

# Wie weit rollt dein Fahrrad? – Fragestellungen eines fächerübergreifenden Projekts zum mathematischen Modellieren und Experimentieren<sup>1</sup>

Verfasser: Dr. Wolfgang Riemer, Heinrich-Mann-Gymnasium, Fühlinger Weg 4, 50765 Köln

## 1 Start

Du stellst eine Pedale deines Rades nach oben, steigst auf und drückst die Pedale nur mit deinem Körpergewicht ganz nach unten. Gemessen wird die Rollweite, die du mit diesem »Schwung« aus einer halben Pedalumdrehung erreichst.

## 2 Fragestellungen

2.1 Rollen bei fester Übersetzung schwere oder leichte Versuchspersonen weiter – oder ist die Rollweite unabhängig vom Körpergewicht?

2.2 Sollte man in einem großen oder einem kleinen Gang anfahren, um möglichst weit zu rollen – oder ist die Rollweite unabhängig von der Übersetzung?

2.3 Lässt sich der Einfluss der Bereifung (eines Dynamos) auf die Rollweite experimentell nachweisen?

## 3 Experimentierhinweise:

- Die Rollstrecke muss absolut glatt und waagrecht sein.
- Es muss völlige Windstille herrschen (optimal ist eine Turnhalle oder ein langer Flur).
- Alle Versuchspersonen benutzen dasselbe Fahrrad.
- Der Rollvorgang darf nicht »künstlich« durch Lenkerbewegungen verlängert werden. Optimal ist ein Dreirad.

Beim Experimentieren notiert man die Länge  $d$  der Tretkurbel, den Radius  $r$  des Hinterrades, die Anzahl  $z$  der Zähne des Kettenblattes, die Anzahl  $z_r$  der Zähne des Rizels, das Gewicht  $m_{\text{Rad}}$  des Rades, das Gewicht  $m_{\text{Radler}}$  des Radlers und die Rollweite  $l$ .

### Auswertung

- mit beschreibender Statistik: Trage die Datenpaare ( $m_{\text{Radler}}$ ;  $l$ ) in ein Koordinatensystem. Hat die Punktwolke (bzw. die zugehörige Regressionsgerade) steigende oder fallende Tendenz?
- mit beurteilender Statistik: Berechne das mittlere Gewicht  $\mu$  der Radler und die mittlere Rollweite  $\lambda$ . Trage die Versuchsergebnisse in eine Vierfeldertafel nach folgendem Muster ein und prüfe mit dem Vierfeldertest, ob Gewicht und Rollweite unabhängig voneinander sind.

	Rollweite $\leq \lambda$	Rollweite $> \lambda$
Körpergewicht $\leq \mu$		
Körpergewicht $> \mu$		

## 4 Theorie: Energiebilanz

Da bei dem Versuch nur kleine Geschwindigkeiten auftreten, vernachlässigt man den Luftwiderstand. Das Rad wird nur durch den Rollwiderstand gebremst, der proportional zum Gesamtgewicht von Rad und Radler ist. Der Proportionalitätsfaktor  $c_r$  heißt Rollwiderstandsbeiwert. Er liegt je nach Reifen zwischen  $c_r = 0,3\%$  und  $c_r = 1,2\%$  des Gesamtgewichts. Beim Ausrollen wird die gesamte potentielle Energie des oben auf der Pedale stehenden Radlers

<sup>1</sup> Herrn Friedrich Becker gewidmet – anlässlich des Festvortrages zur Verleihung der MNU-Ehrenmitgliedschaft am 27. 11. 97 in Hamburg.

$E_{\text{pot}} = 2d \cdot m_{\text{Radler}} \cdot g$  in Rollarbeit  $W_{\text{roll}} = l \cdot c_r \cdot (m_{\text{Radler}} + m_{\text{Rad}})$  umgewandelt. Hierbei ist:  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$  die Erdbeschleunigung.

- Zeige durch Auflösen dieser Gleichung, dass für die Rollweite gilt:

$$l = \frac{2 \cdot d}{c_r} \cdot \frac{1}{1 + \frac{m_{\text{rad}}}{m_{\text{Radler}}}}$$

- Berechne für  $c_r = 0,01$  und  $m_{\text{Rad}} = 0$  (Vernachlässigung des Radgewichts) die Rollweiten von Radlern mit 40 kg, 80 kg, 120 kg!

- Berechne für  $c_r = 0,01$  und  $m_{\text{Rad}} = 20$  kg die Rollweiten von Radlern mit 40 kg, 80 kg, 120 kg!

