Modellieren im Mathematikunterricht - Im ICE von Hamm nach Bielefeld
Mit GPS und Google bekommt auch eine Prüfungsaufgabe „Pfiff“

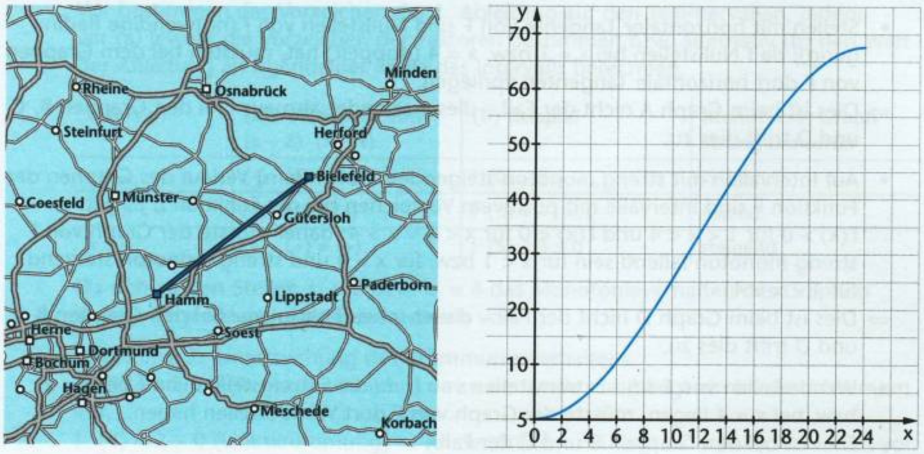
Die Untersuchung von Bewegungsfunktionen gehört zur Analysis wie das Dreieck zur Geometrie. GPS-Empfänger (auch in Smartphones) zeichnen neuerdings Bewegungen sekundengenau als Tracks auf. Mit Google lassen sich diese Tracks in Landkarten visualisieren, animiert nachfahren und durch Funktionsgraphen beschreiben. Damit eröffnen sich dem Mathematikunterricht völlig neue Brücken in die Realität. Man könnte von einem „Quantensprung“ in Richtung Authentizität und Überprüfbarkeit von Modellbildungsprozessen sprechen.

Einleitung

Seit 2011 sind in Nordrhein-Westfalen in der Klassenstufe 10 zentrale Vergleichsarbeiten verbindlich: Man versucht, Aspekte der Wirklichkeit mithilfe von ganzrationalen Funktionen zu beschreiben und Steigungen, Extremstellen und Wendepunkte von Funktionsgraphen in inhaltlichem Kontext zu deuten. Dafür ist die folgende „Steckbriefaufgabe“ [1] ist ein schönes Beispiel, das zum Weiterdenken und zur kritischen Modellbewertung und jeden GPS-Besitzer zum Nachmessen und Modellieren einlädt.

1 Die Trainingsaufgabe und ihre Musterlösung

Aufgabe 5 *ICE-Fahrplan*



Ein ICE benötigt für die etwa 67 km lange Strecke von Hamm/Westfalen nach Bielefeld Hbf. ungefähr 24 Minuten (= 0,4 h). Die Fahrt kann näherungsweise durch den Graphen einer ganzrationalen Funktion 3. Grades modelliert werden.

a) Begründen Sie, warum typische Eigenschaften einer Fahrt von einem Bahnhof zum nächsten durch einen solchen Graphen beschrieben werden können.

b) Geben Sie charakteristische Eigenschaften des Graphen an, durch die der Funktionsterm der ganzrationalen Funktion bestimmt werden könnte. G5

c) Der abgebildete Graph hat die Funktionsgleichung $f(x) = -0{,}0097\,x^3 + 0{,}35\,x^2$.
   (1) Welche Strecke hat der Zug nach 10-minütiger Fahrzeit ungefähr zurückgelegt? A1
   (2) Welche Geschwindigkeit hat der Zug zu diesem Zeitpunkt erreicht? Geben Sie diese in der Einheit km/h an. E2
   (3) Zu welchem Zeitpunkt ist die Geschwindigkeit des Zuges am größten? Wie groß ist diese Höchstgeschwindigkeit? Vergleichen Sie diese mit der Durchschnittsgeschwindigkeit auf der Strecke. E2 F6 F7 F8
   (4) Unterwegs fährt der Zug durch den Bahnhof von Gütersloh, das 17 km von Bielefeld entfernt liegt. Nach welcher Fahrzeit ist dies ungefähr der Fall? Welche Geschwindigkeit hat der Zug dort gemäß der Modellierung? E2

Abb. 1a die Trainingsaufgabe…

Lösung:

a) Bevor ein Zug anfährt bzw. wenn er am Zielort angekommen ist, hat er die Geschwindigkeit null, d.h. die Tangente an den Graphen ist horizontal. Die Geschwindigkeit des Zuges nimmt langsam zu, bis er seine Höchstgeschwindigkeit erreicht hat; danach nimmt die Geschwindigkeit wieder ab, bis der Zug im Zielbahnhof zum Halten kommt.

b) Ein Funktionsgraph, der den Vorgang angemessen beschreibt, muss folgende Eigenschaften erfüllen: $f(0) = 0$; $f(24) = 67$; $f'(0) = 0$ und $f'(24) = 0$. Diese Bedingungen lassen sich auch in Form eines Gleichungssystems beschreiben:

Ist $f(x) = ax^2 + bx^3 + cx + d$, dann folgt: $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, also:

$f(0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = 0 \quad \Leftrightarrow \quad d = 0$

$f(24) = 67 \quad \Leftrightarrow \quad 24^3 \cdot a + 24^2 \cdot b + 24 \cdot c + d = 67$

$f'(0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3a \cdot 0^2 + 2b \cdot 0 + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c = 0$

$f'(24) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3a \cdot 24^2 + 2b \cdot 24 + c = 0$

c) (1) Die zurückgelegte Strecke nach 10-minütiger Fahrt wird durch $f(10)$ angegeben:
$f(10) = -0{,}0097 \cdot 10^3 + 0{,}35 \cdot 10^2 = 25{,}3$ km.

(2) Die Geschwindigkeit zu diesem Zeitpunkt ergibt sich aus dem Funktionswert von f' an dieser Stelle: $f'(x) = -0{,}0291x^2 + 0{,}7x$, also $f'(10) = 4{,}09$ km/min ≈ 245 km/h.

(3) Da die 1. Ableitung die Momentangeschwindigkeit der Fahrt angibt, muss man die Ableitungsfunktion von f' betrachten, um das Maximum der Geschwindigkeit herauszufinden. Notwendige Bedingung ist, dass die 2. Ableitung dort gleich null ist:
$f''(x) = -0{,}0582x + 0{,}7 = 0 \Leftrightarrow x \approx 12$.

Aus dem Sachzusammenhang ergibt sich, dass dies das Maximum ist. Man kann auch mit dem VZW der 2. Ableitung argumentieren: Die Werte der 2. Ableitung (lineare Funktion mit negativer Steigung) sind links von der Nullstelle positiv, rechts davon negativ.

