierte Excel-Freunde können Schieberegler zum „Zoomen“ (vergrößern/verkleinern) und „Shiften“ (verschieben) der Karten einbauen, genau wie bei den Karten im Internet. Im Netz gibt es viele Anleitungen, die beschreiben, wie man Schieberegler in Excel einbaut.

Alternative: Arbeiten Sie mit einer selbst aufgezeichneten Datei.

### 1 Zeichnen Sie entsprechende Excel-Landkarten für die Datei *Station-2-lkw-bonn-köln.xls*

- zum Start (2 Minuten ab Messwert No=0),
- zur Auffahrt Bonn Nord (2 Minuten ab Messwert 298).

### 2 Laden Sie die in Aufgabe 1 visualisierte .xls- oder .trk-Datei hoch auf

[www.gpsvisualizer.com/map\\_input](http://www.gpsvisualizer.com/map_input). Vergleichen Sie Excel-Landkarte und Google-Map.

# Sachthema: GPS – Dem Navi auf der Spur

## Station 3:

### Grafisch integrieren und differenzieren – Fahrprotokolle

GPS-Dateien   
 Station-3-s-bahn-  
 weiden-köln.xls  
 735301-3881

Die Datei *Station-3-s-bahn-weiden-köln.xls* enthält Daten einer S-Bahnfahrt von Köln Weiden nach Köln Hbf.

1	A	B	C	D	E	F	G	H
Index	Lat	Lon	Distance (km)	Speed (km/h)	Time	HDOP	Satellites	
60	58	50.940942	6.815568	0.021346	6.61164	7:37:35	0.9	9
61	59	50.940945	6.815603	0.023824	10.5008	7:37:36	0.9	9
62	60	50.940953	6.815658	0.027783	15.5012	7:37:37	0.9	9
63	61	50.940967	6.815728	0.032935	19.0756	7:37:38	0.9	9
64	62	50.940978	6.815812	0.038953	22.4648	7:37:39	0.9	9
65	63	50.940992	6.815907	0.045797	25.8354	7:37:40	0.9	9
66	64	50.94101	6.816013	0.053497	30.1506	7:37:41	0.9	9
67	65	50.941032	6.816157	0.063891	36.225101	7:37:42	0.9	9
68	66	50.94105	6.816312	0.074946	40.151402	7:37:43	0.9	9
69	67	50.94107	6.816482	0.087077	43.799801	7:37:44	1	8
70	68	50.941092	6.816663	0.100007	48.318699	7:37:45	1.2	7
71	69	50.941118	6.816877	0.115294	53.337601	7:37:46	1.1	8
72	70	50.941142	6.8171	0.131163	56.3008	7:37:47	0.9	9
73	71	50.941168	6.81734	0.148245	60.2826	7:37:48	0.9	9
74	72	50.941198	6.817598	0.166648	65.227402	7:37:49	0.9	9
75	73	50.941227	6.817867	0.185791	68.820297	7:37:50	1	8
76	74	50.941257	6.81815	0.20592	72.431702	7:37:51	1	8
77	75	50.941288	6.818447	0.227037	75.765297	7:37:52	1	8

Bahnhof/ Haltestelle	Zeit
Köln Weiden West	ab 07:36
Lövenich	ab 07:38
Köln Müngersdorf Technologie- park	ab 07:41
Köln Ehren- feld	ab 07:44
Köln Hansaring	ab 07:48
Köln Hbf.	ab 07:50

Fig. 1: Protokoll einer S-Bahnfahrt von Köln Weiden nach Köln Hbf. ... und der Fahrplan zum Vergleich

1 Fassen Sie möglichst viele Informationen in Worte, die Sie dem Ausschnitt des Protokolls aus Fig. 1 entnehmen können. Versuchen Sie, nur anhand dieser Tabelle eine Antwort auf die Frage: „Wie schnell beschleunigt die S-Bahn von 0 auf 100?“ zu finden.

- 2 a) Fig. 3 zeigt den Weg  $s$  (in km) und die aufgezeichnete Geschwindigkeit  $v$  (in  $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ ) in Abhängigkeit von der Fahrzeit  $t$  (in s) und die Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der zurückgelegten Strecke. Erläutern Sie, wie die  $t \rightarrow s$ -,  $t \rightarrow v$ -Diagramme und wie die  $t \rightarrow v$ - und  $s \rightarrow v$ -Diagramme miteinander zusammenhängen.
- b) Wie viel Prozent der Fahrzeit hätte man schätzungsweise sparen können, wenn der Zug ohne Zwischenhalte durchgefahren wäre?
- c) Wieso passt die letzte Abbildung von Fig. 3 nicht zu dieser Fahrt? Wie müssten die richtigen Angaben lauten?
- d) War die S-Bahn pünktlich? Vergleichen Sie die Fahrtprotokolle mit dem Fahrplan aus Fig. 1.

TRIPINFO
Höchstgeschwindigkeit: 120 km/h
Durchschnittsgeschw.: 50 km/h
Gefahrene Strecke: 9,8 km
Fahrzeit: 0:11 h

Fig. 2

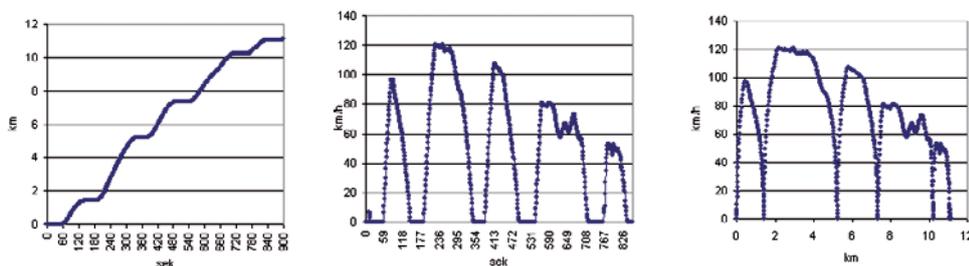


Fig. 3: S-Bahn mit den Stationen Weiden – Lövenich – Industriepark – Ehrenfeld – Hansaring – Hbf.

## Sachthema: GPS – Dem Navi auf der Spur

### 3 Eine „klassische“ Aufgabe wird an der Realität überprüft

Die folgende Aufgabe stammt aus einer Zeit, in der es noch kein GPS gab. Lösen Sie diese Aufgabe und beurteilen Sie unter Rückgriff auf Fig. 3, Seite 8, ob die Angaben zu den Funktionstermen realistisch sind.

Triebwagenzüge von U-Bahnen und S-Bahnen fahren besonders wirtschaftlich, wenn sie in einer Anfahrphase konstant beschleunigt werden, dann ausrollen und schließlich abgebremst werden. In diesem Fall kann die Geschwindigkeit  $v$  in Abhängigkeit von der Zeit  $t$  durch eine stückweise lineare Funktion beschrieben werden, z.B. mit

$$v(t) = \begin{cases} 3,6t & \text{für } 0 \leq t < 20 \quad (\text{Anfahrphase}) \\ -0,2(t - 20) + 72 & \text{für } 20 \leq t < 30 \quad (\text{Ausrollphase}) \\ -4(t - 30) + 70 & \text{für } 30 \leq t \quad (\text{Bremsphase}) \end{cases} \quad \text{mit } t \text{ in Sekunden und } v \text{ in } \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

- Zeichnen Sie den Graphen der Funktion  $t \mapsto v(t)$ . Lesen Sie ab, nach wie vielen Sekunden der Zug wieder hält. Berechnen Sie den genauen Wert dieser Nullstelle.
- Aufgrund einer Verspätung beschleunigt der Triebwagenführer 24,5s lang und bremst dann sofort ab. Zeichnen Sie den Graphen der zugehörigen Zeit-Geschwindigkeits-Funktion. Lesen Sie ab, wie viele Sekunden der Zeitgewinn etwa beträgt. Versuchen Sie, den zugehörigen Energieaufwand abzuschätzen.

