

Radeln mit dem Computer im Rucksack

Ein fächerübergreifendes Projekt für die Klassenstufen 9 und 10¹

Verfasser: StD Dr. Wolfgang Riemer, August-Bebel-Straße 80, 50259 Puhlheim-Brauweiler

Besonders spannend wird Informatik-Unterricht dann, wenn reale Daten verarbeitet werden, die von uns selber stammen. Im folgenden wird ein fächerübergreifendes Projekt skizziert, in dem Mathematik, Physik und Informatik zusammenspielen.

1 Wie die Idee zu diesem Projekt entstand

Modellbildung, Anwendungsorientierung, Schülerorientierung, Computereinsatz, fächerübergreifender Projektunterricht, dynamische Systeme: Man hört und liest viel allgemeines über diese Schlagworte. Aber wie füllt man sie mit Inhalt so, daß der Unterricht läuft, ohne Schüler zu unter- oder zu überfordern? Sind Ampelsteuerung, Logo-Igel und Geometrieprogramme schon deswegen fächerübergreifend, weil man auf dem Computer arbeitet? Wo bleiben bei Wachstumsprozessen, bei den gängigen Modellen zur Populationsdynamik, die realen Experimente? Modellbildung lebt doch aus dem Kontrast zwischen Modell und erlebter Realität, aus dem Wechselspiel von Prognose und Beobachtung. Braucht man nicht, um wirklich überzeugen zu können, eigene Daten? Daten, die Schüler selbst beobachten und erheben? Werden nicht chaotische Systeme erst für den zu einem »Erlebnis«, der sie im Kontrast zu deterministischen Systemen sieht?

Bei der Suche nach einem überzeugenden Thema für einen Mittelstufen-Kurs mit Variationsmöglichkeiten und Aufgabenmaterial für Klassenarbeiten stieß ich auf das Fahrrad. Luftwiderstand, Rollwiderstand, Windschnittigkeit (c_w -Wert), das sind höchst interessante Dinge der Alltagswirklichkeit. Ihre Auswirkungen lassen sich nach dem morgendlichen Schulweg am naßgeschwitzten Rücken »erfühlen«.

Ein ausrollendes Fahrrad ist ein dynamisches System mit etlichen Parametern. Modellrechnungen fallen in Hülle und Fülle an, und wir bleiben nicht im Modell stecken. Zu diesem dynamischen System lassen sich Daten erheben, indem man den Magnetkontakt eines Fahrrad-Tachos (ohne Elektronik) mit einer Schnittstelle des Computers verbindet und die Zeiten

der einzelnen Radumdrehungen mißt. Aus dem Vergleich von Modell und Realität läßt sich u. a. der c_w -Wert eines Radlers (auch ohne Windkanal) bestimmen. Man kann studieren, welchen Einfluß ein Regencape auf den Luftwiderstand oder ein Fahrraddynamo auf den Rollwiderstand hat. Auch verkehrsplanerisch interessante Fragen werden zugänglich. Wieviel Prozent der erbrachten Leistung wird bei Stadtfahrten durch Bremsvorgänge an Ampeln, Einmüdungen und durch aussteigende Autofahrer verloren, wenn Radwege zwischen Parkstreifen und Bürgersteig angelegt sind? »Nur wenn Mathematik im Ich-Zentrum verankert ist und auf diese Weise auch alle jene prägt, die sich nicht einem mathematisch-naturwissenschaftlichen Studium zuwenden, erfüllt sie den Anspruch der Allgemeinbildung« [1]. Das gilt mit Sicherheit nicht nur für die Mathematik.

2 Physikalische Grundbegriffe, Einstieg in die Tabellenkalkulation

In der Regel sind die Begriffe Arbeit, Energie, Leistung Unterrichtsgegenstände der Klassen 9 und 10. Wir rekapitulieren (oder erarbeiten) sie durch ein bekanntes Experiment: Jeder Schüler (warum nicht auch der Lehrer?) rennt so schnell wie möglich eine Treppe mit gegebenem Höhenunterschied s hinauf. Aus der gestoppten Zeit t und dem Körpergewicht F werden Arbeit W und Leistung P berechnet. Die Formeln $W = F \cdot s$ (Arbeit = Kraft mal Weg), $P = W/t = F \cdot v$ (Leistung = Arbeit durch Zeit = Kraft mal Geschwindigkeit) gewinnen durch das eigene Experiment eine sehr persönliche Bedeutung. Wenn man einen zweiten Durchgang anschließt, in dem sich Pärchen »huckepack« die Treppe hinaufschleppen, wird man sich auch noch nach Jahren an dieses Experiment erinnern. Die Auswertung für die gesamte Lerngruppe verknüpfen wir mit einer Einführung in die Tabellenkalkulation, einem Standard-Thema der Mittelstufen-Informatik. Hier zwei Ergebnisse:

a) In der Regel sind schwere Menschen im physikalischen Sinne leistungsfähiger (Abb. 1). Sie haben

¹ Mit dem Schuljahr 1993/94 wurde in Nordrhein-Westfalen der Wahlpflichtbereich der Gymnasien neu strukturiert. Jeder Schüler besucht einen dreistündigen Kurs (versetzungswirksam, drei Klassenarbeiten im Halbjahr), der fächerübergreifend unterrichtet werden soll. Es gibt bisher noch nicht viele geschlossene und vom Anspruchsniveau überzeugende Kurskonzepte. Vermutlich liegt noch viel curriculare Arbeit vor uns. Die folgende Unterrichtssequenz könnte ein Baustein sein, der auch in anderen Bundesländern auf Interesse stößt.

stärkere Beinmuskulatur und benötigen beim Steigen nicht mehr Zeit als leichte Personen.

- b) Wenn man die Treppen mit einem Partner huckepack steigt, ist die Leistung i. a. etwas geringer als beim Steigen ohne Partner (Abb. 2). Wegen der Gleichgewichtsprobleme muß man vorsichtiger laufen und »verschenkt« dadurch Zeit.