Alternative Überlegung: Da der Graph einer ganzrationalen Funktion 3. Grades punktsymmetrisch zum Wendepunkt ist, kann man erschließen, dass die maximale Geschwindigkeit genau in der Mitte zwischen den Extrempunkten $(0|0)$ und $(24|67)$ angenommen wird.

Die Höchstgeschwindigkeit ist:
$f'(12) = -0{,}0291 \cdot 12^2 + 0{,}7 \cdot 12 = 4{,}21$ km/min ≈ 253 km/h.

Dagegen gilt für die Durchschnittsgeschwindigkeit:
$\bar{v} = \frac{67\text{ km}}{24\text{ min}} = \frac{67}{24} \cdot 60\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 167{,}5\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

(4) Gesucht ist der Zeitpunkt, zu dem die Strecke 50 km zurückgelegt wurde.
Aus dem Graphen ergibt sich, dass dies ungefähr nach 16 Minuten der Fall ist
(Kontrollrechnung: $f(16) = -0{,}0097 \cdot 16^3 + 0{,}35 \cdot 16^2 = 50$ km).

Es gilt: $f'(16) \approx 3{,}75$ km/min ≈ 225 km/h.

Abb. 1b … und ihre Musterlösung

In Aufgabenteil a) soll begründet werden, dass sich die Zeit->Weg Funktion einer Fahrt auf der Strecke zwischen Hamm und Bielefeld näherungsweise durch eine ganzrationale Funktion dritten Grades beschreiben lässt. Dabei wird der Funktionsterm zur Kontrolle mit f(x) =-0,0097x³+0,25 angegeben, wobei x ist die Fahrzeit in Minuten und f(x) die Wegstrecke in km bezeichnet.
Die Schüler sollen in dieser Aufgabe dokumentieren, dass sie Steckbriefaufgaben lösen und Ableitungen inhaltlich deuten können. Es handelt sich um eine „eingekleidete" Aufgabe, bei deren Lösung sich Schüler und Lehrer augenzwinkernd einig sind, dass sie die „wirkliche" Realität" nur sehr bedingt beschreibt, aber dass man solche Aufgaben „können" muss, um Prüfungen zu bestehen.

2 Fragen stellen

Wenn man aber „Modellierungskompetenz“ ernst nimmt und Schüler bittet, die Modellierung durch eine ganzrationale Funktion und ihre Rechenergebnisse mit gesundem Menschenverstand zu bewerten, stellen sie viele intelligente Fragen

- Ist die Bahnstrecke zwischen Hamm und Bielefeld wirklich so geradlinig wie in der Aufgaben-Skizze eingezeichnet?
- Fahren Züge beim Passieren von Bahnhöfen (Gütersloh 17 km vor Bielefeld) nicht deutlich langsamer als auf freier Strecke?
- Wenn die Zeit-Weg Funktion ein Polynom dritten Grades wäre, wäre der Graph der Zeit-Geschwindigkeitsfunktion eine Parabel mit Maximum genau in der Mitte zwischen Hamm und Bielefeld. Der Zug müsste also die erste Hälfte der Fahrt beschleunigen, um danach ununterbrochen zu bremsen. Das ist sehr unrealistisch.
- Schülern scheint ein trapezförmiger Graph realistischer. Sie vermuten, dass Züge gleichmäßig auf ihre Höchstgeschwindigkeit beschleunigen, dann lange mit konstanter Geschwindigkeit fahren um kurz vor dem Ziel abzubremsen, wenn sie nicht durch Weichenstraßen oder Bahnhöfe zwischendurch „ausgebremst“ werden.

Kurzmeldung der DPA: Die Polynome dritten Grades haben eine „Selbsthilfegruppe gegen Vergewaltigung und Missbrauch“ gegründet. Als Gründungszeitpunkt wird die Einführung der „Modellierungskompetenz“ in zentrale Prüfungen vermutet.

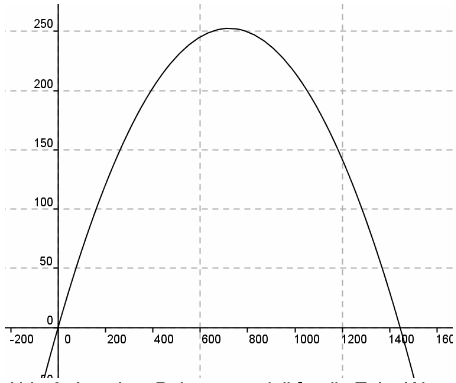


Abb. 2: Aus dem Polynommodell für die Zeit->Weg-Funktion ergibt sich ein Parabelmodell für die Zeit->Geschwindigkeitsfunktion (Auf der Rechtsachse die Zeit in s abgetragen)

3 Der Sprung in die Wirklichkeit

Eine Recherche nach der ICE-Strecke Hamm - Bielefeld fördert nach wenigen Klicks zutage, dass die erlaubte Höchstgeschwindigkeit dort 200 km/h beträgt - nicht 253 km/h.


ICE-Treff - Strecke Hamm - Hannover - Windows Internet Explorer

http://www.ice-treff.de/index.php?mode=thread&id=18445

Datei Bearbeiten Ansicht Favoriten Extras ?

ICE-Treff - Strecke Hamm - Hannover

Strecke Hamm - Hannover

Tommyboy, OWL, Dienstag, 23. Dezember 2008, 17:49 (vor 788 Tagen) @ hünfeld

bearbeitet von Tommyboy, Dienstag, 23. Dezember 2008, 17:53

Hallo Daniel,

die Strecke hat auf dem längsten Teil 4 Gleise, wobei die KBS 400 (Hamm-Bielefeld) für 200 km/h ertüchtigt ist. Die Güter- und Personenbahn wechseln sich ab (in Heessen und Brackwede), liegen also jeweils einmal eher östlich und westlich. Nach Minden geht's allerdings nur noch auf 2 Gleisen weiter, teilweise auch mit 200 km/h.

Auf dieser Strecke wird der gesamte Verkehr vom Ruhrgebiet nach Berlin abgewickelt (von den IC's über die MDV mal abgesehen), es fahren stündlich ICE-Züge (mit Halt in Hamm und Bielefeld), alle 2 Stunden IC-Züge nach Leipzig (Halt in Hamm, Gütersloh, Bielefeld, Herford, Bad Oeynhausen und Minden), diverse WE-Verstärker sowie RE/RB-Linien (z.B. Düsseldorf-Hamm-Minden stündlich). Und natürlich auf der G-Bahn der Güterverkehr.

Was ist an dieser Strecke so besonders? Ich fahre die fast täglich und außer "Verfolgungsfahrten" der RE's mit Güterzügen bzw. gelegentlichen Umleitungen über die Güterbahn ist mir da im Gegensatz zu anderen KBS nicht Besonderes aufgefallen, auch landschaftlich nicht.