### 4 Sprint- und Brems-Parabeln

Es sieht so aus (Hypothese), als würde die Geschwindigkeit beim Anfahren linear mit der Zeit ansteigen und beim Bremsen linear abfallen. In beiden Fällen müsste der Weg dann quadratisch (parabelförmig, vgl. Fig. 1 und 2) von der Zeit abhängen.

- Begründen Sie diesen theoretischen Zusammenhang mithilfe von Integralen.
- Untersuchen Sie die Hypothese mit detaillierten Ausschnitten aus dem Fahrprotokoll, z.B. an der Haltestelle Industriepark.

Der Bremsvorgang bei Köln-Lövenich ist in der Excel-Datei zwischen den Datensätzen in Zeile 88–145 protokolliert, der folgende Beschleunigungsvorgang im Bereich von Zeile 186–211.

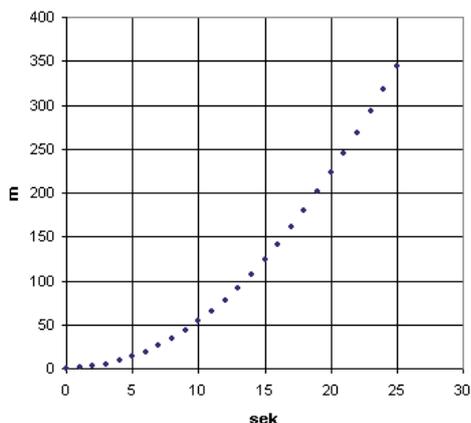


Fig. 1: Beschleunigen bei Ausfahrt aus Köln-Lövenich

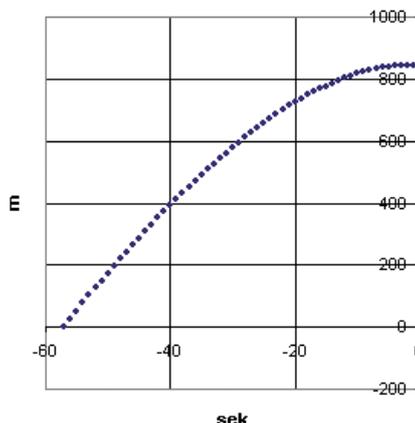


Fig. 2: Bremsen bei Einfahrt in Köln-Lövenich

# Sachthema: GPS – Dem Navi auf der Spur

## Station 4:

### Numerisch integrieren und differenzieren – Weg, Geschwindigkeit und Beschleunigung aus Positionsdaten selbst berechnen

GPS-Dateien

Station-4-straßenbahn-  
linie-13.xls  
735301-3881

Die Datei *Station-4-straßenbahn-linie-13.xls* enthält im Arbeitsblatt *neusser-amsterdamer* das Protokoll einer Straßenbahnfahrt zwischen den Haltestellen Neusser Straße und Amsterdamer Straße in Köln (Fig. 1). Dabei sind die Koordinaten der Messpunkte mit Ursprung in der ersten Haltestelle in den Spalten I und J verfügbar.

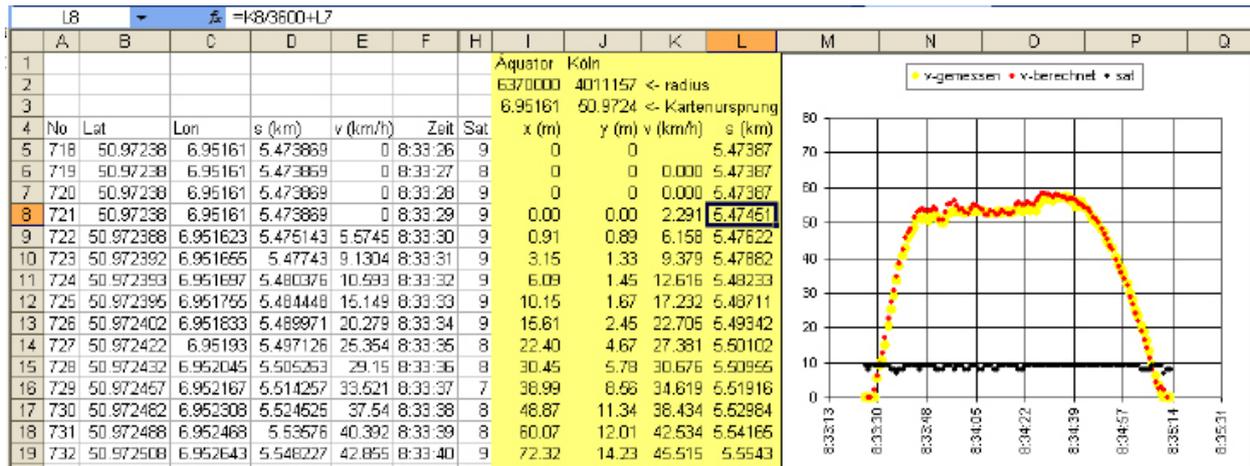


Fig. 1

## 1 Integrieren, Differenzieren

- Numerisch integrieren:** Um 08:33:30 Uhr ist der Fahrgast schon 5,475 km gefahren (Fig. 1, Zeile 8 Spalte L). Berechnen Sie aus den Positionsangaben von Zeile 8 und 9, Spalten I, J, die Strecke, die in der nächsten Sekunde hinzukommt (Satz des Pythagoras), und die neue Fahrstrecke (Zelle L10). Ergänzen Sie Fahrstreckenangaben in Spalte L. Stellen Sie den zurückgelegten Weg in Abhängigkeit von der Zeit als Punktdiagramm dar und vergleichen Sie mit der direkt vom Navigationsgerät abgespeicherten Wegstrecke (Spalte D) und den Angaben aus Fig. 1.
- Numerisch differenzieren:** Berechnen Sie in Spalte K die Geschwindigkeiten als Differenzenquotient „zurückgelegter Weg/verstrichene Zeit“. Stellen Sie den Geschwindigkeitsverlauf als Punktdiagramm wie in Fig. 1 dar und vergleichen Sie Ihre berechneten mit den vom Navigationsgerät abgespeicherten Geschwindigkeiten. Alternativ kann man die Geschwindigkeiten auch aus den Positionen eine Sekunde vorher und eine Sekunde nachher berechnen.
- Zweite Ableitung:** Berechnen Sie die momentanen Beschleunigungen als Differenzenquotient „Geschwindigkeitszunahme/verstrichene Zeit“ und stellen Sie auch die Beschleunigungen als Punktdiagramm dar.
- Erläutern Sie den Zusammenhang zwischen den Graphen aus den Teilaufgaben a) bis c) aus der Perspektive der Analysis.

Sie können die angegebenen xy-Landkartenkoordinaten (m) nutzen. Wie man sie aus gemessenen Kugelkoordinaten berechnen kann, ist Gegenstand von Station 2.