3 Mathematik beschreibt Modelle von der Wirklichkeit

Welche Leistung im physikalischen Sinne hat OLIVER heute vollbracht, als er die 2,1 km von Köln-Pesch zur Schule in Köln-Weiler in 4 Minuten 15 Sekunden bewältigte? Keine! Denn der Kölner Norden ist flach, Weiler und Esch liegen auf gleicher Höhe. Bei Berechnung der Arbeit $W = F \cdot s$ stehen zurückgelegter Weg s und Gewichtskraft F senkrecht zueinander. Der in Richtung Gewichtskraft F zurückgelegte Weg s ist 0. Das kann doch nicht sein.

In gängigen Fahrradzeitschriften, etwa [2] oder einem Fahrradbuch [3], finden wir Formeln, die unser Problem mit Mitteln der Mittelstufenalgebra lösen.

$$F_{\text{Antrieb}} = F_{\text{Roll}} + F_{\text{Luft}}$$

$$F_{\text{Roll}} = c_r \cdot m \cdot g \text{ mit}$$

c_r Rollwiderstandsbeiwert, dimensionslos – gibt an, wieviel Prozent der Gewichtskraft als Rollwiderstand wirken,

m Masse des Fahrzeuges mit Fahrer in kg,
 $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, Erdbeschleunigung.

$$F_{\text{Luft}} = \rho \cdot c_w \cdot A \cdot v^2 / 2 \text{ mit}$$

A Stirnfläche in m^2 ,

c_w Luftwiderstandsbeiwert, dimensionlos – gibt an, wieviel Prozent der Stirnfläche A für den Luftwiderstand wirksam sind; $c_w A$ bezeichnet man als effektive Stirnfläche,

v Geschwindigkeit in m/s ,

ρ Luftdichte = $1,2 \text{ kg/m}^3$ (vgl. auch Anhang 3)

Typische Werte zeigt Tabelle 1 (vgl. [2] bis [5]):

Natürlich versteht man diese Formeln nicht auf Anhieb, aber es ist leicht, ihre Bedeutung mit Taschenrechner und Tabellenkalkulation zu erarbeiten.

Rollwiderstand: OLIVER wiegt mit seinem Mountain Bike $m = 80 \text{ kg}$, das entspricht $F = m \cdot g = 785 \text{ N}$. Er fährt Shimano Deore LX Ausstattung mit Präzisionslagern und gut aufgepumpten Profilreifen. Für den Rollwiderstandsbeiwert veranschlagen wir daher 0,004. Dieser Wert liegt zwischen 0,003 (Rennrad) und 0,007 (Hollandrad): 4 Promille seiner Gewichtskraft ($F_{\text{Roll}} = 0,004 \cdot 785 \text{ N} = 3,14 \text{ N}$) muß Oliver für das Rollen seines Rades aufbringen, also etwa so viel, wie drei Tafeln Schokolade wiegen. Über $s = 2100 \text{ m}$ ergibt das die Arbeit

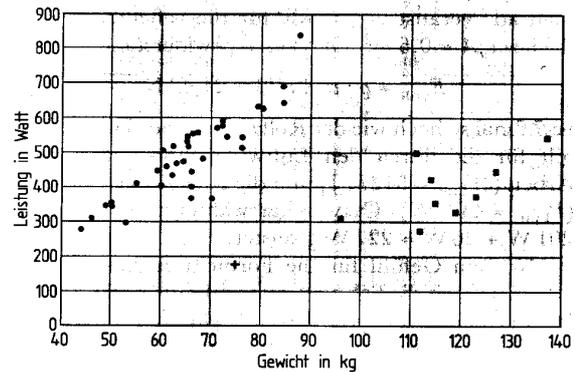


Abb. 1. Körpergewicht und Leistung beim Treppensteigen: Einzellauf (●); je schwerer, desto größer ist die Leistung, Huckepack mit Partner auf dem Rücken (■); Schüler mit Knieverletzung (+)

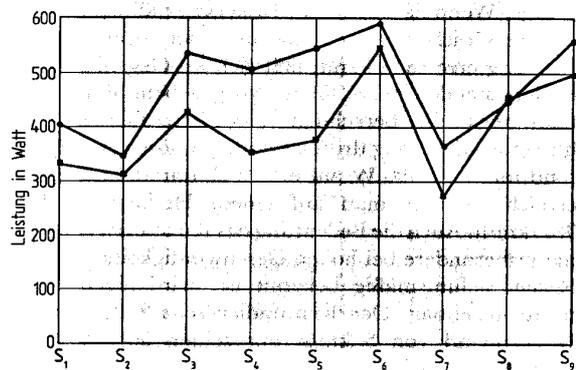


Abb. 2. Leistung beim Treppensteigen alleine (●) und mit Partner (■)

	$c_w A$ in m^2	c_r	m in kg
Hollandrad	0,60	0,007	90
Rennrad	0,39	0,003	80
verkleidetes Rennrad	0,31	0,003	80
Gold-Rush, Rekordfahrzeug	0,31	0,005	85

Tab. 1. Effektive Stirnfläche, Rollwiderstandsbeiwert und Masse bei verschiedenen Fahrradtypen

$$W_{\text{Roll}} = F_{\text{Roll}} \cdot s = 3,14 \text{ N} \cdot 2100 \text{ m} = 6594 \text{ Joule}$$

und die Roll-Leistung

$$P_{\text{Roll}} = W_{\text{Roll}} / t = 6594 \text{ J} / 255 \text{ s} = 25,86 \text{ W.}$$

Luftwiderstand: OLIVERS Geschwindigkeit beträgt $2100 \text{ m} / 255 \text{ s} = 8,24 \text{ m/s}$ (= $29,6 \text{ km/h}$). Da ein Mountain Bike nicht windschnittiger ist als ein Hol-

landrad, veranschlagen wir für die »effektive Stirnfläche« $c_w A = 0,6 \text{ m}^2$. OLIVERS Luftwiderstandskraft

$$F_{\text{Luft}} = \rho \cdot c_w A v^2 / 2 = 24,42 \text{ N}$$

ist 7,7mal so hoch wie der Rollwiderstand. Das gleiche gilt für die durch den Luftwiderstand verursachte Arbeit ($W_{\text{Luft}} = 51271 \text{ J}$) und die zugehörige Leistung ($P_{\text{Luft}} = 201 \text{ W}$). OLIVER hat während der Fahrtzeit $201 \text{ W} + 26 \text{ W} = 227 \text{ W}$ geleistet.