Gruß
Tommyboy

Abb. 3: ICE-Forum

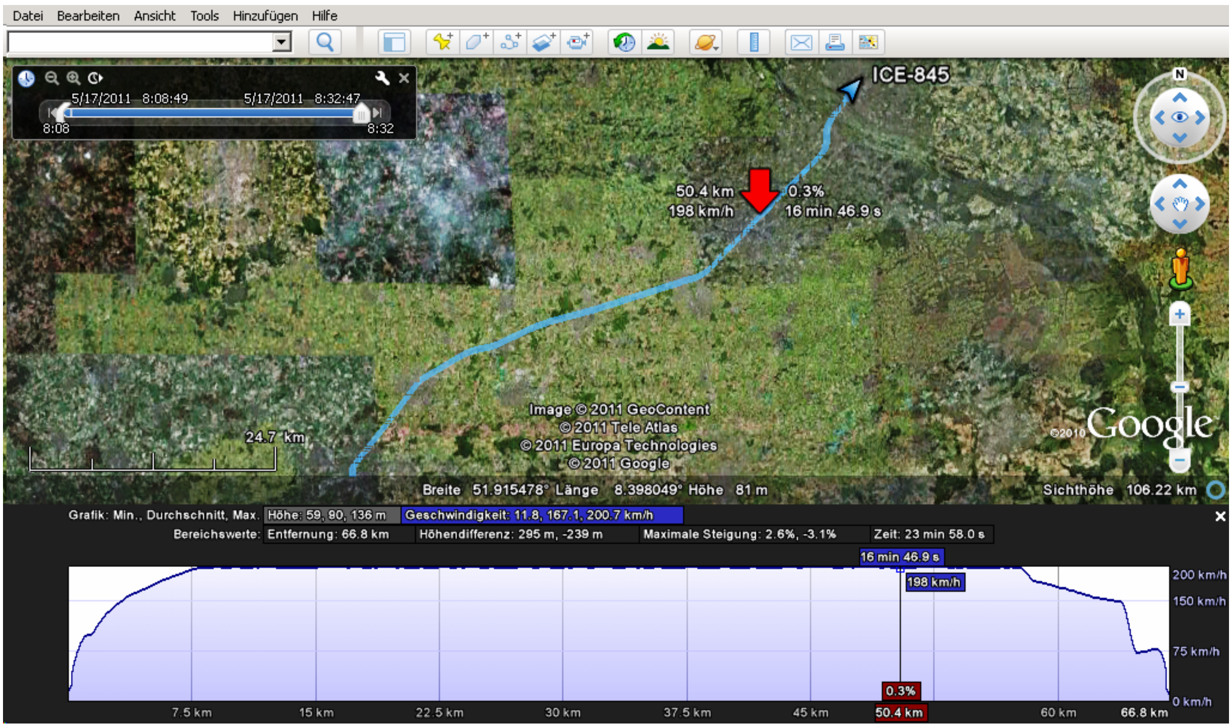
Lennart fuhr im Rahmen einer Facharbeit die Strecke Hamm Bielefeld mehrfach mit seinem GPS-Fahrrad-Tacho (Abb. 4) ab. Dabei wurde die Fahrspur als GPX-Datei („Track“) Sekunde für Sekunde aufgezeichnet. Und wenn man diesen Track in Google-Earth (Abb. 7) anschaut, erkennt man, dass

- die Bahngleise alles andere als geradlinig verlaufen,
- sich ein ICE strikt an die Geschwindigkeitsbeschränkung von 200 km/h hält
- auch der Bahnhof Gütersloh (Pfeil) mit „Tempo 200“ durchfahren wird.
- der Zug auf den gemessenen 66,8 km mit 23 min 58s Minuten planmäßig fuhr.

Abb. 4 GPS-Tacho

Abb. 6 Anzeigetafel im ICE 855

Abb. 5 für optimalen Empfang klemmt man den GPS-Empfänger im ICE an den Gummifalz zwischen zwei Wagen, da die Fensterscheiben in ICEs kaum Signale durchlassen.



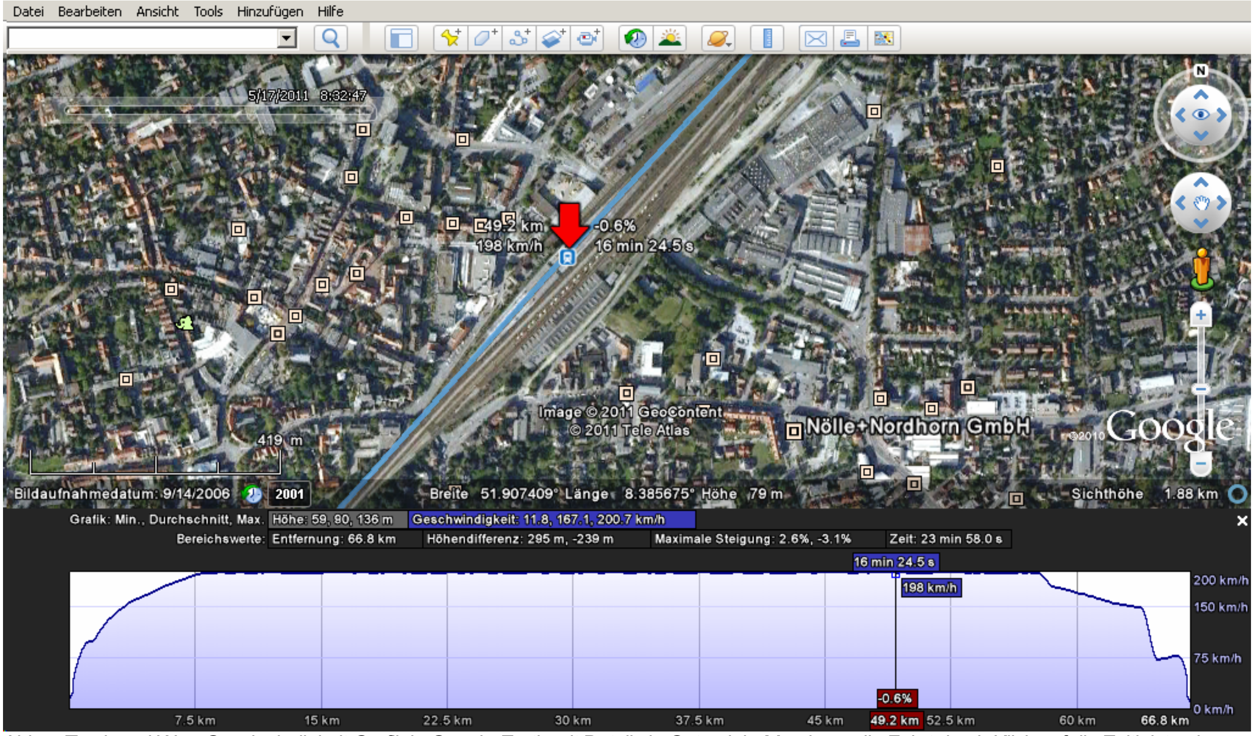


Abb. 7 Track und Weg-Geschwindigkeit Grafik in Google-Earth mit Details in Gütersloh. Man kann die Fahrt durch Klick auf die Zeitleiste oben links animiert nachfahren. Durch Rechtsklick auf den Track wird das Weg-Geschwindigketsdiagramm angezeigt. Der ICE 845 fuhr die Strecke zwischen 7,5 km und 58 km konstant mit 200 im/h und nahm den Bahnhof Gütersloh mit 198 km/h.

Um die tatsächlich gemessene Zeit->Geschwindigkeitsfunktion mit der „Geschwindigkeitsparabel“, die sich aus der Aufgabenstellung ergibt (Abb. 2), vergleichen zu können, importiert man die gpx-Daten in eine Tabellenkalkulation und zeichnet ein Punktdiagramm (Abb. 8).

