

Fächerverbindende Experimente für die Jahrgangsstufe 11 – Teil 1

Verfasser: Dr. Wolfgang Riemer und Jochen Konietzko, Heinrich-Mann-Gymnasium, Fühlinger Weg 4, 50765 Köln

Lineare und quadratische Funktionen gehören zu den Grundbausteinen der Analysis, Bewegungsvorgänge stehen am Anfang der Oberstufenphysik. Mit nicht ganz alltäglichen Experimenten sollen beide Gebiete miteinander so verkoppelt werden, dass der Modellcharakter von Mathematik deutlich wird.

1 Leitlinien

Natürlich lässt sich Mathematikunterricht innermathematisch begründen und gleichermaßen anspruchsvoll wie motivierend gestalten. Aber Mathematik ist mehr, sie ist *auch* eine »formale Sprache«, um Wirklichkeit zu beschreiben und Vorhersagen zu machen. Wer diesen Modellbildungsaspekt ausklammert, wird aus Schülersicht keine wirklich befriedigende Antwort auf die Frage nach dem »Wozu« geben können.

Wer andererseits Modellbildung ernst nimmt, muss auch Experimente im Mathematikunterricht zulassen. Dabei sind »Alltagsexperimente« motivierender als »Laborexperimente« (wie Kondensatorentladung und Ausdehnung einer Schraubenfeder). Modelle, die Vorhersagen gestatten, sind spannender als solche, die nur beschreiben.

Hier soll über Experimente berichtet werden, die wir mit Schülerinnen und Schülern in der Jahrgangsstufe 11.1 durchgeführt haben, die gleichzeitig Grundkurse in Mathematik und Physik belegt hatten.

Aus dem Blickwinkel der Mathematik handelt es sich um bescheidene Kleinprojekte, innerhalb derer man die Themen »Geraden, Parabeln, Steigung, Ableitung« in konkret erlebbarem Kontext so unterrichten kann, dass sie in »subjektiven Erfahrungsbereichen« verankert werden.

Aus dem Blickwinkel der Physik werden die Standard-Themen gleichmäßige, gleichmäßig beschleunigte, quadratisch beschleunigte und ungleichmäßig beschleunigte Bewegung beleuchtet.

Es handelt sich um Bausteine eines Unterrichtsgangs, den die Idee der optimalen Approximation (Ausgleichsrechnung) wie ein roter Faden durchzieht. Man kann aber auch einzelne Experimente herausgreifen und beispielsweise den Scheitelpunkt von Parabeln mit dem Thema Ausgleichsgeraden koppeln. Oder man nutzt Fehlerbetrachtungen bei Begegnungsproblemen zum Einstieg in das Thema »Gebrochen rationale Funktionen«.

Wer in seinem Unterricht mit Computeralgebra oder Tabellenkalkulation experimentieren möchte, findet bei der Auswertung realer Daten, wie sie hier anfallen, lohnende Themen.

Wir halten als Leitlinien fest:

- Unterricht wird belebt durch *Experimente*, die *echte* Fragen beantworten.
- Vor Durchführung der Experimente sollten *Erwartungen* formuliert werden (emotionale persönliche Bindung an das Problem).
- Man sollte Annahmen (*Hypothesen*) formulieren und auf ihnen aufbauend *Prognosen* über erwartete Versuchsausgänge wagen.
- Erst nach Abschluss der »Theoriebildung« sollten die Prognosen mit den Versuchsergebnissen verglichen werden.

Ursprünglich wurden diese Leitlinien für den Stochastikunterricht [6] entworfen. Der Leser wird erkennen, wie sie auch diesen Unterrichtsgang strukturieren.

2 Tachogenerator – Fahrraddynamo

Man schraubt neben einem Fahrrad – Dynamo auch einen kleinen Gleichspannungsmotor als Tachogenerator an die Hinterradgabel eines Fahrrades. Der Motor¹ wird durch einen über die Nabe geführten Haushaltsgummiring (Abb. 1) angetrieben. Ein handelsüblicher Magnet-Tacho zeigt die Geschwindigkeit des Hinterrades. Das Rad wird im Klassenraum aufgehängt oder auf den Kopf gestellt und mit der Tretkurbel auf Höchstgeschwindigkeit beschleunigt. Problemlos erreicht man 90 km/h. Daran erinnern sich Schülerinnen und Schüler auch noch nach dem Abitur. Während des Auslaufens filmt man gleichzeitig die Messwerte zur Geschwindigkeit sowie zur Dynamo- und Tachogenerator-Spannung. Die Aufzeichnungen werden später über Standbilder ausgewertet. (Wenn die Schule keine Videokamera hat, sind Schülerinnen

¹ Der Tachogenerator 57943 der Firma LEYBOLD für ca. 120,- DM hat sich bestens bewährt.

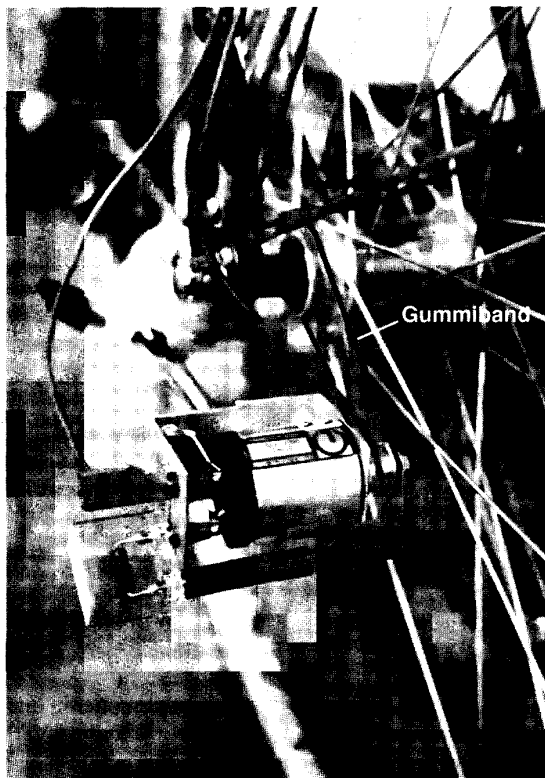


Abb. 1. Gleichspannungs-Tachogenerator am Hinterrad.

und Schüler in der Regel stolz, mit ihren Geräten aus-
helfen zu können.)