Um ein Gefühl für die Formeln zu bekommen, tabellieren wir die Fahrwiderstandskräfte und Leistungen in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit (Abb. 3, Abb. 4). Die zugehörigen Parabeln zweiten und dritten Grades machen Aussagen über Dinge, die jeder beim Radeln am eigenen Leib spürt. Ja, die Entdeckung, was das »hoch zwei« beim Luftwiderstand wirklich bedeutet, war für OLIVER wie eine Offenbarung. »Doppelte Geschwindigkeit: vierfache Kraft, achtfache Leistung«. Wenn das nicht zu Muskelkater führt . . .

Die Geschwindigkeit, die man bei vorgegebener Leistung erreichen kann, läßt sich im Gegensatz zur entsprechenden Frage für die vorgegebene Kraft nur näherungsweise berechnen (graphisch ablesen), da hier eine Gleichung dritten Grades zu lösen ist. Während man mit 500 W auf einem Rennrad $45,4 \text{ km/h}$ erreicht, schafft man auf einem Hollandrad nur $38,3 \text{ km/h}$. Auch die Bedeutung des Rückenwindes, die insbesondere bei hohen Geschwindigkeiten jedem Radler gefühlsmäßig bekannt ist, wird algebraisch nachvollziehbar. Der Rennradler schafft bei einem Rückenwind von 5 km/h mit seinen 500 W statt $45,4 \text{ km/h}$ jetzt $50,4 \text{ km/h}$. Ohne Rückenwind müßte er für diese höhere Geschwindigkeit 675 W aufbringen, er bekommt also 175 W »geschenkt«. Radelt er mit 50 W ($19,5 \text{ km/h}$), bringt der Rückenwind (mit der erhöhten Geschwindigkeit $24,5 \text{ km/h}$) dagegen nur eine Leistungseinsparung von 40 W .

4 Ausrollversuch - Modellrechnungen

Wir betrachten nun unser Fahrrad als »dynamisches System« mit der Zustandsgröße v . Der Luftwiderstand und damit die Bremsverzögerung, also die Änderung von v , hängt von v ab. Es liegt Rückkopplung vor. Wie weit rollt ein Rennradler ($c_r = 0,003$, $c_w A = 0,39 \text{ m}^2$, $m = 80 \text{ kg}$), wenn er nach Erreichen der Geschwindigkeit $v = 36 \text{ km/h}$ (10 m/s) aufhört zu treten? Wie lange braucht er dafür? Welchen Einfluß haben Gegenwind, Rückenwind, c_w - und c_r -Werte auf die Ausrollstrecke und die Ausrollzeit? Solche spannenden - weil experimentell überprüfbar - Fragen könnte man ohne Tabellenkalkulation auf der Schule nicht untersuchen. (Man vergleiche die analytische Lösung der zugehörigen Riccati-Differentialgleichung in Anhang 2.) Wir erarbeiten ein »diskretes Modell« des Ausrollvorganges, indem wir die Ausrollzeit in ganze Sekunden unterteilen.

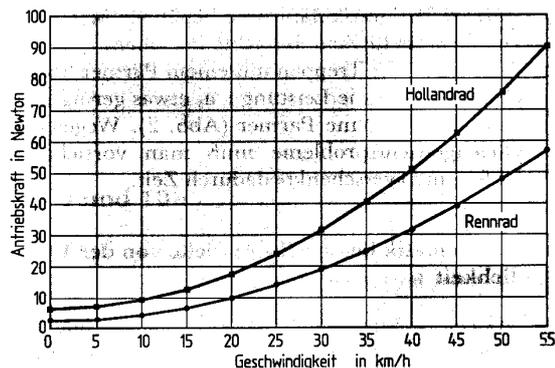


Abb. 3. Erforderliche Antriebskraft in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit

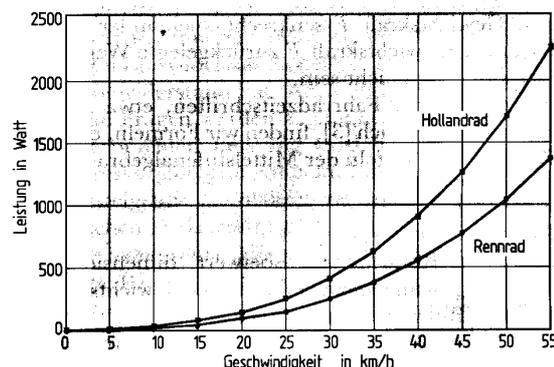


Abb. 4. Erforderliche Antriebsleistung in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit

- In der ersten Sekunde schafft der Radler die Strecke $s = v \cdot t = 10 \text{ m/s} \cdot 1 \text{ s} = 10 \text{ m}$.
- Die Bremskraft, die auf ihn wirkt, ist $F_{\text{Roll}} = 0,003 \cdot 80 \cdot 9,81 \text{ N} = 2,35 \text{ N}$ und $F_{\text{Luft}} = 1,2 \cdot 0,39/2 \cdot 10^2 \text{ N} = 23,4 \text{ N}$.
- Die Bremskraft bewirkt die Verzögerung $a = F/m = (F_{\text{Roll}} + F_{\text{Luft}})/m = 25,75 \text{ N}/80 \text{ kg} = 0,32 \text{ m/s}^2$. Die Geschwindigkeit nimmt also in der ersten Sekunde um $0,32 \text{ m/s}$ ab. Sie beträgt dann nur noch $9,68 \text{ m/s}$. Diese Geschwindigkeit ist die Ausgangsgröße für den nächsten Rechenschritt. Tabelle 2 zeigt Anfang und Ende des zugehörigen Kalkulationsschemas. Nach 135 s kommt der Radler zum Stillstand, er hat dann ca. 408 m zurückgelegt. Die Abweichungen zwischen exakter Modellrechnung (Differentialgleichung) und diskreter Näherungslösung sind nebenbei bemerkt praktisch bedeutungslos. Abbildung 5 veranschaulicht die Rollweite in Abhängigkeit von der Startgeschwindigkeit für verschiedenen $c_w A$ - und c_r -Werte.