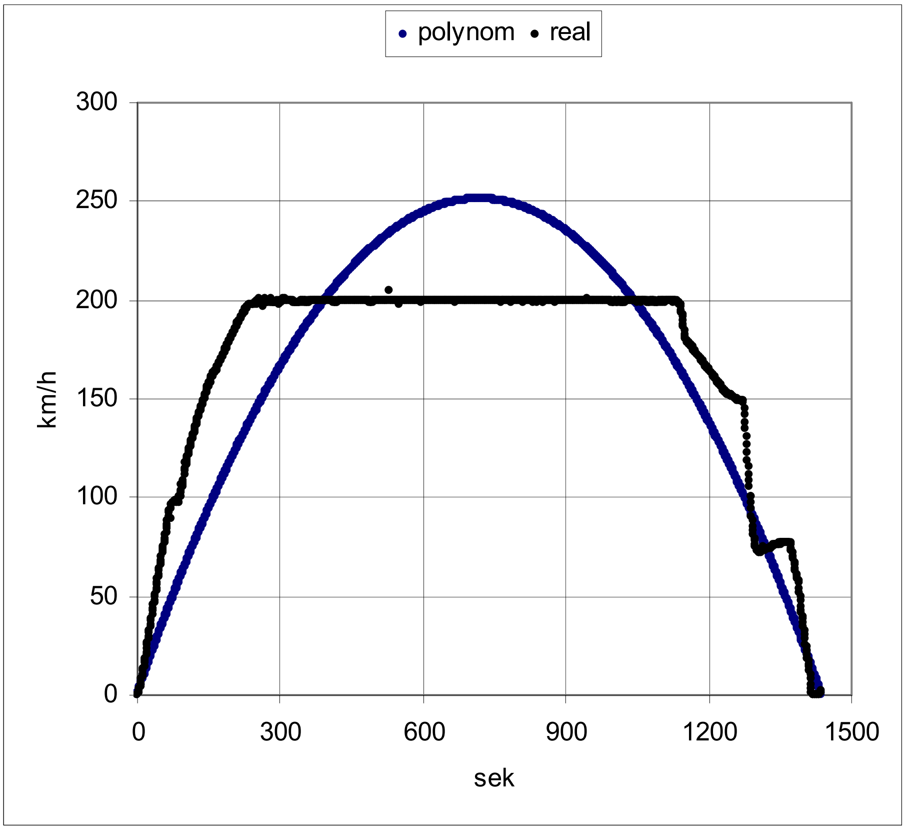


Abb. 8: Gemessene Zeit-Geschwindigkeitsfunktion im Vergleich zum Parabelmodell

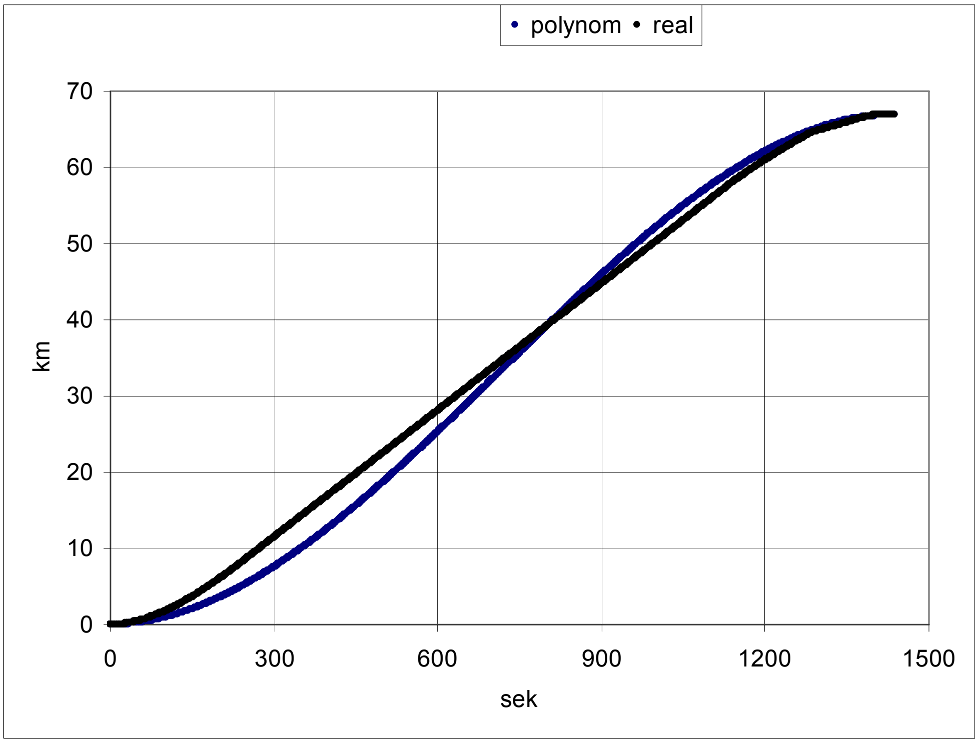
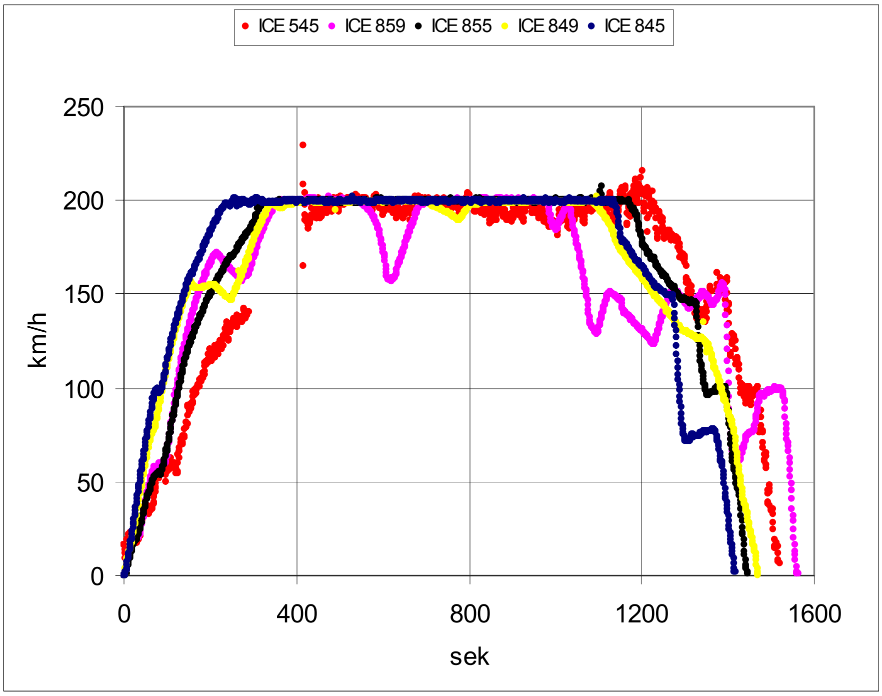