- Zeichne (mit Computerhilfe) für  $c_r = 0,01$  die Rollweite  $l$  (Hochachse) in Abhängigkeit vom Körpergewicht  $m_{\text{Radler}}$  (Rechtsachse), wobei du die Masse  $m_{\text{Rad}} = 0$  kg; 10 kg; 20 kg, 30 kg, 40 kg als Parameter verwendest. Du erhältst eine interessante Funktionenschar. Interpretiere sie und beantworte die Fragen 2.1 und 2.2 auf der Grundlage dieser Energiebilanz.

### Lösungshinweise

Nur wenn man das Gewicht des Radlers vernachlässigt, hängt die Rollweite nicht vom Gewicht des Radlers ab. Ansonsten rollen schwere Personen etwas weiter (Abb. 1). Experimentell streuen die Rollweiten auch bei einer Person beträchtlich. In der Regel gelingt aber der statistische Nachweis »je schwerer desto weiter«.

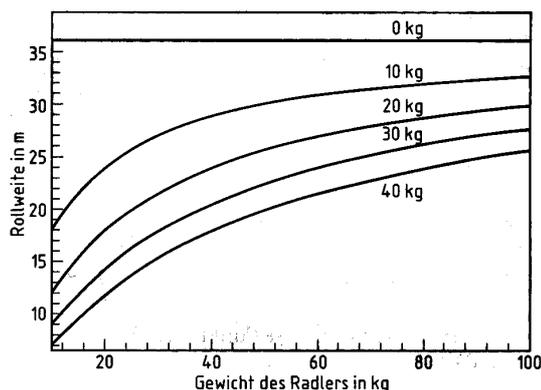


Abb. 1. Rollweite  $l$  in Abhängigkeit vom Gewicht  $m_{\text{Radler}}$  des Radlers für  $m_{\text{Rad}} = 0$  kg; 10 kg; 20 kg; 30 kg; 40 kg ( $c_r = 0,01$ ).

Aus dem Energiebilanz-Modell ergibt sich, dass die Rollweite nicht von der verwendeten Übersetzung abhängen sollte. In der Praxis rollt man aber im 21ten Gang weiter (bessere Energieübertragung beim Aufsteigen). Die Einflüsse von Reifenprofil und Dynamo sind experimentell gut nachweisbar. □

# Ausrollen eines Fahrrades – detaillierte Modellbildung mit Computeralgebra

Verfasser: Dr. Wolfgang Riemer, Heinrich-Mann-Gymnasium, Fühlinger Weg 4, 50765 Köln

## PROBLEMSTELLUNG (vgl. [1])

Du stellst die Pedale deines Rades nach oben, steigst auf, holst (nur durch dein Gewicht) mit einer halben Pedalumdrehung Schwung. Abstoßen vom Boden ist nicht erlaubt. Anschließend lässt du das Rad ausrollen. Wie sehen Geschwindigkeitsverlauf und Rollzeit in Abhängigkeit von Körpergewicht und Übersetzung aus?

Wir untersuchen einen »Modellradler« auf dem Tourenrad »Expedition« der Firma GIANT.

## TECHNISCHE DATEN:

Tretkurbelradius  $d = 0,18$  m; Radius des Laufrades  $r = 0,337$  m. Die Anzahl  $zk$  der Zähne an den Kettenblättern beträgt 48, 38, 28, die Anzahl  $zr$  der Zähne am Ritzel beträgt 32, 28, 24, 21, 18, 16, 14. Gewicht des Rades (mit Ausstattung) 15 kg. Gewicht des Modellradlers 75 kg. Der Rollwiderstand beträgt  $c_r = 1\%$  des Gewichts von Rad und Fahrer, bei  $m = 90$  kg wird das Rad also durch  $c_r \cdot m \cdot g \approx 8,8$  N Rollwiderstand gebremst.  $g = 9,81$  m/s<sup>2</sup> ist die Erdbeschleunigung.

## 1 Antriebskraft

Wenn sich die Tretkurbel im oberen »toten Punkt« befindet, kann man nicht starten. Dazu muss die Antriebskraft den Rollwiderstand übersteigen. Der benötigte Antrittswinkel  $\alpha$  bzw. die zugehörige Wegvorgabe  $s_0$ , um die man das Rad vorschleichen muss, nimmt – wie jeder Radler weiß – mit wachsender Übersetzung zu.