Wind einfluß: Wenn beim Ausrollen Gegenwind (Rückenwind) herrscht, erhält man den Luftwider-

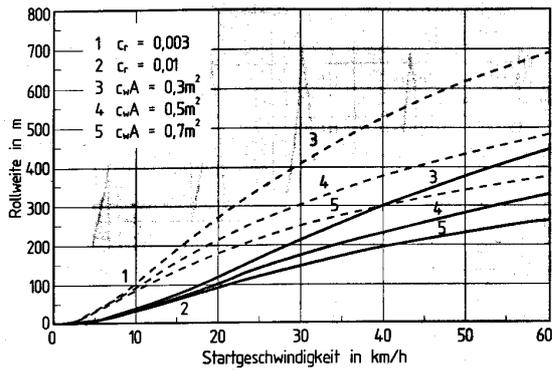


Abb. 5. Modellrechnung zum Ausrollen eines Rades: Rollweite in Abhängigkeit von der Startgeschwindigkeit für verschiedenen $c_w A$ - und c_r -Werte für $m = 80 \text{ kg}$

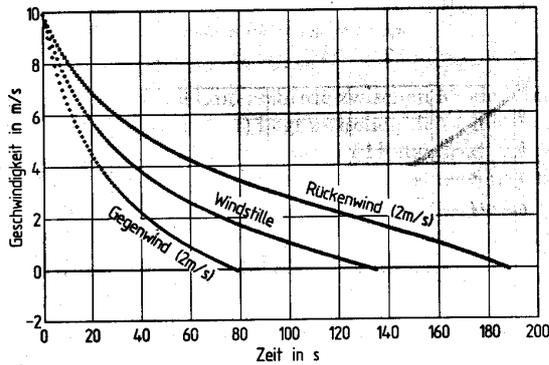


Abb. 6. Modellrechnung zum Ausrollen eines Rennrades ($c_w A = 0,39 \text{ m}^2$ und $c_r = 0,003$, $m = 80 \text{ kg}$): Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm bei Windstille, Rück- und Gegenwind

stand, indem man die Windgeschwindigkeit zur momentanen Rollgeschwindigkeit addiert (subtrahiert). Für den ersten Rechenschritt erhält man beispielsweise

- bei Gegenwind mit 2 m/s : $F_{\text{Luft}} = 1,2 \cdot 0,39/2 \cdot 12^2 \text{ N} = 33,70 \text{ N}$ und nach einer Sekunde $v = 9,55 \text{ m/s}$,
- bei Rückenwind mit 2 m/s : $F_{\text{Luft}} = 1,2 \cdot 0,39/2 \cdot 8^2 \text{ N} = 14,98 \text{ N}$ und nach einer Sekunde $v = 9,78 \text{ m/s}$.

Bei Gegenwind (2 m/s) kommt der Radler nun schon nach 79 s (274 m) zur Ruhe, bei entsprechendem Rückenwind erst nach 188 s (661 m). Abbildung 6 zeigt die Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der Fahrzeit bei Gegenwind, Windstille und Rückenwind im Vergleich.

5 Bestimmung von Roll- und Luftwiderstand

5.1 Experiment

Bisher haben wir ausschließlich im mathematischen Modell gearbeitet und die Angaben über c_r und

no.	A	B	C	D	E	F	G
1	Ausrollen eines Rades - Modellrechnung						
2							
3		0,39	80	0,003		2,35	1,00
4		$c_w A$	m	c_r		F_{roll}	dt
5		m^2	kg			N	s
6							
7	ti	v	v	s	$F_1 + F_2$	a	dv
8	s	km/h	m/s	m	N	m/s^2	m/s
9	0	36,00	10,00	10,00	25,75	0,32	0,32
10	1	34,84	9,68	19,68	24,27	0,30	0,30
11	2	33,75	9,37	29,05	22,92	0,29	0,29
12	3	32,72	9,09	38,14	21,68	0,27	0,27
13	4	31,74	8,82	46,96	20,55	0,26	0,26
14	5	30,82	8,56	55,52	19,50	0,24	0,24
15	6	29,94	8,32	63,83	18,54	0,23	0,23
16	7	29,11	8,08	71,92	17,65	0,22	0,22
17	8	28,31	7,86	79,78	16,83	0,21	0,21
18	9	27,55	7,65	87,44	16,06	0,20	0,20
19	10	26,83	7,45	94,89	15,35	0,19	0,19
132	123	1,28	0,35	405,97	2,38	0,03	0,03
133	124	1,17	0,32	406,30	2,38	0,03	0,03
134	125	1,06	0,29	406,59	2,37	0,03	0,03
135	126	0,95	0,27	406,86	2,37	0,03	0,03
136	127	0,85	0,24	407,09	2,37	0,03	0,03
137	128	0,74	0,21	407,30	2,36	0,03	0,03
138	129	0,64	0,18	407,47	2,36	0,03	0,03
139	130	0,53	0,15	407,62	2,36	0,03	0,03
140	131	0,42	0,12	407,74	2,36	0,03	0,03
141	132	0,32	0,09	407,83	2,36	0,03	0,03
142	133	0,21	0,06	407,88	2,36	0,03	0,03
143	134	0,10	0,03	407,91	2,35	0,03	0,03
144	135	0,00	0,00	407,91	2,35	0,03	0,03