# Sachthema: GPS – Dem Navi auf der Spur

## 2 Fahrtrichtung

Berechnen Sie aus den xy-Koordinaten die Fahrtrichtung der Straßenbahn an der Neusser und an der Amsterdamer Straße, ( $0^\circ$  = Osten,  $90^\circ$  = Norden).  
Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit der Landkarte in Fig. 2.

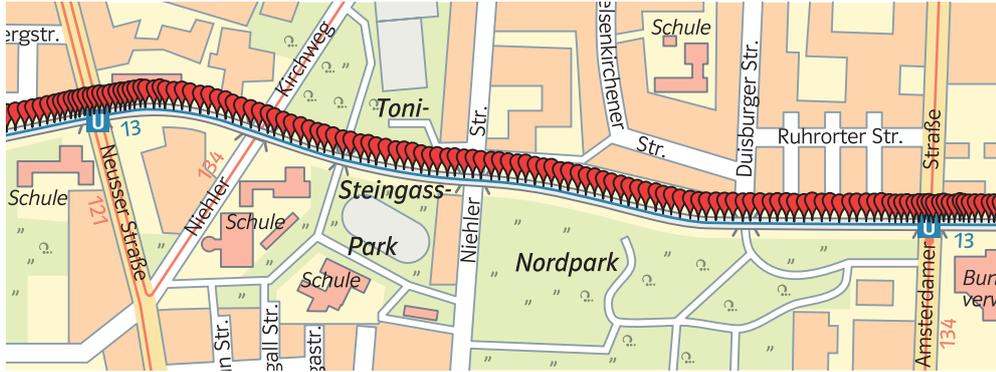


Fig. 1

## 3 Ein komplettes Fahrprotokoll

Öffnen Sie in *Station-4-straßenbahn-linie-13.xls* das Kalkulationsblatt *navidaten*, das zu der kompletten Straßenbahnfahrt gehört.

Erstellen Sie

- ein komplettes Zeit → Weg-Diagramm,
- ein komplettes Zeit → Geschwindigkeits-Diagramm und stellen Sie
- die Verbindung zwischen den beiden Diagrammen her.
- Wie viele Haltestellen hat die Straßenbahn angefahren? Wie lange hat sie insgesamt gehalten, wie groß war die Durchschnittsgeschwindigkeit?
- Um wie viel Prozent hätte sich die Fahrzeit verkürzt, wenn die Bahn hätte durchfahren können ohne anzuhalten?
- Untersuchen Sie, ob die Straßenbahn fahrplanmäßig fuhr.



Fig. 2

Aachener Str./ Gürtel	5:01
Oskar-Jäger-Str./ Gürtel	5:02
Weinsbergstr./ Gürtel	5:03
Venloer Str./ Gürtel	5:05
Subbelrather Str./Gürtel	5:07
Nußbaumerstr.	5:08
Escher Str.	5:10
Geldernstr./ Parkgürtel	5:12
Neusser Str./ Gürtel	5:14
Amsterdamer Str./Gürtel	5:16

... fährt alle 10 Minuten

# Sachthema: GPS – Dem Navi auf der Spur

## 4 ... und wenn das Navi keinen Peil hat – Messfehler

Erläutern Sie, wie das Navigationsgerät reagiert,

- a) wenn der Satellitenkontakt kurz unterbrochen wird (Unterfahren einer Gleisanlage am Bahnhof Ehrenfeld, Messpunkte 25–45),
- b) wenn der Kontakt zu den Satelliten ganz abreißt (die Bahn in eine längere überdachte Haltestelle einfährt, Messpunkte 587–704).
- c) Zeichnen Sie Google-Maps zu den „Tunneldaten“ aus Zeile 25–45 und 587–704.

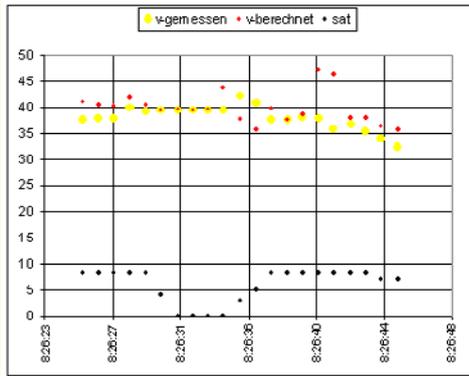


Fig. 1



Fig. 2: Gleisunterführung Bahnhof Ehrenfeld

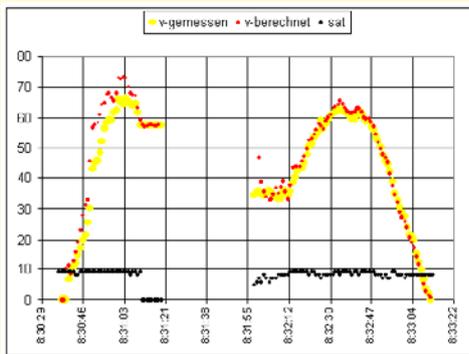


Fig. 3



Fig. 4: Überdachte Haltestelle Geldernstraße

# Sachthema: GPS – Dem Navi auf der Spur

## Station 5:

### Fahrtrichtung als Integral der Drehgeschwindigkeit beim Kurvenfahren – Das Vektorprodukt in Aktion

Die Datei *Station-5-kreisel-frechen.xls* stammt von einer Kreiselfahrt (Fig. 1). Sie enthält die xy-Track-Koordinaten mit Ursprung im Startpunkt (Fig. 2). Da man aus der Fahrtrichtungsangabe  $\alpha$  (in  $^\circ$ ) nicht nur die Himmelsrichtung ( $0 = 0^\circ$ ,  $N = 90^\circ$ ) ablesen möchte, sondern auch entnehmen möchte, wie oft man den Kreiselfahrt durchfahren hat, muss man die (orientierten) kleinen Richtungsänderungen von einem Messpunkt zum nächsten aufaddieren. Daraus resultieren Winkelangaben über  $360^\circ$ . Wenn man die Winkeländerung je Sekunde als Drehgeschwindigkeit – man spricht auch von der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  (in  $\frac{^\circ}{s}$ ) – deutet, erhält man die momentane Fahrtrichtung  $\alpha(t)$  aus der Startrichtung  $\alpha(0)$  durch Integration:  $\alpha(t) = \alpha(0) + \int_0^t \omega(\tau) d\tau$ .

Diese Integration wird nun mit Excel durchgeführt, der zeitliche Richtungsverlauf visualisiert.