2.1 Hypothese

Wenn man vor Auswertung der Video-Aufzeichnungen über den erwarteten Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit v und Dynamo- bzw. Tachospannung U spekuliert, wird kaum jemand an der Proportionalität $U = k \cdot v$ zweifeln. Wenigen Video-Standbildern entnimmt man den Zusammenhang aus Tabelle 1.

Dass ein Walzendynamo (Firma UNION, No:8601) bei 75 km/h eine Spannung von 50 Volt liefert, hätte

v in km/h	U_T in V =	U_D in V \approx
$x_1 = 75$	$y_1 = 3,49$	$y_1 = 50,03$
$x_2 = 52$	$y_2 = 2,43$	$y_2 = 42,11$
$x_3 = 3$	$y_3 = 0,19$	$y_3 = 3,04$
$x_4 = 0$	$y_4 = 0$	$y_4 = 0$

Tab. 1. Spannung eines Tachogenerators U_T und eines Walzendynamos U_D in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit v .

niemand erwartet. Die v - U -Messpunkte liegen nicht genau auf einer Geraden. Ja, die Videoaufnahme zeigt, dass das prinzipiell unmöglich ist, weil die Messwerte nicht einmal funktional voneinander abhängen: Wegen der unterschiedlichen und nicht synchronisierten Wandlungszeiten der digitalen Messgeräte gehören nämlich zu einer »Tacho-Geschwindigkeit« oft mehrere Spannungsangaben. Die Frage nach der Ursprungsgeraden, um die die Messwerte möglichst wenig streuen, ist deswegen um so interessanter.

2.2 Schätzungen

Zu den drei Daten für die Dynamospannung wurden nach Augenmaß »passende« Geraden gezeichnet, sie hatten folgende Gleichungen:

$$\text{TOM: } y = 0,7x$$

$$\text{MICHAEL: } y = 0,72x$$

$$\text{VERENA: } y = 0,75x.$$

Durch die Verknüpfung von Namen mit den Schätzungen wird eine persönliche Beziehung zum Problem hergestellt und Spannung erzeugt. Man ist damit einverstanden, die Güte der Schätzung durch die Summe der Abweichungsquadrate $d(m) = \sum_{i=1}^4 (mx_i - y_i)^2$ zu bewerten. Das ergibt:

$$\text{für TOM: } d(0,7) = 39,589$$

$$\text{für MICHAEL: } d(0,72) = 38,344,$$

$$\text{für VERENA: } d(0,75) = 48,985,$$

MICHAELS Schätzung ist von den dreien die beste.

Gibt es noch bessere Schätzungen? Im Unterricht wird man probieren. Mit Tabellenkalkulation ist das ein Vergnügen, das zudem die funktionale Abhängigkeit der Abweichungsquadrate d von der Steigung m sinnfällig macht und das Problemverständnis sicherstellt.

2.3 Theorie

Man verwendet für die Steigung den Platzhalter m und erhält

$$\begin{aligned} d(m) &= (m \cdot 75 - 50,03)^2 + (m \cdot 52 - 42,11)^2 + (m \cdot 3 - 3,04)^2 \\ &\quad + (m \cdot 0 - 0)^2 = (75^2 + 52^2 + 3^2 + 0^2)m^2 \\ &\quad - 2 \cdot (50,03 \cdot 75 + 42,11 \cdot 52 + 3,04 \cdot 3 + 0 \cdot 0) \cdot m \\ &\quad + (50,03^2 + 42,11^2 + 3,04^2) \\ &\approx 8338(m - 0,7137)^2 + 38,0165. \end{aligned}$$

Allgemeiner gilt:

$$\begin{aligned} d(m) &= a \cdot m^2 + 2bm + c^2 \\ &= a(m - b/a)^2 + c - b^2/a, \end{aligned}$$

wobei folgende Abkürzungen verwendet werden:

$$a = \sum x_i^2 \approx 8338,0; b = \sum x_i y_i \approx 5951,09; c = \sum y_i^2 \approx 4285,49.$$

$m \rightarrow d(m)$ ist also eine Parabel (Abb. 2) mit Scheitelpunkt

$$\left(\frac{\sum_i y_i x_i}{\sum_i x_i^2}; \sum_i y_i^2 - \frac{(\sum_i y_i x_i)^2}{\sum_i x_i^2} \right) = (0,7137; 38,017).$$

Die optimale Ausgleichsgerade hat folglich beim Walzendynamo die Gleichung $y = 0,7137x$, die Abweichung beträgt $d = 38,017$. Beim Tachogenerator ergibt sich die Gleichung $y = 0,0466x$ mit $d = 0,0002589$.

Die Interpretation von Abbildung 2 ist für Schülerinnen und Schüler anspruchsvoll. Dass die Rechtswerte bei einer Parabel die Bedeutung von Steigungen haben, die Hochwerte inhaltlich Abweichungsquadrate darstellen, ist ungewöhnlich, aber spannend, da das Ergebnis die Antwort auf eine Frage liefert, mit der sich der Kurs vorher schätzend und spekulierend auseinandergesetzt hatte. Man hält fest:

Satz: Die Steigung der Ursprungs-Ausgleichsgeraden durch die »Punktwolke« (x_i, y_i) ist

$$\frac{\sum_i y_i x_i}{\sum_i x_i^2}. \quad (1)$$

Lässt man die Bedingung einer Ursprungsgeraden fallen, so ist es plausibel, dass die Ausgleichsgerade statt durch den Ursprung durch den Schwerpunkt (\bar{x}, \bar{y}) der »Punktwolke« verläuft. (1) liefert dann für die Steigung

$$m = \frac{\sum_i (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}. \quad (2)$$

Taschenrechner beherrschen nur die Formel (2) für die allgemeine Ausgleichsgerade. Eine für den Unterricht geeignete elementare Herleitung zu 2 (ohne Differentialrechnung) findet man in [1]. Die ebenso wichtige Formel (1) wird in der Literatur nicht explizit erwähnt.

2.4 Exkurs

In vektorieller Sprechweise wird in (1) der Spannungsvektor $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$ auf den von $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ aufgespannten eindimensionalen Raum projiziert:

$\vec{y}' = m\vec{x}$ mit $m = \frac{\langle \vec{y} | \vec{x} \rangle}{\langle \vec{x} | \vec{x} \rangle}$ hat von \vec{y} minimalen Abstand.