Abb. 8. Gemessene Zeit-Weg Funktion im Vergleich zum Polynom-Modell

Wie man sieht,

- wird der gemessene Zeit->Weg-Graph wegen seines im Mittelteil linearen Verlaufs nur schlecht durch ein Polynom vom Grad 3 beschrieben. Der Zeit->Geschwindigkeits-Graph eher Trapez- als Parabelform.
- \- erreicht der ICE seine konstante Höchstgeschwindigkeit km/h nach weniger als 5 Minuten und ist damit auch nach 10 Minuten deutlich langsamer ist als die im Polynom-Modell berechneten 245 km/h

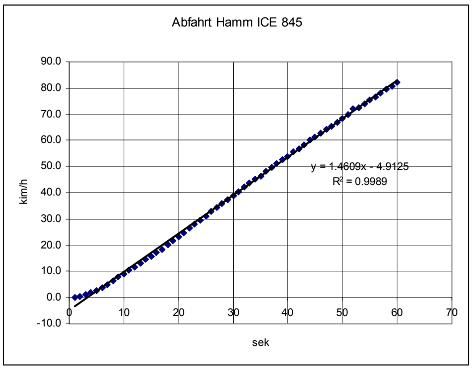
Abb. 9 zeigt, dass dies prinzipiell auch für andere ICE - Fahrten gilt, wobei die anderen vier ICEs aus der Stichprobe nicht ganz so pünktlich waren. Bei dem ICE, bei dem die gemessenen Geschwindigkeiten stark streuen und die Aufzeichnung zwischenzeitlich abreißt, war der Empfänger an der die GPS-Signale absorbierenden Scheibe angebracht - und nicht an dem Gummifalz zwischen den Wagen.
Außerdem erkennt man bei einem ICE Bremsvorgänge auf freier Strecke. Dieser ICE war deutlich verspätet und die vor ihm liegenden Streckenabschnitte waren noch nicht freigegeben



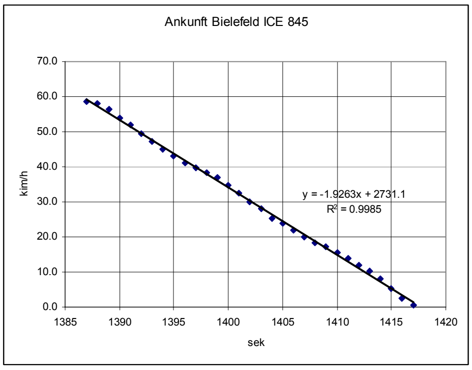
	Fahrzeit		Weg	mittl. Geschw.	auf 100km/h in	a: mittl. Beschl.	von 60km/h auf Stand in	b: mittlere Bremsbeschl.
ICE	sek	min	km	km/h	sek	m/s²	sek	m/s²
545	1521	25.4	67.0	159	172	0.16	31	0.54
859	1563	26.1	66.9	154	123	0.23	21	0.79
855	1446	24.1	66.9	167	129	0.22	33	0.51
849	1472	24.5	66.9	164	92	0.30	47	0.35
845	1418	23.6	66.9	170	89	0.31	32	0.52

Abb. 9 fünf Fahrten mit „technischen Daten“

Zwischen Hamm und Bielefeld verkehrt der ICE-2

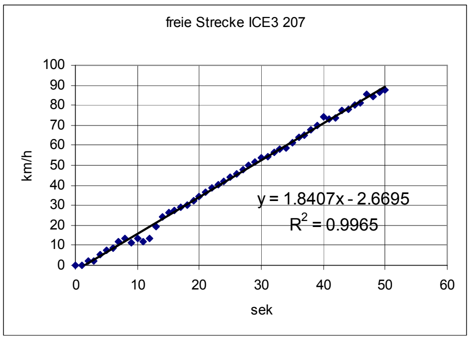


a) ICE-2 845 Abfahrt Hamm a=0.41 m/s²

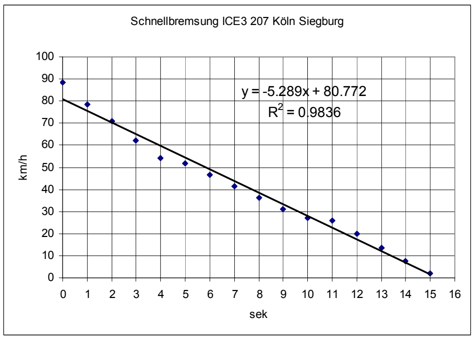


b) ICE-2 845 Ankunft Bielefeld b=-0.53 m/s²

Zwischen Köln und Frankfurt verkehrt der ICE-3



c) ICE-3 Start freie Strecke a=0.51 m/s²



d) ICE-3 Schnellbremsung b=- 1.47 m/s²

Abb. 10: Die Graphiken zeigen, dass sich die Geschwindigkeiten von Zügen beim Anfahren und Bremsen linear ändern. Die Beschleunigungen über gewisse Zeitspannen hinweg konstant. Die Zeit->Geschwindigkeits-Graphen haben dann

Abbildung 10 zeigt, dass ICEs bei freier Fahrt konstant mit bis zu 0,5 m/s² beschleunigen und bremsen und bei einer Schnellbremsung auf freier Strecke (hier zwischen Köln und Siegburg) auch Werte um 1,5 m/s² erreicht werden können. Das Trapezmodell beschreibt damit die Zeit-Geschwindigkeits-Graphen sehr viel besser als das Parabelmodell.
Soviel zur Trainingsaufgabe.
Das Aufstellen von Modellen ist nicht Selbstzweck. Man kann mit Hilfe solcher Modelle interessante Fragen beantworten, z. B. die Frage, in welchen Grenzen mögliche Verspätungen (z. B. auf der Strecke Hamm - Bielefeld) „aufgeholt" werden können.
Der Beantwortung dieser Frage sind die folgenden Abschnitte 4 und 5 gewidmet.

4 Das „Trapez" - Modell konstant beschleunigter Fahrten

Im „Trapezmodell" machen wir die Annahme, dass,

- der Zug beim Start die Zeit Δ_1 konstant beschleunigt, bis er seine Höchstgeschwindigkeit V erreicht. Die Beschleunigung bezeichnen wir mit a.
- Vor dem Anhalten bremst der Zug mit der konstanten Bremsbeschleunigung b = ka, k≥1, dabei ist k der Faktor, um den die Bremsbeschleunigung b größer ist als die Startbeschleunigung a. Wenn die Beschleunigungszeit Δ_1 beträgt, ist die Bremszeit $\Delta_3=\Delta_1/k$. In Abb. 11 trägt b ein negatives Vorzeichen.
- Dazwischen (Zeitspanne Δ_2) fährt der Zug mit der konstanten Höchstgeschwindigkeit V.
- Das Geschwindigkeitsdiagramm hat dann die Form des Trapezes, wobei der Flächeninhalt dem zurückgelegten Weg entspricht, denn es gilt $S=\int_0^T v(t)dt$
  Die Flächen der Teildreiecke lassen sich als Beschleunigungs- und Bremsweg deuten. Der Einfachheit halber gehen wir im Folgenden davon aus, dass doppelt so stark gebremst wie beschleunigt wird (k=2).