N7											=ARCSIN((K6*L8-K8*L6)/(M6*M8))/PI()*180/2															
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O												
1															Aquator Köln											
2															6370000 4016444.27 <- radius											
3															6.029772 50.911100 <- Kartensprung starttrichtung -> 221.000											
4	No	Lat	Lon	s (km)	(km/h)	Zeit	HDOP	Sat	x (m)	y (m)	vx (m/s)	vy (m/s)	v (m/s)	d-alpha (°)	alpha (°)											
5	0	50.91113	6.829772	0	0	19:40:04	1	10	0	0	0	0	0	0	221.383											
6	1	50.91113	6.829772	0	0	19:40:05	1	10	0	0	-0.315	-0.278	0.420		208.510											
7	2	50.91113	6.829763	0.0008	7.686	19:40:06	1	10	-0.63090159	-0.55588737	-1.893	-0.556	1.973	-12.874	208.510											
8	3	50.91112	6.829718	0.004	10.63	19:40:07	0.9	11	-3.78540955	-1.11177473	-2.979	-0.834	3.094	-8.184	200.326											
9	4	50.91111	6.829678	0.0071	11.28	19:40:08	0.9	11	-6.58941662	-2.22354947	-3.715	0.000	3.715	-17.107	183.219											
10	5	50.91112	6.829612	0.0118	19	19:40:09	0.9	11	-11.2160283	-1.11177473	-5.293	1.779	5.584	-10.333	172.886											
11	6	50.91115	6.829527	0.0183	25.34	19:40:10	0.9	11	-17.1745433	1.33412968	-6.484	2.446	6.930	3.177	176.063											
12	7	50.91117	6.829427	0.0257	26.41	19:40:11	0.9	11	-24.184561	3.78003409	-7.185	1.556	7.352	11.203	187.266											

Fig. 2

## 1 Fahrtrichtung im zeitlichen Verlauf

- Startrichtung:** Bestimmen Sie die Startrichtung  $\alpha(0)$  zu Anfang der Fahrt aus den ersten Track-Punkten. Nach Fig. 2 muss der Wert über  $180^\circ$  liegen. Vergleichen Sie mit Zelle O3.
- Richtungsvektor:** Bestimmen Sie zu jedem Zeitpunkt  $t$  den Fahrtrichtungsvektor

$$\vec{v}_t = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (\vec{P}_{t-1} - \vec{P}_{t+1})$$

aus den Positionen eine Sekunde vorher bzw. eine Sekunde später.

Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit den Inhalten der Spalten K und L.

- Geschwindigkeitsvektor:** Begründen Sie: Der Betrag von  $\vec{v}_t$  gibt die Geschwindigkeit (in  $\frac{m}{s}$ ) an. (Deswegen wird  $\vec{v}_t$  auch Geschwindigkeitsvektor genannt.)
- Winkelgeschwindigkeit:** Bestimmen Sie zu jedem Zeitpunkt  $t$  die Winkelgeschwindigkeit (Geschwindigkeit der Richtungsänderung (in  $\frac{^\circ}{s}$ )), indem Sie den Winkel zwischen den Fahrtrichtungsvektoren eine Sekunde vorher und eine Sekunde nachher bestimmen und durch die verstrichene Zeit (2s) teilen. Tipp: Den Winkel  $d\alpha$  zwischen den Vektoren  $\vec{v}_1$  und  $\vec{v}_3$  nach der Formel  $\sin(\alpha) = \frac{|\vec{v}_1 \times \vec{v}_3|}{|\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_3|}$  berechnen. Vgl. die markierte Zelle N7 in Fig. 2.

- Kursberechnung:** Berechnen Sie zu jedem Zeitpunkt die Fahrtrichtung (in  $^\circ$ ), indem Sie die Richtungsänderung (Spalte N) zu der vorherigen Richtung (Spalte O) addieren. Visualisieren Sie die Winkelgeschwindigkeit und den Kurs. Kommentieren Sie den Zusammenhang aus dem Blickwinkel der Differenzial- und Integralrechnung.

## 2 Eigene Untersuchungen

Führen Sie Fahrtrichtungsuntersuchungen (nach dem Vorbild der Aufgabe 1) an einer selbst aufgezeichneten Datei durch. Bereiten Sie eine Präsentation der Forschungsergebnisse vor. Statt selbst zu messen, können Sie auch eine der folgenden Dateien auswerten: *04-fahrrad-sportplatz.xls*, *05-bergfahrt-oberau-ettal.xls*, *06-autobahn-kleblatt.xls*.

## GPS-Dateien

Station-5-kreisel-frechen.xls  
735301-3881



Fig. 1

Eine Linksdrehung zählt positiv, eine Rechtsdrehung negativ.

Auch wenn Sie das Vektorprodukt nicht kennen, können Sie die Datei nutzen. Man kann nämlich aus den GPS-Daten der geschlossenen Spur den Inhalt der umfahrenen Fläche bestimmen, mit dem Kreisumfang vergleichen und sogar die Kreisflächenformel prüfen. Dazu enthält die Excel-Datei ebenso eine Anleitung wie zur Berechnung des Krümmungsradius bei beliebigen Kurvenfahrten.

# Sachthema: GPS – Dem Navi auf der Spur

## 3 Krümmungsradius

Wenn man eine Kurve als Fahrt auf einem kleinen Kreisbogen deutet, kann man ihr einen „Krümmungsradius“  $r$  zuordnen. Je kleiner der Radius, desto enger ist die Kurve. Bei einer „Geradeausfahrt“ wird der Krümmungsradius „unendlich“ groß. Berechnung des Krümmungsradius  $r$  siehe Fig. 1.

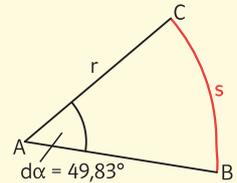


Fig. 1: Krümmungsradius

Wenn man den Winkel  $d\alpha$  im Bogenmaß misst, dann gilt für die Länge des Kreisbogens  $s = r \cdot d\alpha$  bzw.  $r = \frac{s}{d\alpha}$ . Um  $r$  zu berechnen teilt man also die Länge des Wegstückchens  $s$  zwischen zwei benachbarten Punkten durch den Drehwinkel  $d\alpha$  (Fig. 2, Seite 13, Spalte N).

Wenn  $r$  negativ ist, fährt man eine Rechtskurve, sonst eine Linkskurve.

- Berechnen Sie zu jedem Zeitpunkt  $t$  den Krümmungsradius und visualisieren Sie den zeitlichen Verlauf  $r(t)$  grafisch in einem Punktdiagramm.
- Schätzen Sie mithilfe von Teilaufgabe a) den Durchmesser des Kreisels aus Fig. 1, Seite 13, ab.

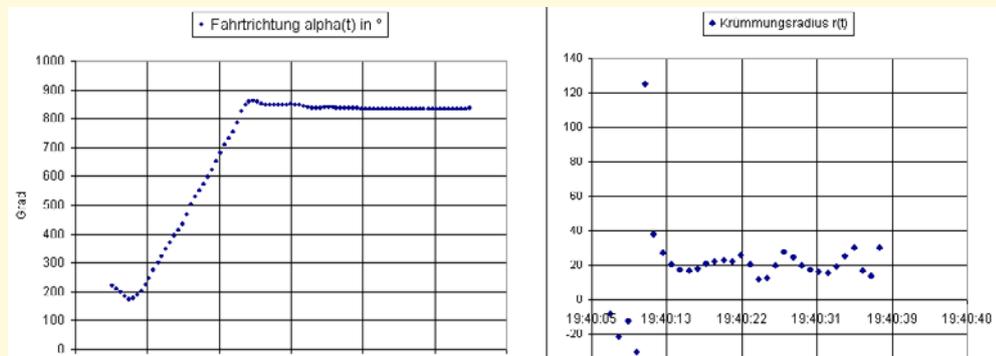


Fig. 2: Fahrtrichtung und Krümmungsradius während der Kreiselfahrt zur Kontrolle

## 4 Die umfahrene Fläche

Die Datei *Kreisell-Frechen* enthält ein Blatt *runde-1* mit den Positionen  $(x_1; y_1), (x_2; y_2) \dots$  der ersten Kreiselfrunde.