Bei (2) projiziert man $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$ auf den von $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ und $\vec{e} = (1, \dots, 1)$ aufgespannten zweidimensionalen Raum: $\vec{y}' = m\vec{x} + \bar{y}\vec{e}$ hat von \vec{y} minimalen Abstand. Aber diesen Hintergrund wird man erst im Rahmen der linearen Algebra thematisieren (vgl. [2]).

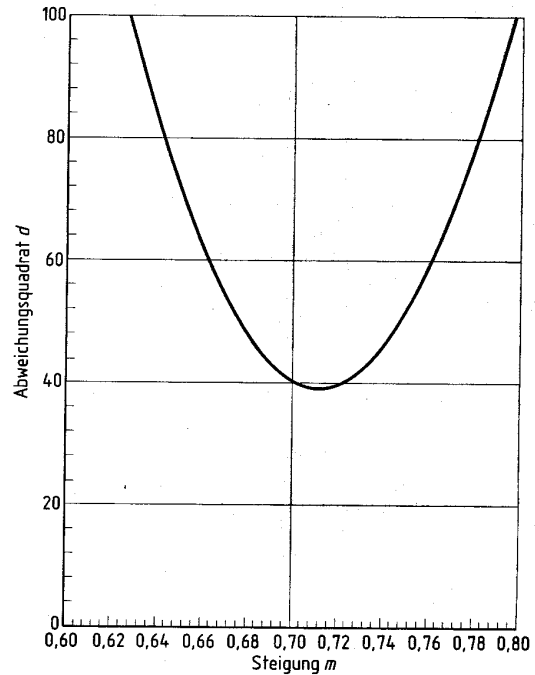


Abb. 2. Abweichungsquadrate d in Abhängigkeit von der Steigung m der Ausgleichsgeraden.

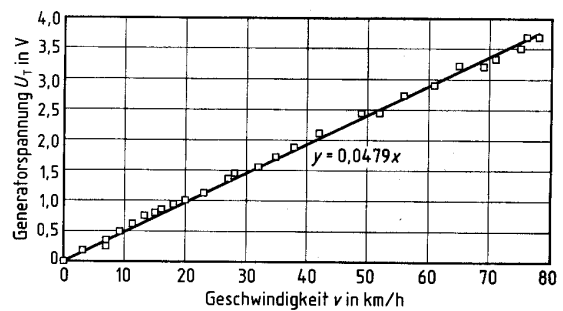


Abb. 3. Spannung eines Tachogenerators in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit.

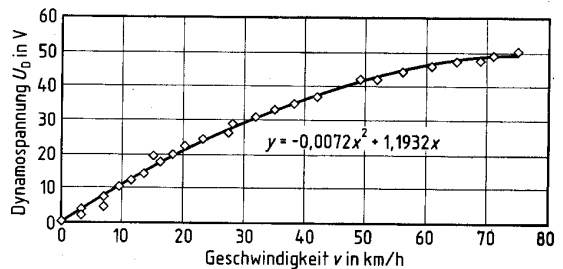


Abb. 4. Dynamospännung in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit.

Datenpunkte		Ausgleichsparabel	Prognose für Scheitelpunkt	
unter 30 km/h	(15)	$y = -0,005182x + 1,1645x$	112,35 km/h	65,42 V
unter 40 km/h	(18)	$y = -0,007644x + 1,2105x$	79,18 km/h	47,93 V
unter 50 km/h	(20)	$y = -0,007239x + 1,1986x$	82,78 km/h	49,61 V
alle Daten bis 75 km/h	(27)	$y = -0,007185x + 1,1932x$	83,04 km/h	49,54 V

Tab. 2. Prognose: Wann bringt eine Erhöhung der Geschwindigkeit x (km/h) keinen Zuwachs der Dynamospannung y (Volt) mehr?

2.5 Bewertung

Um den Spannungsbogen nicht vorzeitig zu unterbrechen, empfiehlt es sich, die gesamte Videoaufzeichnung erst *nach* Erarbeitung der »Theorie« auszuwerten. Man erkennt, dass die Spannung beim Tachogenerator tatsächlich linear von der Geschwindigkeit abhängt (Abb. 3), nicht jedoch beim Walzendynamo (Abb. 4).

Die Dynamospannung y wird in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit x durch die Ausgleichsparabel $y = 1,1932x - 0,007185x^2$ beschrieben².

Den nicht linearen Anstieg der Dynamospannung führt man auf das Rutschen der Dynamo-Walze zurück. Sie dreht sich nicht mit der gleichen Geschwindigkeit wie der Fahrradmantel. Ohne Rutschen (lineare Hochrechnung) müsste der Dynamo bei 75 km/h 89,49V liefern. Die gemessenen 50,03V entsprechen daher einem »Rutsch-Verlust« von 44 %.

2.6 Modellrechnungen

Wieder gestattet die Berechnung des Scheitelpunktes der Ausgleichsparabel interessante Prognosen. Er gibt an, wann eine Erhöhung der Geschwindigkeit keinen Spannungszuwachs mehr bringen wird. Wie die Ausgleichsparabel und der zugehörige Scheitelpunkt von den eingebrachten Daten abhängt, zeigen Tabelle 2 und Abbildung 5.

3 Gleichmäßige Bewegung: Prognosen mit Ausgleichsrechnung

In der Physik gehört die gleichmäßige Bewegung zum Pflichtpensum der Jahrgangsstufe 11.1, Schnittpunkte von Geraden werden in der Mathematik wiederholt. Was sollte daran spannend sein? Wir filmen zwei Schlitten auf der Luftkissenfahrbahn, die mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten in die gleiche Richtung gleiten. Anschließend werden drei Standbilder in der Nähe des Startzeitpunktes beobachtet. Zollstock und Digitaluhr sind sichtbar eingeblendet. Man liest die in Tabelle 3 aufgeführten Daten ab:

² Viele Tabellenkalkulationen und alle Computeralgebra-Systeme bieten Berechnungen von Ausgleichsfunktionen (als nützliche »black Box«) an. Dabei wird, wie in 2.4 angedeutet, der Spannungsvektor $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$ projiziert auf den durch $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ und $\vec{x}' = (x'_1, \dots, x'_n)$ aufgespannten zweidimensionalen Raum. Natürlich kann man die Abweichungsquadrate auch durch arbeitsteiliges Probieren mit Tabellenkalkulation minimieren.