Tab. 2. Modellrechnung zum Ausrollen eines Rennrades ($c_w A = 0,39 \text{ m}^2$, $c_r = 0,003$, $m = 80 \text{ kg}$); Ausrollzeit 135 m , Ausrollweg $\approx 408 \text{ m}$

$c_w A$ der Literatur entnommen. Nun wird es spannend: Wir suchen eine absolut ebene Teststrecke. Es soll windstill sein. Ein »Testpilot« beschleunigt auf maximale Geschwindigkeit und läßt dann sein Rad auslaufen. Der Computer speichert die Zeitpunkte, zu denen der Speichen-Magnet den Sensor eines Fahrrad-Tachos passiert (Anhang 1). Um eventuelle Einflüsse

von Wind und Straßenneigung erkennbar zu machen, wird der Versuch in umgekehrter Richtung wiederholt. Wir werten die Meßdaten mit Tabellenkalkulation aus. Drei aufeinanderfolgende Zeitpunkte t_0 , t_1 , t_2 , die zwei Radumdrehungen »begrenzen«, liefern die momentane Geschwindigkeit nach der Formel

$$v(t_1) = \frac{2 \cdot \text{Radumfang}}{t_2 - t_0}$$

Abbildung 7 zeigt das Geschwindigkeit-Zeit-Protokoll eines Versuchs mit 4 Ausrollphasen (»hin-zurück-hin-zurück«). Der Versuch (»hin-zurück«) wurde wiederholt, wobei der Radler ein geschlossenes Regencap trug. Abbildung 8 zeigt die insgesamt sechs Geschwindigkeit-Weg-Diagramme im Vergleich bei gleicher Anfangsgeschwindigkeit. Der Einfluß des Capes (höherer Luftwiderstand) ist erkennbar.

5.2 Vergleich von Modell und Realität

Wir ergänzen die gemessenen Geschwindigkeiten durch die Modellrechnung aus Abschnitt 4. Die gemessene Startgeschwindigkeit ist gleichzeitig Ausgangswert für die Modellrechnung. Die »Systemparameter« c_r und $c_w A$ variieren wir so lange, bis die v - t -Kurven von Messung und Modellrechnung »optimal« zusammenpassen. Als Maß für die Abweichung zwischen den Kurven dient die Summe der quadrierten Differenzen von gemessenen und berechneten Geschwindigkeiten. Um die Güte der Anpassung für verschiedene Meßreihen mit unterschiedlich vielen Geschwindigkeiten miteinander vergleichen zu können, teilen wir noch durch die Anzahl n der Meßwerte.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (v(\text{mess})_i - v(\text{modell})_i)^2}{n}}$$

Für die Anpassung im Bereich niedriger Geschwindigkeiten ist c_r verantwortlich, da hier der Luftwiderstand keine Rolle spielt. Für die Anpassung im Bereich hoher Geschwindigkeiten ist dagegen $c_w A$ verantwortlich, da dort die Rollreibung nur eine untergeordnete Rolle spielt. Abbildung 9 zeigt den Geschwindigkeitsverlauf des ersten Ausrollversuchs (gemessene Rollweite 278 m) im Vergleich mit drei Modellrechnungen:

- $c_w A = 0,39 \text{ m}^2$, $c_r = 0,003$
(Literaturangabe Rennrad):
 $\sigma = 1,048$, Rollweite: 303 m,
- $c_w A = 0,60 \text{ m}^2$, $c_r = 0,007$
(Literaturangabe Hollandrad):
 $\sigma = 0,455$, Rollweite: 251 m,
- $c_w A = 0,48 \text{ m}^2$, $c_r = 0,007$ (optimale Anpassung):
 $\sigma = 0,066$, Rollweite: 280 m.

Tatsächlich wurden die Messungen an einem hochwertigen Reiserad (»Giant-Expedition«) mit Rennlenker durchgeführt. Der »gemessene« $c_w A$ -Wert $0,48 \text{ m}^2$

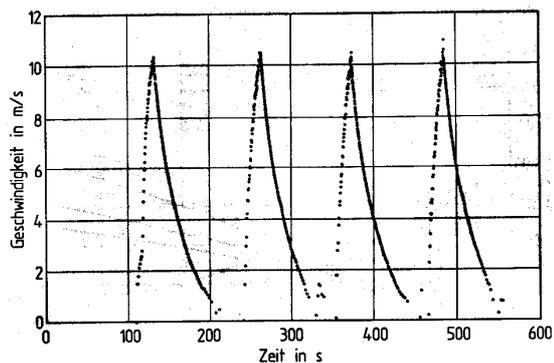


Abb. 7. Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm zu vier Ausrollversuchen

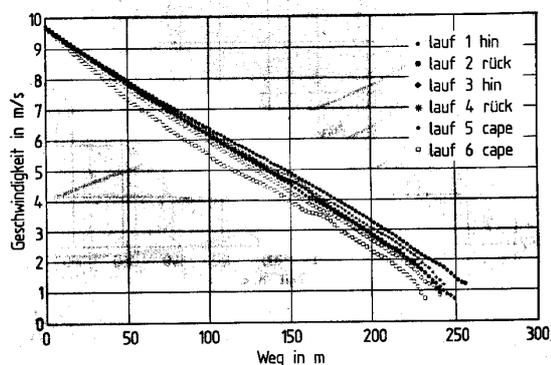


Abb. 8. Geschwindigkeit-Weg-Diagramm zu sechs Ausrollversuchen im Vergleich

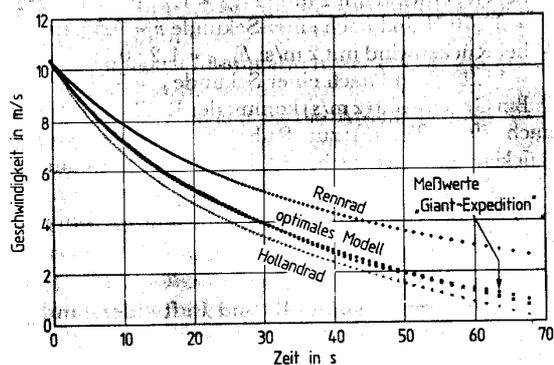


Abb. 9. Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm zum Ausrollversuch aus Abb. 8 (Lauf 1): Meßwerte im Vergleich mit drei Modellrechnungen