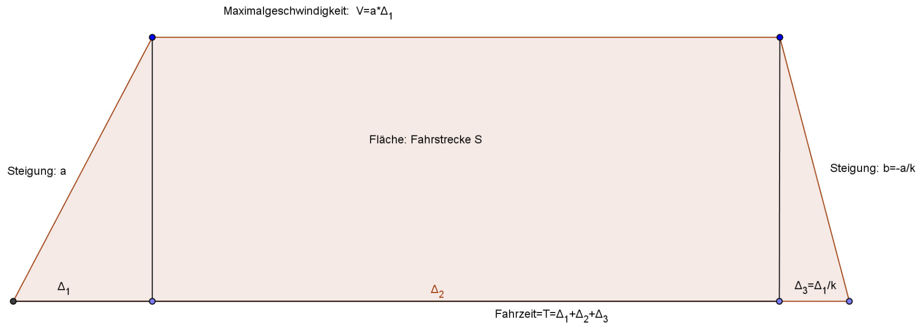


Abb. 11 Zeit-Geschwindigkeitsdiagramm nach dem Modell einer konstant beschleunigten/gebremsten Bewegung

5 Modellrechnung - funktionale Abhängigkeiten

In diesem Modell soll nun untersucht werden,
(a) wie stark der ICE zwischen Hamm und Bielefeld beschleunigen müsste um fahrplanmäßig zu sein
(b) in welchem Umfang Verspätungen bei „rasanter" Fahrweise realistisch aufgeholt werden können

Dazu berechnet man die Fahrzeit T in Abhängigkeit von Startbeschleunigung a, Bremsbeschleunigung b=ka und Höchstgeschwindigkeit V wie folgt:
Aus dem ersten Teildreieck von Abb. 11 erhält man wegen $\Delta_1 \cdot a = V$ für die

Beschleunigungszeit $\Delta_1 = \frac{V}{a}$ und die

Bremszeit: $\Delta_3 = \frac{\Delta_1}{k} = \frac{V}{a \cdot k}$.

Durch Flächenberechnung ergibt sich für den

Beschleunigungsweg: $s_1 = \frac{1}{2} a \Delta_1{}^2 = \frac{1}{2} a \frac{V^2}{a^2} = \frac{V^2}{2a}$ und für den

Bremsweg $s_3 = \frac{s_1}{k} = \frac{V^2}{2ka}$.

Die verbleibende Zeit Δ_2 (nach der Beschleunigung und vor dem Bremsen), welche der Zug mit Höchstgeschwindigkeit V fährt, ergibt sich zu

$$\Delta_2 = \frac{S - s_1 - s_2}{V} = \frac{S - \frac{V^2}{2a}(1+\frac{1}{k})}{V} = \frac{S}{V} - \frac{V}{2a}(1+\frac{1}{k})\,).$$

Für die gesamte Fahrzeit T erhält man

$$T = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = \frac{V}{a} + \frac{S}{V} - \frac{V}{2a}(1+\frac{1}{k}) + \frac{V}{ka} = \frac{S}{V} + \frac{V}{2a}(1+\frac{1}{k})\,.$$

Die Fahrzeiten, die sich zwischen Hamm und Bielefeld für S=67km und V=200 km/h hieraus für verschiedenen Startbeschleunigungen a und k=2 ergeben, entnimmt man Abbildung 12:

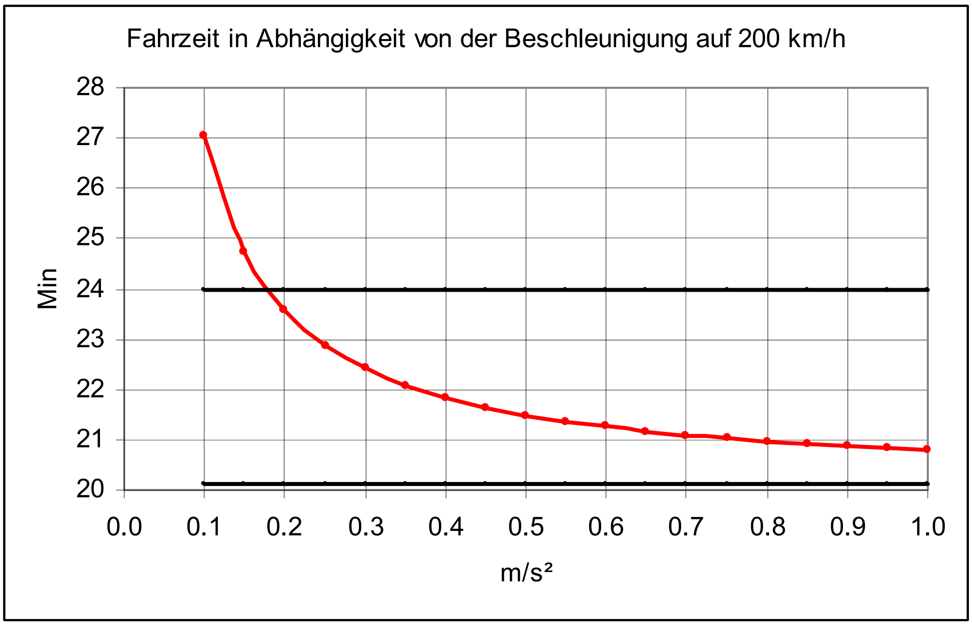


Abb. 12 Modellrechnung: Fahrzeit in Abhängigkeit von der konstanten Startbeschleunigung a (die Bremsbeschleunigung b ist doppelt so groß wie die Startbeschleunigung). Bei fliegendem Start mit 200 km/h in Hamm ergäben sich gut 20 Minuten Fahrzeit (untere Asymptote).

Um fahrplanmäßig zu sein, müsste der ICE in Hamm also mit ca. 0,18 m/s² konstant auf 200km/h beschleunigen um dann vor Bielefeld mit 0,36 m/s² abzubremsen. Würde er konstant mit 0,3 m/s² beschleunigen und konstant mit 0,6 m/s² bremsen - was für die Fahrgäste eines ICE durchaus schon grenzwertig wäre, ließen sich gerade einmal 1,5 Minuten Fahrzeit „herausholen".
Diese Modellrechnung ist aber nicht sehr realistisch, da die Beschleunigungen bei höheren Geschwindigkeiten deutlich unter den Anfahrtsbeschleunigungen zurückbleiben, wie man in Abbildung 9 erkennt - und auch vom Autofahren in höheren Gängen weiß.

6 Resümee

Die Einführung zentraler Prüfungen hat neben guten auch Schattenseiten. In diesem Artikel wurde gezeigt, dass es einfach sein kann, den allgegenwärtigen eingekleideten Aufgaben, in denen es um das „Modellieren" geht, den Hauch des „Lächerlichen" zu nehmen. Dazu genügt häufig schon ein Aufgabenteil, in dem Stärken und Schwächen des zu betrachtenden Modells mit dem gesunden Menschenverstand diskutiert werden.