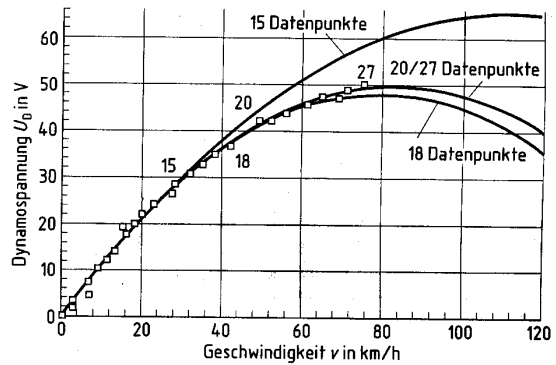


Abb. 5. Ausgleichsparabeln zu den Messwerten bis 30 / 40 / 50 / 75 km/h.

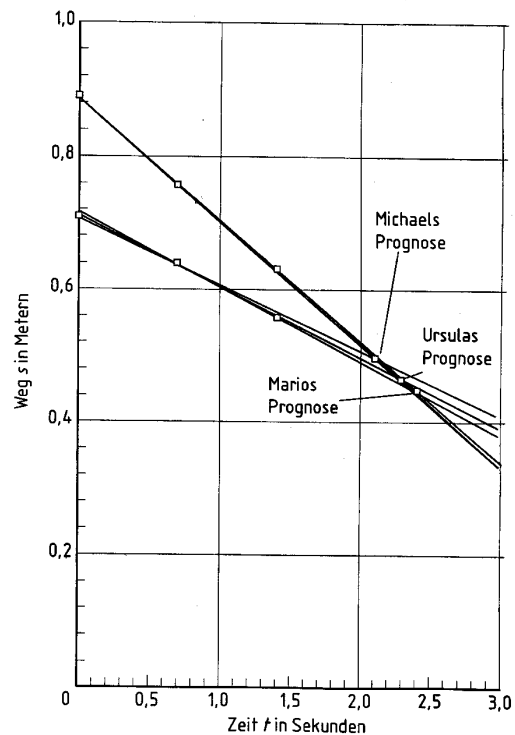


Abb. 6. Prognosen für die Kollision zweier Luftkissenschlitten.

	Zeit in s	Zeit in s	Position in m	Position in m
		(verschoben)	(langsamer Schlitten)	(schneller Schlitten)
0	$t'_0 = 123,79$	$t_0 = 0$	$s_0 = 0,71$	$s_0 = 0,89$
1	$t'_1 = 124,49$	$t_1 = 0,7$	$s_1 = 0,64$	$s_1 = 0,76$
2	$t'_2 = 125,2$	$t_2 = 1,41$	$s_2 = 0,56$	$s_2 = 0,63$

Tab. 3. Zeit und Positionen von zwei Luftkissen-Schlitten.

Wann und wo wird der schnellere Schlitten den langsameren einholen? Der Film wird *nicht* weitergespult, die Frage soll zuvor durch Hochrechnung (arbeitsteilig) beantwortet werden.

- MICHAELS Gruppe benutzt die Daten aus Zeile 0 und Zeile 1. Die zugehörigen Bewegungsgleichungen sind $s = -0,1t + 0,71$ und $s = -0,1657t + 0,89$. Der schnellere Wagen wird den langsameren zur Zeit $t = 2,1$ s an der Position $s = 0,5$ m einholen.
- MARIOS Gruppe benutzt die Daten aus Zeilen 1 und 2. Die Bewegungsgleichungen $s = -0,1127t + 0,71$ und $s = -0,1657t + 0,89$ lassen die Kollision bei $t = 2,404$ s an der Position $s = 0,448$ m erwarten.
- URSULAS Gruppe rechnet mit Ausgleichsgeraden, die alle drei Datenzeilen benutzen: Mit $s = -0,1064t + 0,7115$ und $s = -0,1844t + 0,890$ prognostiziert man die Kollision nun zur Zeit $t = 2,285$ s bei $s = 0,468$ m.

Die Spannung, mit welcher das Ende der Videoaufnahme nun erwartet wird, möchten wir im Unterricht nicht mehr missen. Aber was viel wichtiger ist: Ohne es explizit thematisiert zu haben, haben Schülerinnen und Schüler nebenbei den Einfluss von Messungenauigkeiten *erlebt* und erfahren, was schlechte Kondition eines Gleichungssystems (geringer Schnittwinkel der Geraden) bedeutet. Wenn sich die Schlitten

aufeinander zu bewegen, wirken sich Messungenauigkeiten übrigens weit weniger im prognostizierten Endergebnis aus.

Computeralgebra eignet sich hervorragend zur Untersuchung des Einflusses von Messfehlern und ermöglicht einen schönen Einstieg in gebrochen rationale Funktionen. Z. B. ersetzt man in der Hochrechnung von MICHAEL die abgelesene Position 0,76 m durch $(0,76 + d)$ m, wobei d für den angenommenen Messfehler steht. Der prognostizierte Kollisionsort in Abhängigkeit von d wird dann beschrieben durch

$$s(d) = \frac{0,63}{50d - 3}$$

In diesem Zusammenhang verlieren lineare Gleichungssysteme mit Parametern den Beigeschmack theoretischer »Trockenübungen«. Grafische Darstellungen von Lösungen und inhaltliche Interpretationen sind spannend und anspruchsvoll.

Literatur

- [1] S. M. GOODE - E. J. GOLD: Lineare Regression und Korrelation - ein elementarer Zugang - Stochastik in der Schule 1/1988 33-35.
- [2] H. SCHEID: Stochastik in der Kollegstufe - Mannheim: BI Verlag 1986 44-50.
- [3] H. LÜDICKE: Physikunterricht auf dem Bahnhof - Ein Klassenversuch zur gleichmäßig beschleunigten Bewegung - MNU 49 (1996) 287-288.
- [4] W. RIEMER: Radeln mit dem Computer im Rucksack - MNU 48 (1995) 80-87.
- [5] W. RIEMER: Trägheitsnavigation - MNU 49 (1996) 362-365.
- [6] W. RIEMER - W. PETZOLT: Geschmackstests - Spannende und verbindende Experimente - erscheint 1997 in Mathematik Lehren.