	$c_w A$ in m^2	c_r	σ in m/s
Lauf 1 (hin)	0,48	0,007	0,046
Lauf 2 (zurück)	0,49	0,008	0,035
Lauf 3 (hin)	0,54	0,007	0,055
Lauf 4 (zurück)	0,46	0,008	0,102
Mittelwert	0,49	0,0075	
Lauf 5 (Cape, hin)	0,57	0,008	0,029
Lauf 6 (Cape, zurück)	0,67	0,006	0,079
Mittelwert	0,62	0,007	

Tab. 3. Reiserad »Giant-Expedition«: $c_w A$ - und c_r -Werte in sechs Ausrollversuchen ohne/mit Cape

(der Wert, der die Unterschiede zwischen Modell und Wirklichkeit minimiert) liegt zwischen den Literaturangaben für ein Rennrad und ein Hollandrad. Er ist realistisch, denn der Fahrer fuhr in aufrechter Sitzposition mit den Händen an den Bremsgriffen. Auch der »gemessene« c_r -Wert 0,007 ist realistisch (grobe Profilbereifung, nicht sehr hart aufgepumpt).

Einen Eindruck von der Meßgenauigkeit vermittelt ein Vergleich aller sechs Läufe (Tab. 3).

Mit Regencape hat man bei gleicher Sitzposition einen um ca. 25% höheren Luftwiderstand. Durch Auszählen eines Frontfotos (Abb. 10) mit Hilfe von Millimeterpapier ergab sich eine Stirnfläche $A = 0,52 m^2$ und daraus $c_w = 0,94$ (ohne Cape) und $c_w = 1,19$ (mit Cape). Fahrradcapes sind regelrechte »Windfänger«. Zum Vergleich: der windschnittige Mazda »Xedos 9« kommt auf $c_w = 0,28$. In [4] findet man folgende Angaben: BMX Geländerad: $c_w = 1,1$; Tourenrad, Fahrer mit gestreckten Armen: $c_w = 1,0$; Rennrad; Fahrer in Rennposition: $c_w = 0,88$; Liegerad: $c_w = 0,77$; Vector-Einer (Rekordfahrzeug); $c_w = 0,11$.

Anmerkung 1: Wir haben Ausrollversuche auch bei Wind durchgeführt. In der Modellrechnung hat man dann neben $c_w A$ und c_r einen weiteren Parameter, die Windgeschwindigkeit, zu berücksichtigen. Die Suche nach der optimalen Anpassung zwischen Versuch und Modell durch Probieren ist dann etwas zeitaufwendiger (Gruppenarbeit). Man kann natürlich eigene Programme oder Tools zur automatischen Minimierung wie etwa den Solver von Excel einsetzen. Die Ergebnisse sind ebenso realistisch wie die bei Windstille. Ist der Wind böig, so schlägt sich das in höheren σ -Werten nieder.

Anmerkung 2: Wer das Thema weiter vertiefen möchte (innere Differenzierung, Ergänzungsprojekt – statt einer Klassenarbeit), kann Beschleunigungsvor-

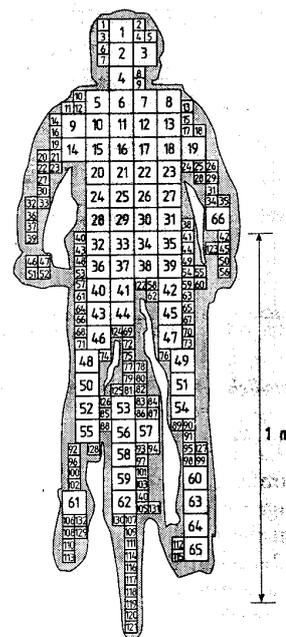


Abb. 10. Frontfoto eines Schülers auf einem Mountain-Bike

gänge mit konstanter Antriebskraft diskret simulieren und mit Meßprotokollen vergleichen. Sind die Zeitpunkte des Hochschaltens der Gangschaltung erkennbar? Wie gut stimmen Modellrechnung und Wirklichkeit überein, wenn man eine Rampe mit konstanter Neigung (etwa einer Abraumhalde) hinunterrollt? Auch ein Vergleich des Geschwindigkeit-Anstieges mit dem logistischen Wachstum kann spannend sein. Das logistische Wachstum ist ein in Computerkursen beliebtes Thema.

6 Energiebilanz

Wieviel Energie geht beim Radfahren in der Praxis durch Rollwiderstand, Luftwiderstand und Bremsen verloren? Auch diese recht brisante Frage können wir mit Tabellenkalkulation beantworten. Abbildung 11 zeigt das Geschwindigkeit-Weg-Diagramm eines 400-m-Rennens (Hollandrad) auf einem Sportplatz, bei dem nach der zweiten (kleineren) Geraden ein Sandhaufen das direkte »Durchstarten« verhinderte. In Abbildung 12 wurde ein 12-km-Amateur-Rennen (6 Geraden zu 2 km mit engen Wendekurven) protokolliert.

Aus der Geschwindigkeit berechnen wir neben dem Luftwiderstand auch die Beschleunigung a , die Beschleunigungskraft ($F = ma$) und die Antriebskraft $F_{\text{Antrieb}} = F_{\text{Luft}} + F_{\text{Roll}} + F_{\text{Beschleunigung}}$. Dort, wo die Antriebskraft null wird, läßt man auslaufen, wo sie negativ ist, wird gebremst.