- Begründen Sie: Die Summe  $\frac{1}{2}(y_1 + y_2)(x_2 - x_1) + \frac{1}{2}(y_2 + y_3)(x_3 - x_2) + \dots$ , die in Fig. 3, Spalte  $y^*dx$ , berechnet wird, liefert (näherungsweise) den Wert der umfahrenen Kreiselfläche  $1297\text{m}^2$ .
- Vergleichen Sie mit dem Flächenwert, der sich aus dem in Fig. 2 sichtbaren Krümmungskreisradius ergeben würde. Welcher Flächenwert ergibt sich aus der zweiten Kreiselfrunde?

KS		= (J4 + J5) / 2 * (I5 - I4)													
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L			
1															
2															
3															
4															
5															
6															
7															
8															
9															
10															
11															
12															
13															
14															
15															
16															
17															

Nu	Lat	Lon	s (km)	v (km/h)	Zeit	HDOP	Sat	x (m)	y (m)	$y^*dx$	$x^*dy$
5	50.911123	6.829612	0.011834	19.00	19:40:09	0.9	11	58.9	54.5		
6	50.911145	6.829527	0.018283	25.34	19:40:10	0.9	11	52.9	56.9	-331.9	136.7
7	50.911167	6.829427	0.025717	26.41	19:40:11	0.9	11	45.9	59.4	-407.6	120.9
8	50.911173	6.829322	0.033117	26.72	19:40:12	0.9	11	30.6	60.0	-439.4	20.2
9	50.911163	6.829218	0.040501	26.98	19:40:13	1	10	31.3	58.9	-433.6	-38.8
10	50.911113	6.829128	0.047809	26.72	19:40:14	0.9	11	25.0	55.3	-360.2	-103.1
11	50.911075	6.829068	0.05524	25.47	19:40:15	1	10	20.7	49.1	-219.5	-139.7
12	50.911008	6.829005	0.062605	24.72	19:40:16	1	10	19.5	41.7	-57.3	-149.9
13	50.910932	6.829085	0.071614	26.97	19:40:17	0.9	11	21.9	33.2	91.9	-175.0
14	50.91087	6.829173	0.080876	30.08	19:40:18	0.9	11	28.1	26.3	183.8	-172.5
15	50.910837	6.829292	0.090001	31.71	19:40:19	0.9	11	36.5	22.7	204.5	-118.4
16	50.910833	6.829418	0.098866	30.87	19:40:20	0.9	11	45.3	22.2	198.4	18.2
17	50.910863	6.829535	0.107722	31.78	19:40:21	0.9	11	53.5	25.6	196.0	164.7

Fig. 3: Berechnung der Kreiselfläche. Hier wurde als Endpunkt der Anfangspunkt ( $N_0 = 5$ ) gewählt.

## 5 Eigene Untersuchungen

Führen Sie Krümmungsradius- und Flächenuntersuchungen nach dem Vorbild in Aufgabe 3 und 4 entweder einer selbst aufgezeichneten Datei oder wiederum wie in Aufgabe 2 an den Dateien: *radrennen-sportplatz.xls*, *pkw-autobahnkleblatt.xls*, *serpentinen.xls* durch.

# Sachthema: GPS – Dem Navi auf der Spur

## Station 6:

### Brems- und Querbeschleunigung beim Kurvenfahren – Das Skalarprodukt in Aktion

GPS-Dateien

Station-6-lkw-köln-süd.xls  
735301-3881

Bevor man mit dem Auto in eine (Rechts-) Kurve geht, drosselt man die Geschwindigkeit. Da die Bremsbeschleunigung entgegen der Fahrtrichtung wirkt, „fliegt“ man wegen der Trägheit nach vorne. Gleichzeitig wirkt eine Querbeschleunigung nach rechts – durch die Trägheit wird man nach links gedrückt. Mit Hilfe von Vektoren lassen sich Brems- und Querbeschleunigung berechnen. Wie das geht, kann man am Beispiel einer Fahrt mit einem Kleinlaster durch das Kölner Südkreuz erschließen. In dem Kalkulationsblatt (Fig. 1, Seite 16) sind die Daten der Fahrt abgespeichert.

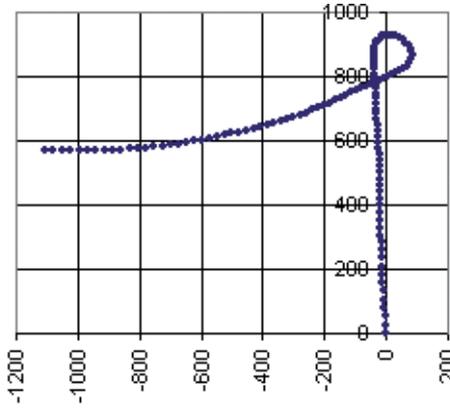


Fig. 1: Spur durch das Kreuz Köln Süd  
... je langsamer, desto dichter liegen die Punkte beieinander ...

Im Info-Kasten wird erläutert, wie man einen Beschleunigungsvektor in die Komponenten der Tangential- und Querbeschleunigung (Normalbeschleunigung) zerlegen kann.

#### Tangential- und Querbeschleunigung

Die Geschwindigkeit kann in der xy-Ebene als zweidimensionaler Vektor aufgefasst werden. Er hat bei der Fahrt in Fig. 1, Seite 16, um 21:32:45 Uhr (Zeile 50) den Wert

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,4 \\ 9,78 \end{pmatrix}$$

Das Auto fährt mit  $1,4 \frac{m}{s}$  in x-Richtung (Osten) und mit  $9,78 \frac{m}{s}$  in y-Richtung (Norden).

Der Betrag dieses Vektors

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 9,88 \left[ \frac{m}{s} \right] = 36,688 \left[ \frac{km}{h} \right]$$

ist die „Tachogeschwindigkeit“ (Spalte E).

Der zugehörige Einheitsvektor  $\vec{v}_0 = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \begin{pmatrix} 0,142 \\ 9,990 \end{pmatrix}$  gibt die Fahrtrichtung an.

Orthogonal „links“ zur Fahrtrichtung steht der Normalen-Einheitsvektor  $\vec{n}_0 = \begin{pmatrix} -0,990 \\ 0,142 \end{pmatrix}$ .

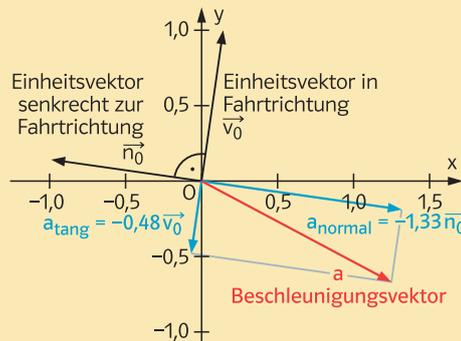


Fig. 2

Auch die **Beschleunigung** ist als „Geschwindigkeitsänderung/verstrichene Zeit“ bei ebenen Bewegungen ein **Vektor**. In Zeile 50 ergibt sich, wenn man die Geschwindigkeitsvektoren eine Sekunde nachher und vorher voneinander subtrahiert und die Differenz (wegen der 2-s-Zeitdifferenz) halbiert,  $\vec{a} = \frac{1}{2}(\vec{v}_{51} - \vec{v}_{49}) = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,25 \\ -0,67 \end{pmatrix}$ .