Eine Diskette mit Maple-Arbeitsblättern, Versuchsdaten und Kopien aus [1] und [2] sind bei den Autoren gegen 20,- DM und einen mit 3,- DM frankierten DIN-A5-Rückumschlag erhältlich. □

Fächerverbindende Experimente für die Jahrgangsstufe 11 – Teil 2

Verfasser: Dr. Wolfgang Riemer und Jochen Konietzko, Heinrich-Mann-Gymnasium, Fühlinger Weg 4, 50765 Köln

Lineare und quadratische Funktionen gehören zu den Grundbausteinen der Analysis, Bewegungsvorgänge stehen am Anfang der Oberstufenphysik. Mit nicht ganz alltäglichen Experimenten sollen beide Gebiete miteinander so verknüpft werden, dass der Modellcharakter von Mathematik deutlich wird.

4 Gleichmäßig beschleunigte Bewegung (Bahnhofsexperiment)

Mit einem Beschleunigungsexperiment, das LÜDICKE in [3] beschrieben hat, lassen sich »Laborversuche« zum freien Fall und zur schiefen Ebene hervorragend ergänzen. Eine Gruppe von Schülerinnen und Schülern stellt sich mit Stoppuhren am hinteren Puffer der Lok auf und stoppt die Zeitpunkte, zu denen die einzelnen Wagen (alle haben die Länge 26,4 m) die Messstelle passieren. Dabei stoppt jeder Schüler nach vorheriger Absprache genau einen Wagen. Tabelle 4 enthält mehrere Messreihen, die in Köln-Hbf (gekrümmte Weichenstraßen) und eine Messreihe (RB 8025), die in Lövenich auf der geraden Strecke Köln – Aachen ohne Weichen aufgenommen wurden.

	IC 715	RB 8025	IC 504	RE 3614		
	Lok 103	Lok 110	Lok 103	Lok 111		
Wagen	t in s	t in s	t in s	t in s	s in m	\sqrt{s}
0	0	0	0	0	0	0,0000
1	20,39	6,0	23,8	11,3	26,4	5,1381
2	28,38	9,1	33,5	15,8	52,8	7,2664
3	34,14	11,6	40,4	20,15	79,2	8,8994
4	38,93		46,8	22,8	105,6	10,2762
5	43,22		52,2		132	11,4891
6	46,94		56,58		158,4	12,5857
7	50,31		61,4		184,8	13,5941
8	53,43		65,53		211,2	14,5327
9	56,35		69,5		237,6	15,4143
10	59,07		73,8		264	16,2481
11	61,54		78,2		290,4	17,0411
12	64		82,6		316,8	17,7989

Tab. 4. Zeit-Weg-Messwerte verschiedener Züge

Die Weg-Zeit-Diagramme lassen Parabeln $s = k \cdot t^2$ vermuten. Zieht man aus dem Weg s die Wurzel ($w = \sqrt{s}$), so müsste sich dann eine lineare Abhängigkeit $w = k' \cdot t$ ergeben. Wie Abbildung 7 zeigt, stimmt das Modell aber nur teilweise.

Zwar liegen die Messpunkte bei allen untersuchten Zügen nahezu auf einer Geraden, doch schneidet diese die Zeitachse in der Regel nicht bei $t = 0$. LÜDICKE [3] führt das auf die Unmöglichkeit zurück, den Anfahrzeitpunkt der Lok genau festzulegen. Mit Sicherheit kommt aber ein »Gummiband-Effekt« zwischen den einzelnen Wagen hinzu: Nach dem Bremsen steht der Zug mit zusammengeschobenen Puffern im Gleis, die Lok muss erst einige Meter fahren, bevor tatsächlich die gesamte Zuglast am Haken hängt. Man erhält folgende Ausgleichsgeraden:

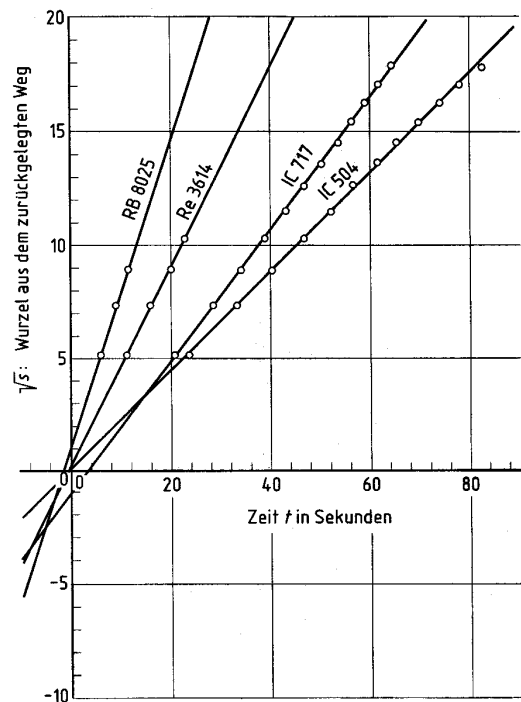


Abb. 7. Ausgleichsgeraden zur Beschleunigung verschiedener Züge

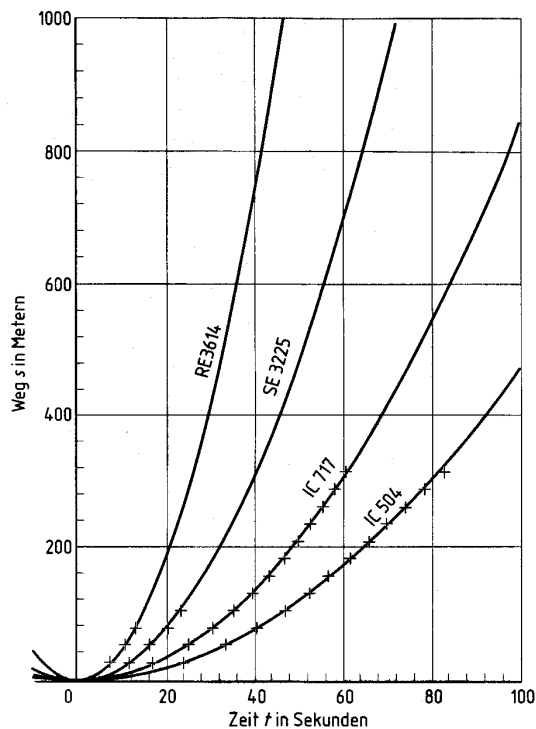


Abb. 8. Weg-Zeit-Ausgleichsparabeln beim Anfahren verschiedener Züge

IC 715	12 Wagen	Köln Hbf-Oberstdorf	$w = 0,292(t - 3,447)$
IC 504	12 Wagen	Köln Hbf-Dortmund	$w = 0,218(t + 0,213)$
RE 3614	4 Wagen	Köln Hbf-Köln Deutz	$w = 0,438(t + 0,533)$
RB 8025	3 Wagen	Lövenich-Köln Hbf	$w = 0,672(t + 1,663)$