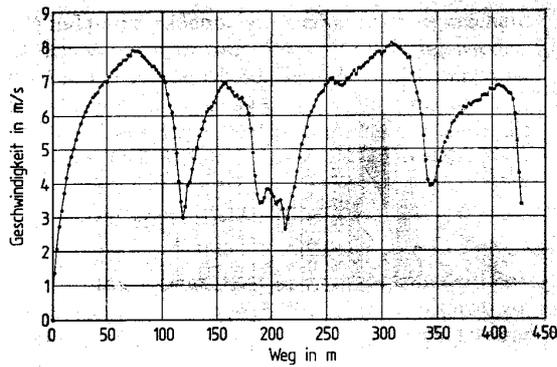


Abb. 11. Geschwindigkeit-Weg-Protokoll eines 400-m-Rennens mit einem Hollandrad

Wir multiplizieren die einzelnen Kräfte zeilenweise mit dem Radumfang, summieren die Ergebnisse und erhalten die zugehörigen Arbeiten. Geometrisch handelt es sich um die Flächen zwischen Wegachse und dem Graphen der Kraft-Weg-Funktion (Abb. 13). Für die Bremsarbeit werden nur die negativen Teile der Antriebskraft berücksichtigt.

Um verschiedene Fahrten unterschiedlicher Zeitdauer miteinander vergleichen zu können, teilen wir die Arbeit durch die benötigte Gesamtzeit und erhalten die Durchschnittsleistungen. Bei unserem 400-m-Hollandrad-Rennen wurden 84 W für Überwindung des Luftwiderstandes, 34 W für Überwindung des Rollwiderstandes und 62 W an Bremsleistung erbracht (zusammen 180 W). Hätte man die 400 m in der gleichen Gesamtzeit mit konstanter Geschwindigkeit fahren können, dann hätte man nur 100 W aufbringen müssen. Durch den höheren Luftwiderstand bei größeren Geschwindigkeiten und das starke Abbremsen in den Kurven benötigte man also 80% mehr Leistung. Entsprechende Angaben für andere Probefahrten entnimmt man der Tabelle 4.

Der Radweg der Dürener Straße in Köln (letzte Spalte) ist für Großstadtverhältnisse typisch. Er wurde mit hohem finanziellem Aufwand zwischen Parkstreifen und Bürgersteig gebaut, ist aber häufig teilweise zugeparkt. Oft muß man wegen ein- und aussteigender Autofahrer, wegen Einmündungen und Ampeln abbremsen. Die letzte Spalte der Tabelle zeigt, wieviel Energie dadurch verlorengeht. Wo bleibt die »Grüne Welle« für Radler?

Anmerkung: Das Projekt »Fahrrad« wurde in einem zweistündigen Kurs der Klassenstufe 10 und einem dreistündigen Kurs der Klassenstufe 9 bearbeitet. Da der sichere Umgang mit Tabellenkalkulation viel Übung erfordert und auch das Arbeiten mit Papier und Bleistift einen hohen Stellenwert hatte, war ein Halbjahr »gut gefüllt«. Durch den häufigen Wechsel von Theorie zu Arbeit am Computer und praktischem Experiment ließ die Motivation bis zur letzten Stunde

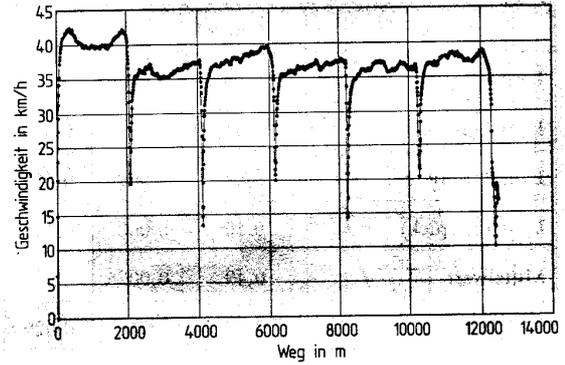


Abb. 12. Geschwindigkeit-Weg-Protokoll eines 12-km-Rennens (6 x 2 km) mit einem Profi-Rennrad

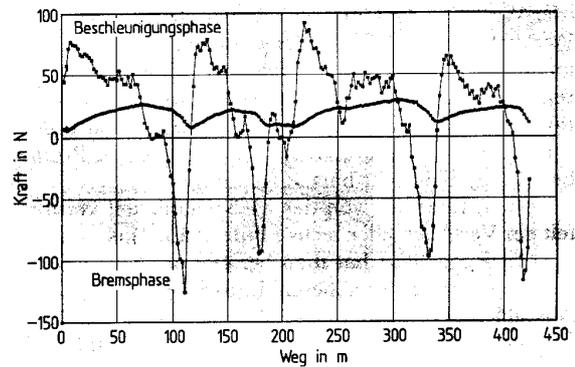


Abb. 13. Antriebskraft (■) und Fahrwiderstand (●) zum 400-m-Rennen aus Abbildung 11

	Hollandrad 400 m Zeitfahren Abb. 11, 13	Profi Rennrad 12 km Zeitfahren Abb. 12	Hollandrad 12 km Land- straßen im Berufs- verkehr	Sportrad Einkaufs- straße mit Radweg
Luftwiderstand	84 W	253 W	110 W	100 W
Rollwiderstand	34 W	25 W	36 W	22 W
Bremsverlust	62 W	9 W	3 W	67 W
Summe	180 W	287 W	149 W	122 W
Mittelwert v	19,9 km/h	35,6 km/h	21,1 km/h	19,7 km/h
bei konst. v	100 W	264 W	116 W	98 W
	+80%	+8,7%	+28%	+24,5%

Tab. 4. Leistungsbilanz bei verschiedenen Testfahrten

nicht nach. Entscheidend sind aber die eigenen Daten. Das Programm zur Meßwerterfassung (Anhang 1) wurde in einem Informatik-Kurs erarbeitet und hier als Fertigprodukt eingesetzt.²