Die durch das Gewicht des Radlers auf das Hinterrad wirkende Antriebskraft  $A(x)$  ist in Abhängigkeit vom zurückgelegten Weg  $x$

$$A(x) = \frac{d}{r} \cdot \frac{zr}{zk} \cdot m_{\text{Radler}} \cdot g \cdot \sin\left(\frac{zr}{zk} \cdot \frac{x}{r}\right), \quad 0 \leq x \leq \pi \cdot r \cdot \frac{zk}{zr}$$

1.1 Interpretation: Prüfe (z. B. durch Einsetzen von Zahlen), ob diese Formel deine Vorstellungen über die Antriebskraft korrekt widerspiegelt, wenn man

- die Zahl  $zk$  der Zähne am Kettenblatt vergrößert,
- die Zahl  $zr$  der Zähne am Ritzel vergrößert,
- das Gewicht  $m$  des Radlers vergrößert.

\* Leite die Formel physikalisch her.

1.2 Um welche Wegvorgabe  $s_0$  muss der Modellradler das Rad im ersten Gang ( $zk = 28$ ,  $zr = 32$ ) und im 21ten Gang ( $zk = 48$ ,  $zr = 14$ ) nach vorne schieben, bis die Antriebskraft den Rollwiderstand übertrifft? Wie groß ist jeweils der Antrittswinkel  $\alpha$ ?

1.3 Nach welcher Strecke  $x$  ist die Antriebskraft maximal (erstmal null), wenn man im ersten bzw. im 21ten Gang anfährt, wie groß ist die maximale Antriebskraft in diesen beiden Gängen?

1.4 Zeichne für  $x > 0$  die auf das Rad wirkende Summe  $F(x) = A(x) - c_r \cdot (m_{\text{Radler}} + m_{\text{Rad}}) \cdot g$  aus Antriebs- und Rollwiderstandskraft für den Modellradler im ersten und im 21ten Gang.

## 2 Geschwindigkeit

Berechne für den Modellradler die kinetische Energie

$$E(x) = \int_{s_0}^x F(z) dz$$

und zeichne den Geschwindigkeitsverlauf

$$v(x) = \sqrt{\frac{2 \cdot E(x)}{m_{\text{Radler}} + m_{\text{Rad}}}}$$

- bei variierendem Gewicht  $m_{\text{Radler}} = 40$  kg; 75 kg; 110 kg in einem mittleren Gang ( $zk = 38$ ,  $zr = 21$ )
- bei festem Gewicht  $m_{\text{Radler}} = 75$  kg im ersten und im 21ten Gang. Interpretiere die entstehenden Funktionenscharen.

## 3\* Rollzeit

Berechne für den ersten und den 21ten Gang die Rollweite  $l$  aus der Gleichheit von

Startenergie  $m_{\text{Radler}} \cdot (1 + \cos \alpha) \cdot g$  und

Rollarbeit  $c_r \cdot (m_{\text{Rad}} + m_{\text{Radler}}) \cdot g$  (vgl. [1]).

- Zeichne für den Modellradler (in den genannten Gängen) den Kehrwert der Geschwindigkeitsfunktion mit Polstellen an den Rändern  $s_0$ ;  $s_0 + l$  und begründe:

$$t = \int_{s_0}^{s_0+l} \frac{1}{v(x)} dx \text{ ist die Rollzeit.}$$

- Berechne die Rollzeiten im ersten und im 21ten Gang. Man kann uneigentliche Integrale umgehen, indem man das Rollintervall beidseitig um 1 mm verkleinert.

## Einige Lösungsskizzen

zu 1.2: erster Gang:  $s_0 = 0,058$  cm;  $\alpha = 1,13^\circ$ , 21ter Gang:  $s_0 = 8,9$  cm,  $\alpha = 4,42^\circ$ .

zu 2:

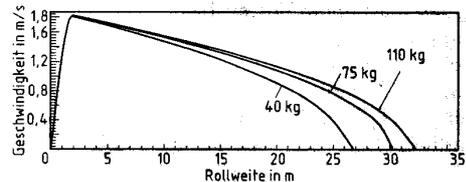


Abb. 1. Geschwindigkeit für  $m_{\text{Radler}} = 40$  kg; 75 kg; 110 kg bei Übersetzung  $zk = 38$ ,  $zr = 21$

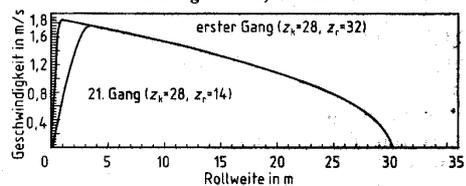


Abb. 2. Geschwindigkeit für  $m_{\text{Radler}} = 75$  kg im ersten und im 21ten Gang

zu 3: erster Gang:  $l = 29,997$  m,  $t = 32,5$  s, 21ter Gang:  $l = 29,995$  m,  $t = 40,2$  s.

[1] W. RIEMER: Wie weit rollt dein Fahrrad. – Werkstattblatt MNU 51 (1998) 426. □