Abbildung 8 zeigt die Ausgleichsparabeln der Weg-Zeit-Messwerte, die durch Quadrieren der Ausgleichsgeraden entstanden sind. Zum besseren Vergleich wurden die »hochgerechneten« Startzeitpunkte in den Ursprung des Koordinatensystems verlegt. Man erhält

IC 715	$s = 0,0853 t^2$, $a = 0,171 \text{ m/s}^2$
IC 504	$s = 0,0475 t^2$, $a = 0,095 \text{ m/s}^2$
RE 3614	$s = 0,1918 t^2$, $a = 0,384 \text{ m/s}^2$
RB 8025	$s = 0,4516 t^2$, $a = 0,903 \text{ m/s}^2$.

Diese gemessenen Daten und die Ausgleichsparabeln (math. Modell) sind eine ausgezeichnete Basis für den »Sprung« in die Differentialrechnung.

- Welche mittlere Geschwindigkeit hatte der erste, der vorletzte, der letzte Wagen des IC 504 während des Passierens der Messstelle, wenn man von den Messwerten ausgeht?

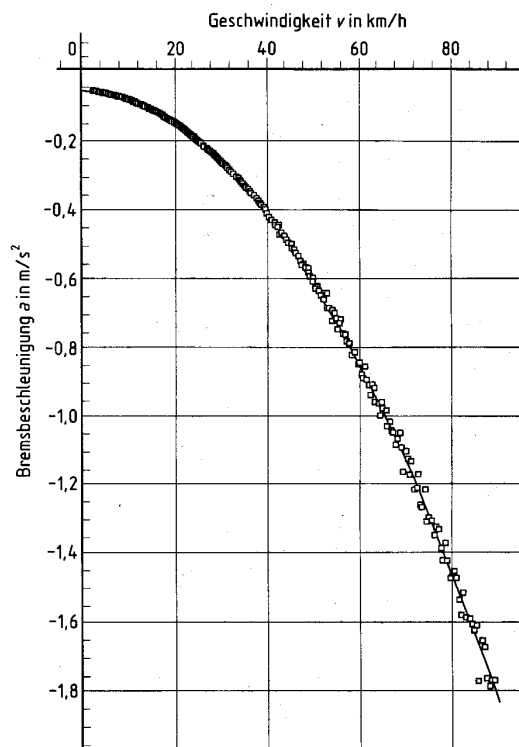


Abb. 9. Luftwiderstand in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit

- Welche mittleren Geschwindigkeiten würde man den Wagen zuordnen, wenn man von den Daten der Ausgleichsparabeln ausgeht?
- Welche Momentangeschwindigkeit hat der Zug in dem Zeitpunkt, in dem der vordere Puffer des letzten Wagens die Messstelle passiert?
- Liegt diese Momentangeschwindigkeit zwischen den gemessenen (aus den Ausgleichsparabeln berechneten) Durchschnittsgeschwindigkeiten des 11ten und 12ten Wagens?
- Fahrplanmäßig wäre IC 504 22 Minuten später in Düsseldorf. Welche Maximalgeschwindigkeit würde er erreichen, wenn er 11 Minuten konstant beschleunigen und dann 11 Minuten ebenso konstant bremsen würde? Welche Strecke hätte er dann zurückgelegt?

Solche auf den konkreten Kontext bezogene Aufgaben werden von Schülerinnen und Schülern bereitwillig aufgegriffen, weil sie mit den eigenen Daten zu tun haben.

Das größte *Staunen* (!) beobachteten wir bei der Entdeckung der Schülerinnen und Schüler, dass man die Frage nach der Momentangeschwindigkeit beim Pas-

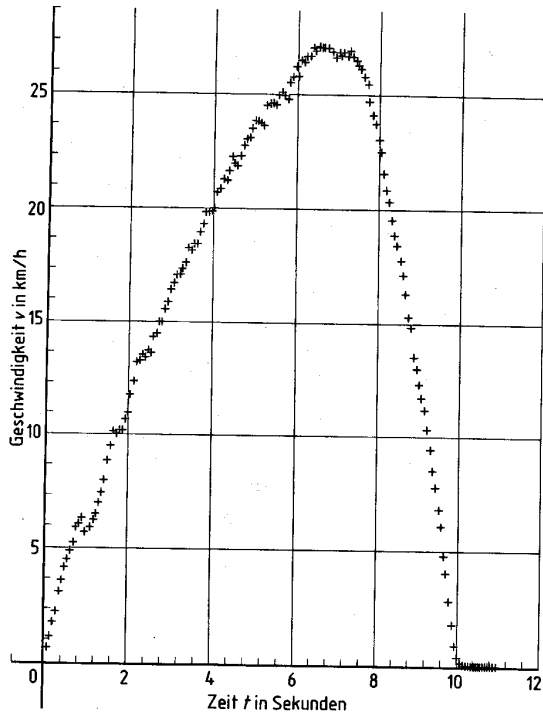


Abb. 10. Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm bei Sprint und Vollbremsung mit einem Fahrrad

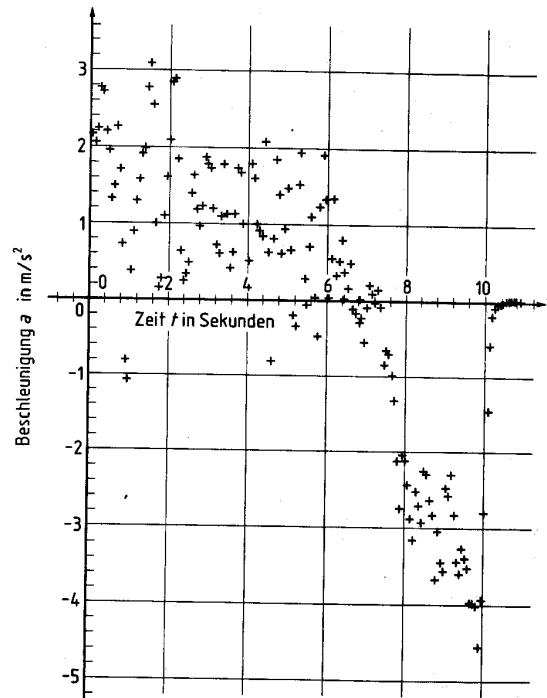


Abb. 11. Beschleunigungs-Zeit-Diagramm bei Sprint und Vollbremsung mit einem Fahrrad

sieren des vorletzten Puffers mit Stoppuhr und Bandmaß gar nicht beantworten kann. Ohne Parabel kommt man hier nicht weiter – und wie genau die am Modell berechneten Antworten die Realität beschreiben, ist unklar.