Anhang 1: Meßvorrichtung

Versuchsanordnung (Abb. 14): Wir »zapfen« einen Fahrrad-Tacho »an«. Normalerweise liegen zwischen den beiden Leitungen, die vom Tachometer zum Sensor führen, 1,2 V. Wenn der Speichen-Magnet den Sensor passiert, schließt ein Schalter (»Reed-Kontakt«), und die Spannung wird zu OV. Die Zeitpunkte, zu denen sich der Kontakt schließt, werden durch einen Computer im Rucksack gemessen und als Textfile gespeichert. Die OV-Leitung des Fahrrad-Tachos kann man mit Pin 16 (GND), die 1,2 V-Leitung mit Pin 13 (SLCT) der Druckerschnittstelle verbinden. Den Zustand des Fahrrad-Tachos kann man dann in Bit 4 des Statusregisters abfragen (Adresse 889, dezimal). Näheres in [7, S. 15] oder [8, S. 117]. Zur Zeitmessung benutzt man eine Zählschleife, die durch Vergleich mit einer Stoppuhr normiert wird. Die »DOS-Zeit« ist zu ungenau, da die »DOS-Uhr« nur ca. 25 mal in der Sekunde »tickt«. Wer nicht selber programmieren möchte, kann ein Programm zur Aufzeichnung von Radfahrten beim Autor gegen einen frankierten Rückumschlag, eine formatierte MS-DOS Diskette und 20 DM in Briefmarken anfordern. In diesem Programm wird der Timerbaustein, der den Prozessortakt steuert, als präzise Zeitbasis benutzt.

Anhang 2: Differentialgleichung

Die beschleunigte Bewegung mit konstanter Antriebskraft wird beschrieben durch die Ricatti-Differentialgleichung

$$mv' = c_2 - c_1 v^2 \quad \text{mit } c_2 = F_{\text{Antrieb}} - F_{\text{Roll}} \text{ und } c_1 = 0,5 \cdot \rho_{\text{Luft}} \cdot c_w \cdot A.$$

(Beim Ausrollen gilt $F_{\text{Antrieb}} = 0$.) Wir lösen sie durch »Trennung der Variablen« und schreiben

$$v/(c_1 v^2 - c_2) = -1/m.$$

Wenn $G(x)$ eine Stammfunktion von $1/(c_1 x^2 - c_2)$ ist [6, S. 299, No. 40], dann folgt durch Integration $G(v(t)) = -t/m + c$. Diese Gleichung löst man nach v auf, und man erhält

a) die beschleunigte Bewegung, falls die konstante Antriebskraft die Rollreibung übersteigt ($c_2 > 0$):

$$v(t) = \sqrt{\frac{c_2}{c_1}} \cdot \frac{1 - k \cdot \exp\left(\frac{-2\sqrt{c_1 c_2}}{m} t\right)}{1 + k \cdot \exp\left(\frac{-2\sqrt{c_1 c_2}}{m} t\right)}$$

mit $k = 1$ für $v(0) = 0$ (Beschleunigung aus dem Stand) und

$$\text{Grenzgeschwindigkeit } v(\infty) = \sqrt{\frac{c_2}{c_1}},$$

² Ich danke Herrn Dipl.-Ing. SALINGRÉ, Herrn BUCHERT und Herrn Prof. Dr. SCHÖNDORF (FH Köln) für Literaturhinweise und manch anregendes Gespräch zum Thema »Fahrrad«.

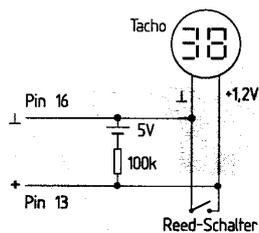


Abb. 14. Meßvorrichtung. (Bei manchen Rechnern muß man eine Batterie (5 V) und einen Widerstand (100 k) zuschalten.)

b) eine gebremste Bewegung, falls die konstante Antriebskraft kleiner als die Rollreibung ist ($c_2 < 0$):

$$v(t) = -\sqrt{\frac{c_2}{c_1}} \cdot \tan\left(\frac{\sqrt{c_1 c_2}}{m} t - k\right)$$

$$\text{mit } k = \arctan\left(\sqrt{\frac{c_1}{c_2}} \cdot v(0)\right), \text{ Ausrollzeit } t = k \cdot \frac{m}{\sqrt{c_1 c_2}},$$

$$\text{Ausrollweg } s = \frac{-m \cdot \ln(\cos k)}{c_1}.$$

Anhang 3: Luftwiderstandsformel

Die Luftwiderstandskraft beschleunigt die vom Radler verdrängte Luft. Wenn der Radler die Querschnittsfläche A hat und die Strecke s fährt, beschleunigt er das Luftvolumen $s \cdot A$, also die Masse $m = \rho \cdot s \cdot A$ auf seine Fahrgeschwindigkeit v . Die kinetische Energie der Luft ist $E = 0,5 m v^2 = 0,5 \rho \cdot s \cdot A \cdot v^2$. Sie gleicht der Luftwiderstandsarbeit $W = F_{\text{Luft}} \cdot s$. Aus $W = E$ ergibt sich die Luftwiderstandsformel $F_{\text{Luft}} = 0,5 \cdot \rho \cdot A \cdot v^2$, wobei der Faktor c_w zur Berücksichtigung der Windschnittigkeit zu ergänzen ist.

Literatur

- [1] P. GALLIN - U. RUF: Sprache und Mathematik in der Schule - Beiträge zum Mathematikunterricht 26 (1992) 167-174.
- [2] tour 9/93 20-26.
- [3] M. GRESSMANN: Fahrradphysik und Biomechanik. - Kiel: Moby Dick 1990.
- [4] A. C. GROSS - C. R. KYLE - D. J. MALEWICKI: Die Aerodynamik von Muskelkraft-Fahrzeugen - Spektrum der Wissenschaft 2/84 (74-77).
- [5] Aerodynamik des Fahrrades Schriftenreihe der FH Köln 1 (1983).
- [6] I. BRONSTEIN - K. SEMENDJAJEW: Taschenbuch der Mathematik. - Leipzig: Teubner 1969.
- [7] H. SCHMIDT - W. WEBER: Messen und Experimentieren mit dem PC. - Bonn: Dummler 1990.
- [8] J. BURKERT (Hg.) Informatik heute Band 2. - Hannover: Schrödel/Schöning 1988. □