Mathematiklehrer sind nämlich in der glücklichen Lage, dass sie (im Gegensatz zu ihren Kollegen aus der Physik) meist keine Modelle an der Realität verifizieren müssen, es reicht, Ergebnisse verschiedene Modelle miteinander und mit der Realität zu vergleichen

> 1. Die Bearbeitung zusammenhangloser Testaufgaben, von denen jede in durchschnittlich fünf Minuten zu bewältigen ist, ist kein Abbild einer soliden mathematischen Tätigkeit. Die zur Auswertung benutzten Kompetenzmodelle sind inhaltsleer und behindern die Entwicklung des Unterrichts entlang schlüssiger Curricula. Tests gut bearbeiten zu können ist eine Sache, ein Fach zu verstehen und fachliches Wissen in sinnvollen Zusammenhängen, mit denen man sich vertraut gemacht hat, anzuwenden eine andere. Für andere Fächer, insbesondere Sprache, gilt sinngemäß das Gleiche.

Erich Ch. Wittmann Qualitätsabsenkung durch Qualitätssicherung
(GDM Mitteilungen Jan 2011)

Und wenn sein GPS-Handy als phantastisches „Alltags-Messgerät" für Bewegungsvorgänge z. B. im Bereich der Analysis (aber nicht nur dort) seine Wirkung entfalten kann, ist man der Aufmerksamkeit seiner Schüler sicher. Versprochen!

Anhang 1: S-Bahn statt ICE

Als Anregung für eigene Modellierungsaufgaben mit GPS-Daten kann folgende Aufgabe aus dem Kontext „lineare Funktionen" dienen, die aus der Zeit vor den zentralen Prüfungen stammt [6]. Die dort genannten Daten sind realistisch, sie halten einer Überprüfung sehr gut Stand, denn S-Bahnen beschleunigen und bremsen doppelt so stark wie ICEs. (Die in der Aufgabe genannten Steigungen entsprechen einer Startbeschleunigung von 1m/s² und einer Bremsbeschleunigung von b=1,11m/s²)

Wie eine Messung zwischen Köln-Industriepark und Köln-Ehrenfeld (Abb. 13) ergab, gibt es hier nach der Ausrollphase im Gegenwind noch eine Vorbremsphase, in der leicht angebremst wird, bevor die S-Bahn auf den Stillstand heruntergebremst wird.

2 Triebwagenzüge von U-Bahnen und S-Bahnen fahren besonders wirtschaftlich, wenn sie in einer Anfahrphase konstant beschleunigt werden, dann ausrollen und schließlich abgebremst werden. In diesem Fall kann die Geschwindigkeit v in Abhängigkeit von der Zeit t durch eine stückweise lineare Funktion beschrieben werden mit z. B.

$$v(t) = \begin{cases} 3{,}6\,t & \text{für } 0 \leqq t < 20 \quad \text{(Anfahrphase)} \\ -0{,}2\,(t-20)+72 & \text{für } 20 \leqq t < 30 \quad \text{(Ausrollphase)} \\ -4\,(t-30)+70 & \text{für } 30 \leqq t \quad \text{(Bremsphase)} \end{cases} \qquad \text{mit t in Sekunden und v in } \tfrac{\text{km}}{\text{h}}.$$

a) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $t \mapsto v(t)$. Lesen Sie ab, nach wie viel Sekunden der Zug wieder hält. Berechnen Sie den genauen Wert dieser Nullstelle.

b) Aufgrund einer Verspätung beschleunigt der Triebwagenführer 24,5 s lang und bremst dann sofort ab. Zeichnen Sie den Graphen der zugehörigen Zeit-Geschwindigkeits-Funktion. Lesen Sie ab, wie viel Sekunden der Zeitgewinn etwa beträgt. Versuchen Sie den zugehörigen Energiemehraufwand abzuschätzen.

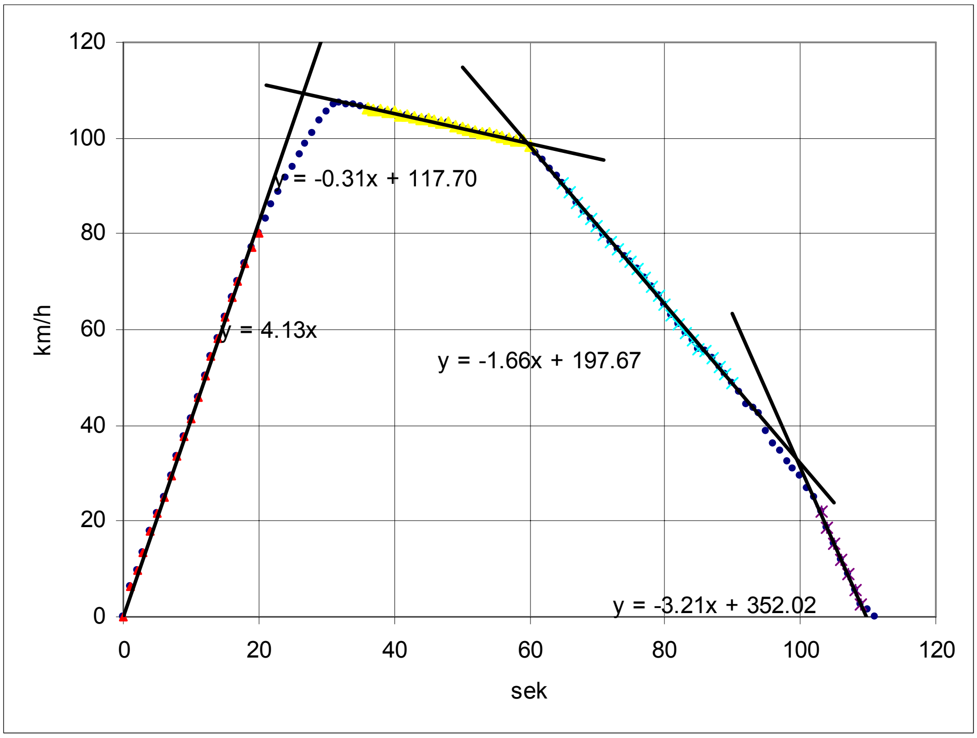
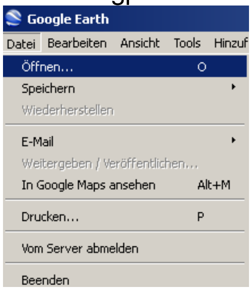


Abb. 13: Zeit-Geschwindigkeitsdiagramm einer S-Bahnfahrt zwischen Köln-Industriepark und Köln-Lövenich Die Startbeschleunigung ist 1.15m/s², gebremst wird mit 0,09m/s² (Ausrollen), 0,46 m/s² (Vorbremsung) und 0,89 m/s² (Schlussbremsung)

Anhang 2: Tipps zum Umgang mit Google-Earth“

Viele GPS - Empfänger (auch Smartphones mit einer entsprechenden App) speichern Tracks (Fahrspuren) im Sekundenabstand als gpx-Dateien ab, die man über ein USB-Kabel oder eine Bluetooth-Verbindung auf den Computer übertragen kann. Wenn man das Programm Google-Earth (Version 5.2 oder höher (www.earth.google.de/download-earth.html) installiert hat, kann man diese gpx-Dateien mit „Datei - Öffnen“ laden. Abb. 14)

Um auch gpx-Dateien zu sehen muss man beim Öffnen „alle Dateien“ wählen (Abb. 15)



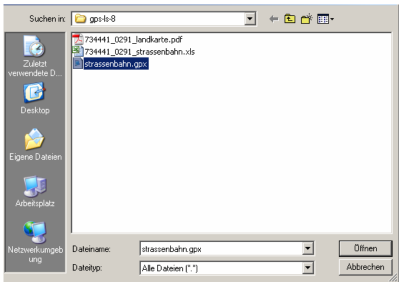


Abb. 14 Abb. 15

Wenn man dann die gewünschte gpx-Datei (etwa strassenbahn.gpx) anklickt öffnet Google-Earth das Fenster aus Abb. 16

Abb. 16

mit OK wird der gpx-Track in einen kml-Track umgewandelt und man erhält eine Google-Earth-Landkarte mit der Fahrspur, die man nach Klick auf den Schieberegler oben links auch animiert nachfahren kann - wie in einem Film.