5 Bewegung im Luftwiderstand

Wer im Unterricht über gleichmäßige oder konstant beschleunigte Bewegungen hinausgehen möchte, mag Gefallen finden an einer Untersuchung des Luftwiderstandes (geschwindigkeitsabhängige Bremsbeschleunigung). Man beschleunigt das Hinterrad wieder auf Höchstgeschwindigkeit und lässt es im Luftwiderstand auslaufen. Statt Videoaufzeichnungen empfiehlt es sich, den Geschwindigkeitsverlauf durch den Computer aufzuzeichnen. In Abbildung 9 wurden die Beschleunigungen als Differenzenquotienten der t - v Funktion berechnet und gegen die Geschwindigkeit abgetragen. Man erhält eine Luftwiderstandsparabel.

Wenn man eine Ursprungsparabel als Ausgleichsmodell verwendet, erhält man $y = -0,000233x$. Lässt man dagegen einen konstanten Summanden zu, dann

ergibt sich $y = -0,059 - 0,000219x$. Dieser Summand modelliert den konstanten Rollwiderstand, den man bei hohen Geschwindigkeiten gegenüber dem Luftwiderstand völlig vernachlässigen kann.

Möglicherweise wird man später – evtl. im Rahmen von Facharbeiten – den Einfluss von Speichenverkleidungen oder Reifenprofil auf den Luftwiderstand untersuchen. Man vergleiche [4].

6 Beschleunigungsversuche »am Menschen«, Ausgleichstangenten

In der Mathematik wird der Zusammenhang zwischen einer Funktion f und ihrer Ableitung f' häufig durch grafisches Differenzieren gefestigt. Man zeichnet Funktionsgrafen ohne Funktionsterm »aus der Hand« und lässt nach Augenmaß die Ableitung skizzieren. Inhaltlich interessant wird die Aufgabe, wenn der »beliebigen Funktion« das reale Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm eines sprintenden Schülers zu Grunde liegt. In der Abbildung 10 wurde ein kurzer Fahrradspurt mit anschließender Vollbremsung über einen Tachogenerator und einen tragbaren Computer aufgezeichnet.

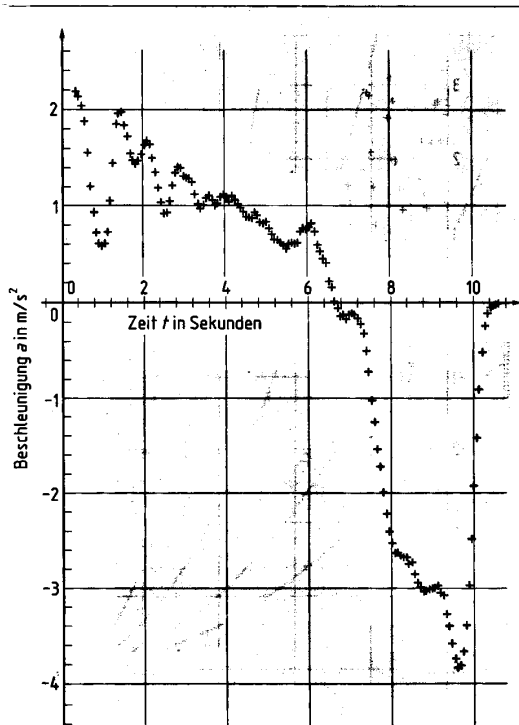


Abb. 12. Beschleunigungs-Zeit-Diagramm berechnet mit Hilfe von Ausgleichsgeraden

Möchte man die Beschleunigungskurve als Ableitung berechnen, dann macht es wegen der Messungenauigkeiten wenig Sinn, die Differenzenquotienten zu bestimmen. In der entstehenden Punktwolke (Abb. 11) kann man nur wenig erkennen. Das wird anders, wenn man die Ausgleichsrechnung aus Abschnitt 2 einsetzt. In Abbildung 12 wurde die »Ableitung« über die Steigung der Ausgleichsgeraden zu je 7 t - v -Datenpunkten bestimmt. Aus der Datenwolke treten die einzelnen Pedalumdrehungen deutlich hervor. Abbildung 13 zeigt die Beschleunigung in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit. Man erkennt,

- dass man bei jeder Pedalumdrehung ca. 5 km/h an Geschwindigkeit »zulegt«,
- wie sich beim Bremsen der Seitenschlag der Felge auswirkt.

Beschleunigungssensoren, wie sie in [5] eingesetzt wurden, sind für solche Messungen ungeeignet, wenn man sie am Körper oder am Fahrrad befestigt. Die Gravitationskomponente, die solche Sensoren bei der kleinsten Neigung mit erfassen, macht die Messwerte unbrauchbar. Wenn man andererseits die Fahrrad-Bewegungen über Tacho-Magnete aufzeichnet, reicht die Auflösung wegen des großen Radumfangs nicht, um Details der Beschleunigung zu erkennen.

Besitzt man keinen Laptop, dann zeichnet man die Geschwindigkeit auf über einen Faden, den man am Fahrrad befestigt und über die (durch eine Feder gebremste) Seilrolle eines fest montierten Tachogenera-

	Beschleunigung a (Laufstrecke 10 m) in m/s^2						
	auf 10 km/h		auf 20 km/h		auf Maximalgeschwindigkeit		
	t in s	a in m/s^2	t in s	a in m/s^2	v in km/h	t in s	a in m/s^2
Patrick Blachnik	0,625	4,44	1,324	4,20	24,166	2,213	3,03
Werner Huber	0,911	3,05			17,675	2,499	1,96
Wolfgang Riemer	0,784	3,55			19,038	2,435	2,17
Marcus Burns	0,540	5,14	1,674	3,32	25,542	2,278	3,12
Patrick Blachnik 2	0,456	6,10	1,367	4,07	25,869	2,077	3,46
Nina Zulka, 8 J.	0,984	2,82			17,569	2,764	1,77
Matthias Siegele	1,250	2,22			15,763	3,072	1,43
Thomas Siegele	1,155	2,41			14,278	2,532	1,57
Vitali Markine	0,487	5,70	1,228	4,52	25,721	2,234	3,20
Carsten Müller	0,328	8,47	1,144	4,86	28,984	4,120	1,95
Marie Zulka	1,356	2,05			15,476	2,987	1,44
Thomas Drensla	0,752	3,69	1,790	3,10	23,151	2,107	3,05