Das Auto beschleunigt in x-Richtung mit  $1,25 \frac{m}{s^2}$  und bremst in y-Richtung mit  $-0,67 \frac{m}{s^2}$ .

$$a_{\text{tang}} = \frac{\vec{a}_{50} \cdot \vec{v}_{50}}{|\vec{v}_{50}|} = -0,48 \left[ \frac{m}{s^2} \right]$$

$$a_{\text{normal}} = \frac{\vec{a}_{50} \cdot \vec{n}_{50}}{|\vec{v}_{50}|} = -1,33 \left[ \frac{m}{s^2} \right]$$

# Sachthema: GPS – Dem Navi auf der Spur

**Tangential- und Normalbeschleunigung** erhält man hieraus, indem man diesen Beschleunigungsvektor zerlegt in eine Komponente in Fahrtrichtung  $\vec{v}_0$  und eine in Richtung  $\vec{n}_0$  senkrecht dazu. Dazu projiziert man den Beschleunigungsvektor auf diese Einheitsvektoren. Man erhält die Tangentialbeschleunigung  $a_{\text{tang}} = \vec{a} \cdot \vec{v}_0 = -0,48 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ : Das Auto reduziert seine Geschwindigkeit sekundlich um  $0,48 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ . Die Normalbeschleunigung ist mit  $a_{\text{normal}} = \vec{a} \cdot \vec{n}_0 = -1,3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  mehr als doppelt so groß wie die Bremsbeschleunigung. Wegen des negativen Vorzeichens liegt eine Rechtskurve vor.

Nach der Newton-Formel  $\vec{F} = m \vec{a}$  wird ein 50 kg schwerer Fahrer mit  $-50 \cdot 0,48 = -24 \text{ [N]}$  nach vorne und mit  $50 \cdot 1,33 = 66,5 \text{ [N]}$  in Richtung Fahrertür gedrückt.

150		f <sub>0</sub> =(G51-G49)/2														
4	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	
	No	Lat	Lon	s (km)	v (km/h)	Zeit	x (m)	y (m)	vx (m/s)	vy (m/s)	v (m/s)	ax (m/s²)	ay (m/s²)	a-tang	a-normal	
48	1302	50.886470	6.968543	28.658063	43.355301	21:32:43	-40.8267051	861.291886	-0.39	11.90	11.90	0.54	-1.08	-1.10	-0.51	
49	1303	50.886572	6.968542	28.669418	38.7253	21:32:44	-40.8968541	872.631988	0.32	10.73	10.73	0.89	-1.06	-1.03	-0.93	
50	1304	50.886663	6.968552	28.679573	36.688099	21:32:45	-40.1953643	882.749138	1.40	9.78	9.88	1.25	-0.67	-0.48	-1.33	
51	1305	50.886748	6.968582	28.689267	35.780602	21:32:46	-38.090895	892.199224	2.81	9.39	9.80	1.49	-0.44	0.00	-1.56	
52	1306	50.886832	6.968632	28.699255	36.595501	21:32:47	-34.5834461	901.538131	4.38	8.89	9.92	1.60	-0.64	0.13	-1.71	
53	1307	50.886908	6.968707	28.709221	36.947399	21:32:48	-29.3222728	909.987619	6.00	8.12	10.09	1.51	-0.86	0.20	-1.73	
54	1308	50.886978	6.968803	28.719525	37.243698	21:32:49	-22.5879709	917.770043	7.40	7.17	10.31	1.54	-1.45	0.10	-2.11	

Fig. 1: Berechnung von Tangential- und Querbeschleunigung ...

4	I	J	K	L	M	N	O
	vx (m/s)	vy (m/s)	v (m/s)	ax (m/s²)	ay (m/s²)	a-tang	a-normal
48	=(G49-G47)/2	=(H49-H47)/2	=WURZEL(I48*2+J48*2)	=(I49-I47)/2	=(J49-J47)/2	=(L48*I48+M48*J48)/K48	=(L48*(-J48)+M48*I48)/K48
49	=(G50-G48)/2	=(H50-H48)/2	=WURZEL(I49*2+J49*2)	=(I50-I48)/2	=(J50-J48)/2	=(L49*I49+M49*J49)/K49	=(L49*(-J49)+M49*I49)/K49
50	=(G51-G49)/2	=(H51-H49)/2	=WURZEL(I50*2+J50*2)	=(I51-I49)/2	=(J51-J49)/2	=(L50*I50+M50*J50)/K50	=(L50*(-J50)+M50*I50)/K50

Fig. 2: ... und die dahinter stehenden Excel-Formeln

- Begründen Sie, dass die in Fig. 2 sichtbaren Excel-Formeln die Komponenten der Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektoren korrekt berechnen.
  - Begründen Sie: Die Formeln in den Spalten N und O realisieren die im Text des Info-Kastens dargelegte Zerlegung des Beschleunigungsvektors in eine Tangential- und eine Normalkomponente.
  - Programmieren Sie das Kalkulationsblatt nach der Vorlage aus Fig. 1 und Fig. 2 und visualisieren Sie den zeitlichen Verlauf von Tangential- und Querbeschleunigung bei der Durchfahrt durch das Autobahnkreuz wie in Fig. 3.
  - Rainer bezweifelt, dass das Diagramm aus Fig. 3 mit den Tangential- und Normalbeschleunigungen zur Kurvenfahrt aus Fig. 1 gehören kann. Interpretieren Sie dieses Diagramm und nehmen Sie Stellung.

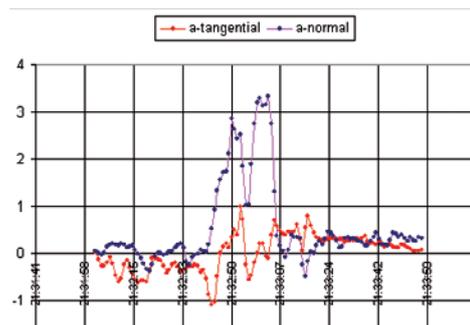


Fig. 3: Tangential- und Normalbeschleunigung

Alternative: Arbeiten Sie mit einer selbst aufgezeichneten Datei.

## 2 Eigene Untersuchungen

- Führen Sie Beschleunigungs-Untersuchungen nach dem Vorbild aus den Aufgaben 1 und 2 an einer der folgenden Dateien durch.
  - 01-nürburgring-nordschleife.xls
  - 06-autobahn-kleeblatt.xls
  - 03-fahrrad-sportplatz.xls
 Untersuchen Sie dabei die Fahrten auch auf quietschende Reifen (ab ca.  $4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ ).
- Bereiten Sie eine Präsentation Ihrer Arbeitsergebnisse vor.

GPS-Dateien Station 7 finden Sie unter dem Online-Link 735301-3881.

# Sachthema: GPS – Dem Navi auf der Spur

## Station 7:

### Luft- und Rollwiderstand – Das GPS ersetzt den Windkanal

Radler kennen das: Wenn man bei voller Fahrt aufhört zu treten, dann wird das Rad durch den Luftwiderstand zunächst stark gebremst. Der Luftwiderstand hängt nämlich quadratisch von der Geschwindigkeit ab: bei  $30 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  ist er 4-mal so groß wie bei  $15 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  (vgl. den Info-Kasten). Am Ende rollt es aber dann doch sehr lange, weil der Luftwiderstand verschwunden ist und der Rollwiderstand unabhängig von der Geschwindigkeit sehr klein ist.