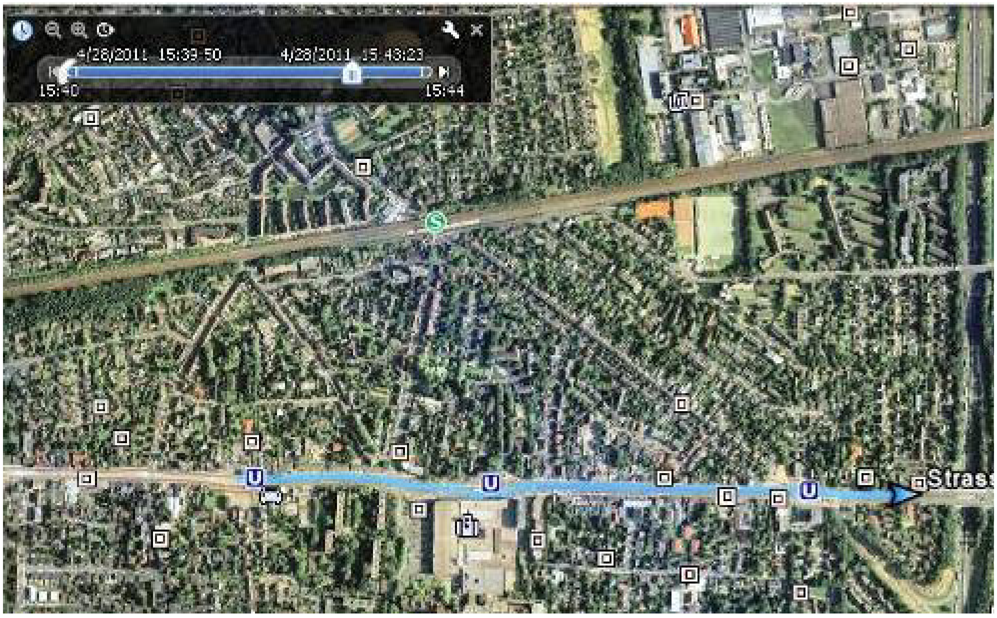


Abb. 17 Kartendarstellung

Wenn man mit der rechten Maustaste auf die Fahrspur klickt, wird auch ein Weg-Geschwindigkeitsdiagramm angezeigt wie in Abbildung 18 unten. Zusätzlich zur Landkartenansicht kann man sich die Staßenbahnfahrt, insbesondere einzelne Haltestellen, dann auch in Google-Streetview ansehen (Abb. 18).

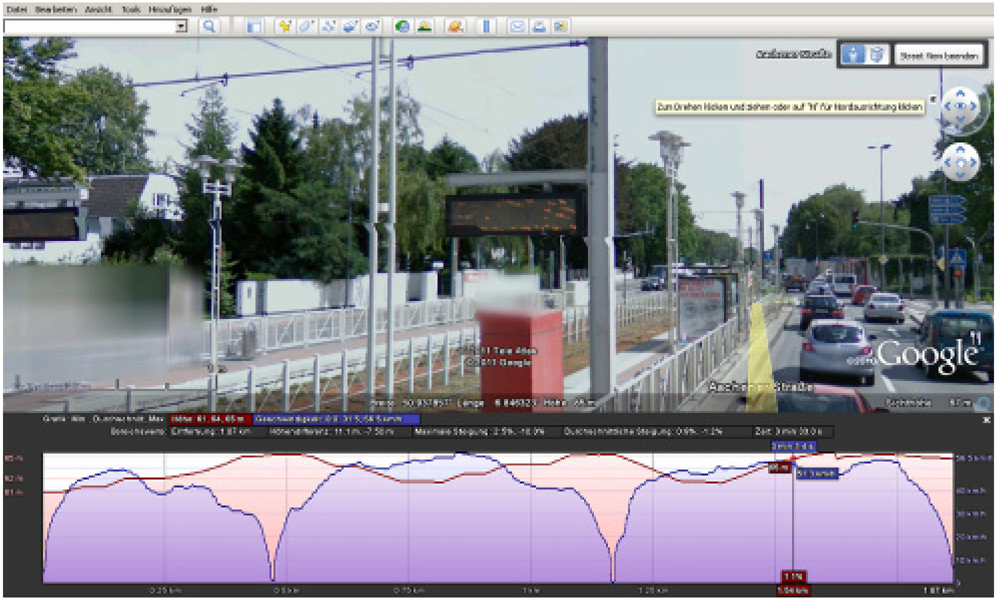


Abb. 18 Haltestelle Mohnweg in Google-Earth

Wie man aus den gpx-Tracks Zeit-Weg und Zeit-Geschwindigkeits-Diagramme erhält, wird in der Datei gps-info.pdf unter www.riemer-koeln.de erläutert. Dort liest man auch nach, wie man gpx-Dateien in Excel verarbeiten kann.

Literatur

[1] Strick, Heinz-Klaus: Finale. Westermann Verlag Braunschweig 2011. S.64,65
[2] Lambacher-Schweizer Einführungsphase (NRW) Klett 734401
auf www.klett.de den Online-Link 734401-2441 eingeben
[3] Lambacher-Schweizer Qualifikationsphase
auf www.klett.de den Online-Link 735301-3881eingenben
Hier findet man ein umfangreiches Stationenlernen zum Thema GPS, in dem alle Bereiche der Schulmathematik angesprochen werden.
[4] Riemer, Wolfgang: Dem Navi auf der Spur: MNU 62/8 (2009) S. 468-477.
[5] Riemer, Wolfgang: Bewegungen mit GPS untersuchen, Grundvorstellungen der Analysis „erfahren“: mathematik lehren 160 (Juni 2010) S. 54-58.
[6] Lambacher Schweizer 11. Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2004 S. 67,98.
[7] www.riemer-koeln.de: Hier findet man u. a. die Tracks und Excel-Dateien zu den hier untersuchten Bahnfahrten - und auch Tipps und technische Hilfen zum Umgang mit GPS.
[8] Haubrock, Daniel: GPS in der Analytischen Geometrie. In ISTRON 6 Franzbecker, Hildesheim 2000. (Prinzipielle Funktionsweise globaler Ortung)

Dr. Wolfgang Riemer
August-Bebel-Str. 80
50259 Pulheim
w.riemer@arcor.de
unterrichtet Mathematik und Informatik am Heinrich-Mann-Gymnasium
und ist Fach- und Hauptseminarleiter am Studienseminar Köln