Tab. 5. Zeiten bis zum Erreichen von 10 km/h, 20 km/h und Maximalgeschwindigkeit, zugehörige Durchschnittsbeschleunigungen

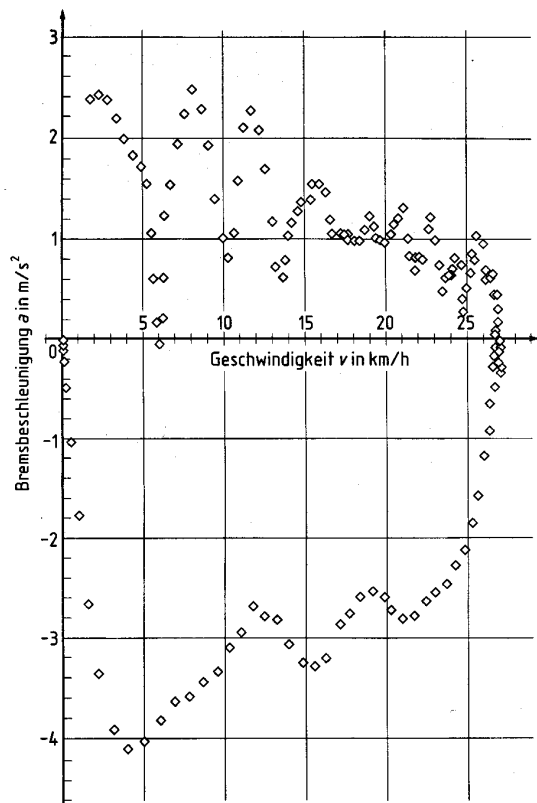


Abb. 13. Geschwindigkeits-Beschleunigungs-Diagramm

tors laufen lässt. Wenn der Faden abgerollt ist, bleibt der Tachogenerator wegen der Bremse »sofort« stehen. Abbildung 14 zeigt ANDRÉS Weg-Zeit-Diagramme für einen Sprint »zu Fuß« und »zu Rad« im Vergleich. Solche Versuche sind auch für einen »Tag der offenen Tür« geeignet, da viele mitmachen und jeder sein Beschleunigungsprotokoll »schwarz auf weiß« mit nach Hause nehmen kann. Tabelle 5 zeigt die »technischen Daten« einiger Versuchsteilnehmer.

Spannend im Sinne der Leitlinien aus Abschnitt 1 wird es wieder, wenn man allein aus den t - v -Daten verschiedener Testläufe versucht, die Länge s des verwendeten Fadens vorherzusagen. Diese Frage führt unmittelbar in die Integralrechnung:

$$s = \int v(t) dt \approx \sum v(t_i) (t_{i+1} - t_i).$$

Die Messfehler lagen bei unserer Versuchsanordnung ($s = 10$ m) unter 10%.

Wer erlebt hat, wie bereitwillig sich Schülerinnen und Schüler auf unsere Fächer einlassen und auch »trockene Durststrecken« überwinden, wenn hin und wieder »Lebenswirklichkeit« in den Unterricht einzieht, wird auf Experimente nicht mehr verzichten

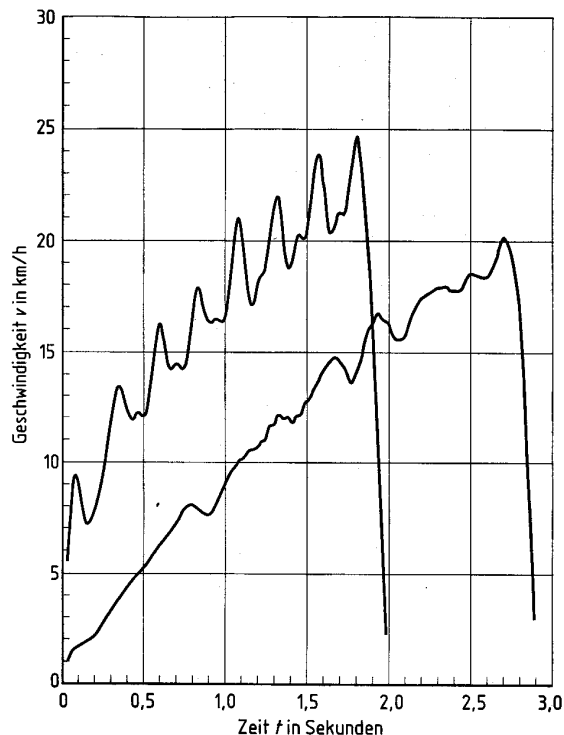


Abb 14. Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm beim Spurt zu Fuß und zu Rad (1. Gang) über eine Seilrolle aufgezeichnet

wollen. Die enge Kooperation war für beide Fächer ein Gewinn. Aber auch ohne Kooperation bereichert jedes der vorgestellten Experimente für sich genommen den Unterricht ungemein.

Literatur

- [1] S. M. GOODE - E. J. GOLD: Lineare Regression und Korrelation - ein elementarer Zugang - Stochastik in der Schule 1/1988 33-35.
- [2] H. SCHEID: Stochastik in der Kollegstufe - Mannheim: BI Verlag 1986 44-50.
- [3] H. LÜDICKE: Physikunterricht auf dem Bahnhof - Ein Klassenversuch zur gleichmäßig beschleunigten Bewegung - MNU 49 (1996) 287-288.
- [4] W. RIEMER: Radeln mit dem Computer im Rucksack - MNU 48 (1995) 80-87.
- [5] W. RIEMER: Trägheitsnavigation - MNU 49 (1996) 362-365.
- [6] W. RIEMER - W. PETZOLT: Geschmackstests - Spannende und verbindende Experimente - erscheint 1997 in Mathematik Lehren.

Eine Diskette mit Maple-Arbeitsblättern, Versuchsdaten und Kopien aus [1] und [2] sind bei den Autoren gegen 20,- DM und einen mit 3,- DM frankierten DIN-A5 Rückumschlag erhältlich. □