Das zeigt sich auch am Geschwindigkeitsverlauf beim Ausrollen eines Opel Corsa auf dem Standstreifen einer Autobahn (Fig. 1).

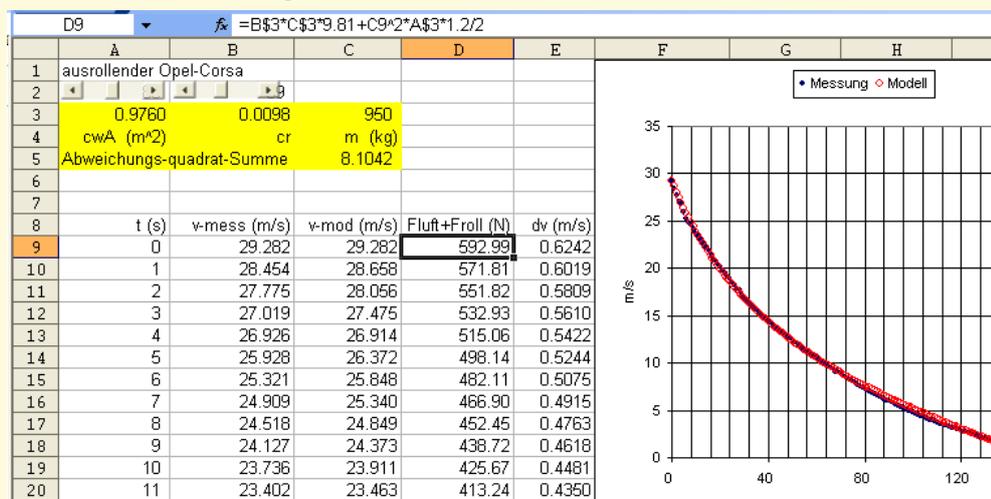


Fig. 1: Geschwindigkeitsverlauf beim Ausrollen eines Opel Corsa: Realität und Modell.

Die Modellparameter sind hier mit den Schieberegler noch nicht ganz optimal angepasst.

Man kann in C5 noch kleinere Abweichungswerte erreichen.

#### Info:

(1) Für die **Rollwiderstandskraft** (in N) gilt

$$F_{\text{Roll}} = c_r \cdot g \cdot m$$

- $c_r$  = Rollwiderstandsbeiwert in Prozent, gibt an, wie viel Prozent der Gewichtskraft als Rollwiderstand wirken,
- $m$  = Masse des Fahrzeuges,
- $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ , Erdbeschleunigung.

#### Newtons Gesetz

$$F = m \cdot a \text{ oder } a = \frac{F}{m}$$

Wenn auf ein Auto mit Masse  $m = 950 \text{ kg}$  die Bremskraft  $F = 400 \text{ N}$  wirkt, beträgt die Bremsbeschleunigung

$$a = \frac{F}{m} = \frac{400}{950} = 0,421 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Das Auto wird in jeder Sekunde um

$$dv = 0,421 \frac{\text{m}}{\text{s}} \text{ langsamer.}$$

(2) Für die **Luftwiderstandskraft** (in N) gilt

$$F_{\text{Luft}} = \frac{\rho \cdot c_w \cdot A \cdot v^2}{2}$$

- $A$  die Stirnfläche des Fahrzeuges in  $\text{m}^2$ ,
- $c_w$  der Luftwiderstandsbeiwert, der angibt, wie viel Prozent der Frontfläche  $A$  für den Luftwiderstand wirksam ist.  $c_w \cdot A$  bezeichnet man als effektive Stirnfläche.
- $v$  die Geschwindigkeit in  $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ ,
- $\rho$  die Luftdichte =  $1,2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ .

Zu (2):  **$c_w$ -Wert:** Wenn ein Fahrzeug die Frontfläche  $A = 2 \text{ m}^2$  hat, aber sehr windschnittig ist, zählt hiervon nur ein kleiner Teil. Den Anteil, der zählt, nennt man  $c_w$ -Wert. Bei  $c_w = 0,4$  wäre die effektive Frontfläche nur  $0,4 \cdot 2 \text{ m}^2 = 0,8 \text{ m}^2$ .

In Worten:

Kraft = Masse mal Beschleunigung.

Oder:

Beschleunigung = Kraft durch Masse.

## Sachthema: GPS – Dem Navi auf der Spur

Aus den Messwerten des Ausrollversuchs kann man ermitteln, wie viel Prozent des Gewichts als Rollwiderstand und wie viel Prozent der Stirnfläche für den Luftwiderstand zählen. (Je windschnittiger, desto kleiner ist die effektive Stirnfläche.) Dazu vergleicht man den gemessenen Geschwindigkeitsverlauf (Realität) mit einer Excel-Modellrechnung. Die gesuchten Werte der effektiven Stirnfläche  $c_w \cdot A$  und des Rollwiderstandsbeiwertes  $c_r$  trägt man in den Zellen A3 und B3 (als – hier mit Schieberegler – veränderbare Modellparameter) ein. In Spalte D wird dann ausgehend von der gemessenen Startgeschwindigkeit ( $29,282 \frac{m}{s}$  am Anfang des Ausrollvorganges) Sekunde für Sekunde die neue Geschwindigkeit errechnet. Dazu ermittelt man aus (1) und (2) in jeder Zeile die geschwindigkeitsabhängige Bremskraft  $F_{Luft} + F_{Roll}$ , die Geschwindigkeitsabnahme je Sekunde  $dv = \frac{F_{Brems}}{950 kg}$  und daraus die Geschwindigkeit in der nächsten Sekunde. Die Einzelheiten enthält Aufgabe 1.

### 1 Luft- und Rollwiderstand des Opel Corsa

Die Datei *corsa-ausrollversuch.xls* enthält in den ersten Spalten die Zeiten und die zugehörigen gemessenen Geschwindigkeiten – sowie die bereits vorbereiteten Schieberegler für die unbekannten Parameter  $c_w \cdot A$  und  $c_r$ .

a) Ermitteln Sie in Zelle D9 die Bremskraft (Luftwiderstand und Rollwiderstand) zur Startgeschwindigkeit  $29,282 \frac{m}{s}$  unter Ausnutzung der Formeln (1) und (2). Kontrollieren Sie Ihre Rechnung durch Vergleich mit dem in Fig. 1, Seite 17, angegebenen Ergebnis.

b) Wenn diese Bremskraft  $F_{Luft} + F_{Roll}$  eine Sekunde lang wirkt, verringert sich die Geschwindigkeit um  $dv = m \cdot F_{Luft} + F_{Roll}$ . ( $m = 950 kg$  ist die in D3 angegebene Masse des Fahrzeugs samt Fahrer.)

Berechnen Sie in Zelle C10 die neue Geschwindigkeit eine Sekunde später.

Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem in Fig. 1, Seite 17, angegebenen Wert.

c) Kopieren Sie die in den Teilaufgaben a) und b) aufgestellten Formeln für die Zellen D9 und C10 in die darunter liegenden Bereiche der Spalten D und C und stellen Sie den gemessenen und den berechneten Geschwindigkeitsverlauf in einem gemeinsamen Punktdiagramm wie in Fig. 1, Seite 17, dar.

d) Verstellen Sie den Schieberegler so, dass die berechneten und die gemessenen Geschwindigkeiten „optisch“ möglichst gut zueinander passen.

e) Quadrieren Sie die Geschwindigkeitsdifferenzen zwischen Modell und Messung und summieren Sie diese Quadrate (in Zelle C5) auf.

f) Variieren Sie die Schieberegler erneut, bis diese „Abweichungs-Quadrat-Summe minimal wird (optimale Anpassung). Vergleichen Sie Ihren Wert der effektiven Stirnfläche mit den Angaben  $c_w \cdot A = 0,65$  aus einem Werbesprospekt (Fig. 2).



Fig. 2

### 2 Eigene Messung

a) Führen Sie mit dem GPS eine eigene Geschwindigkeitsmessung bei einem Ausrollversuch mit einem Fahrrad oder einem Mofa durch, wobei Sie auf absolute Windstille und eine ebene Ausrollstrecke achten müssen.

b) Vergleichen Sie Ihre effektive Luftwiderstandsfläche  $c_w \cdot A$  und Ihren eigenen Rollwiderstandsbeiwert  $c_r$  mit den im Ausrollversuch mit dem Corsa ermittelten Werten.

Im Netz gibt es viele Anleitungen, die beschreiben, wie man Schieberegler in Excel einbaut.

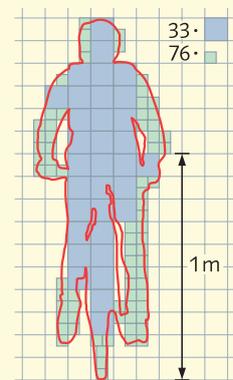


Fig. 1: Radler mit  $0,52 m^2$  Frontfläche

# Sachthema: GPS – Dem Navi auf der Spur

## Station 8:

### Wenn Gauß ein GPS gehabt hätte – Normal- und Exponentialverteilung

GPS-Dateien

Station-8-ruhendes-navi.xls  
735301-3881

Man lässt ein Trekking-Navi an einem Ort liegen. Wegen der Messfehler streuen die Positionsangaben. Die Abweichungen vom Mittelwert (der angenommenen „wahren“ geografischen Länge bzw. Breite) zeigt Fig. 1.

Auto-Navis „frieren die Positionsangaben ein“, wenn sie sich nicht schnell bewegen.

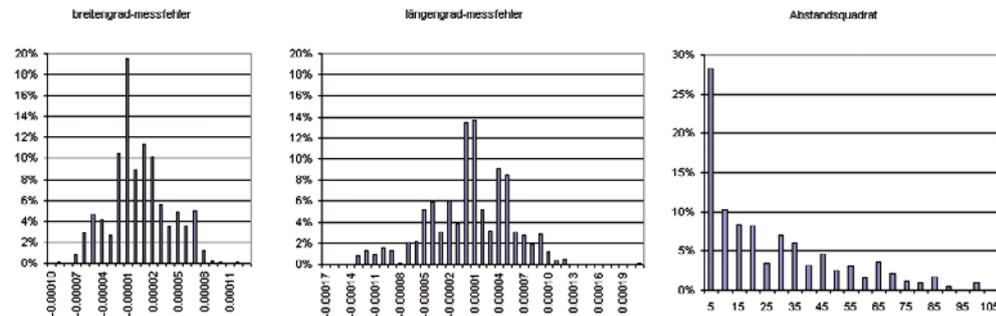


Fig. 1a: Abweichungen der gemessenen geografischen Breite vom „wahren“ Wert  $6,836\,840\,209^\circ$ ;  $\sigma = 0,000\,0497^\circ$ ; dabei gilt  $0,000\,01^\circ \triangleq 1,11\text{m}$ .

Fig. 1b: Abweichungen der gemessenen geografischen Länge vom „wahren“ Wert  $50,933\,6591^\circ$ ;  $\sigma = 0,000\,0345^\circ$ ; dabei gilt  $0,00001^\circ \triangleq 0,7\text{m}$ .

Fig. 1c: Verteilung der Abstandsquadrate  $d^2$  (in  $\text{m}^2$ ) der gemessenen von den wahren Positionen – Exponentialverteilung mit Mittelwert 27.

## 1 Normalverteilung, Exponentialverteilung

- Prüfen Sie mit den  $1\sigma$ - und  $2\sigma$ -Regeln, ob die Annahme einer Normalverteilung haltbar ist.
- Das Navi zeigt während der Messung eine Messgenauigkeit von 8 m an. Wie beurteilen Sie diese Angabe unter Bezug auf Fig. 1?
- Prüfen Sie (Fig. 1c), ob die Abstandsquadrate der Messpunkte von der „wahren Position“ exponentialverteilt sind, indem Sie die Wahrscheinlichkeiten der Exponentialverteilung mit  $\mu = 27, \lambda = \frac{1}{\mu}$  mit den relativen Häufigkeiten vergleichen.
- Eigene Untersuchung: Stellen Sie die Messwerte der Datei *Station-8-ruhendes-navi.xls*, der Datei *08-messfehler.xls* oder einer selbst aufgezeichneten Datei wie in Fig. 1 dar. Untersuchen Sie analog zu Teilaufgabe a) und c), ob die Längen- und Breitenkreis-Messwerte in dieser Datei normalverteilt und die Abstandsquadrate der Messpunkte exponentialverteilt sein könnten.
- Die Standardabweichung ist bei den Längengrad-Werten in Fig. 1 um den Faktor 0,69 kleiner als bei den Breitenkreis-Messungen. Jan meint, das könnte damit zusammenhängen, dass die Breitenkreise zum Nordpol hin immer kleiner werden (und am Messort mit  $\cos(50,93^\circ)$  der Breitenkreis nur 0,63-mal so lang ist wie der Längengrad). Nehmen Sie Stellung – auch unter Bezug auf Ihre eigene Datenerhebung.

Wandernde Satelliten, Einflüsse der Atmosphäre und Reflexionen der GPS-Signale an Gebäuden verursachen Messfehler. Präzisere Signale stellen die USA nur für militärische Zwecke zur Verfügung.

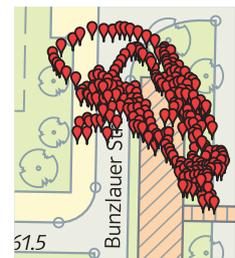


Fig. 2

## 2 Drift

Obwohl die Verteilung der Messfehler (Fig. 1a, b) glockenförmig ist, schwanken die einzelnen Messwerte bei dem in Fig. 1 untersuchten Navi nicht zufällig von Sekunde zu Sekunde. Sie steigen und fallen kontinuierlich, sie „driften“, wie Fig. 3 zeigt. Das wird auch an der Spur aus Fig. 2 deutlich. Untersuchen Sie die Messwerte in *08-messfehler.xls* auf Drift.

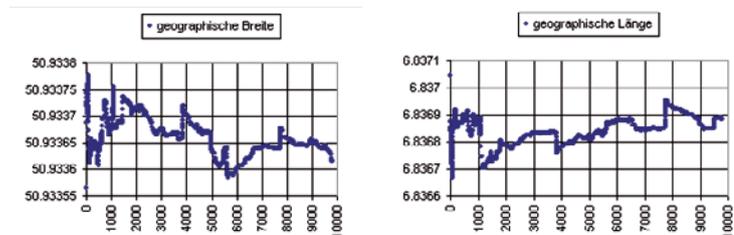


Fig. 3