

Begriffsbildung

„stetige Zufallsgröße“

am Beispiel

„Zufallsregen im

Mannheimer-Distanz-Quadrat“



Rolf Reimer

Matthias Taulien

Begriffsbildung „Stetige Zufallsgröße“

In dieser Unterrichtseinheit im Umfang von etwa 6 Stunden soll der Begriff „Stetige Zufallsgröße“ aus dem Vorwissen der Schüler über endliche Zufallsgrößen an einem konkreten Beispiel erarbeitet werden.

A) Fachlicher Hintergrund

Eine **stetige Zufallsgröße** X ist für Werte aus einem Intervall $[a; b]$ definiert.

Zur Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten liegt (im Gegensatz zu einer diskreten Zufallsgröße mit endlichem Wertebereich) keine direkte Information über die Wahrscheinlichkeitsverteilung vor. Dafür beschreibt eine **Dichtefunktion** f (auch Wahrscheinlichkeitsdichte genannt) das lokale Änderungsverhalten der Wahrscheinlichkeitsfunktion.

Die Wahrscheinlichkeit $P(r \leq X \leq s)$ dafür, dass die Zufallsgröße X Werte in einem Teilintervall $[r; s]$ von $[a; b]$ annimmt, berechnet sich deshalb über eine Integration:

$$P(r \leq X \leq s) = \int_r^s f(x) dx.$$

Aus Gründen der Konsistenz müssen für eine stetige Zufallsgröße folgende Eigenschaften gelten:

1. $P(r \leq X \leq s) \geq 0$ für alle Teilintervalle $[r; s]$ von $[a; b]$.
„Wahrscheinlichkeiten sind nie negativ.“
2. $P(a \leq X \leq b) = 1$
„Das sichere Ereignis hat die Wahrscheinlichkeit 1.“

Bemerkungen:

- a) Geht man axiomatisch vor, kann man jede Funktion f , welche in einem Intervall $[r; s]$ die Eigenschaften 1. und 2. erfüllt, eine Wahrscheinlichkeitsdichte für eine

(kontextfreie) Zufallsgröße X nennen. Dann ist $P(r \leq X \leq s) = \int_r^s f(x) dx$ als Definition für die Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten anzusehen.

(Dieser Weg wird hier nicht eingeschlagen, weil die Begriffsbildung genetisch über das Vorwissen der Schüler und anhand eines Kontextes erfolgt.)

- b) Eine stetige Zufallsvariable hat die Eigenschaft $P(X = x) = 0$ für alle $x \in [a; b]$, d. h. positive Wahrscheinlichkeiten treten nur für Intervalle auf. „Punkt-Ergebnisse“ haben die Wahrscheinlichkeit 0.

B) Vorschlag für eine unterrichtliche Durchführung

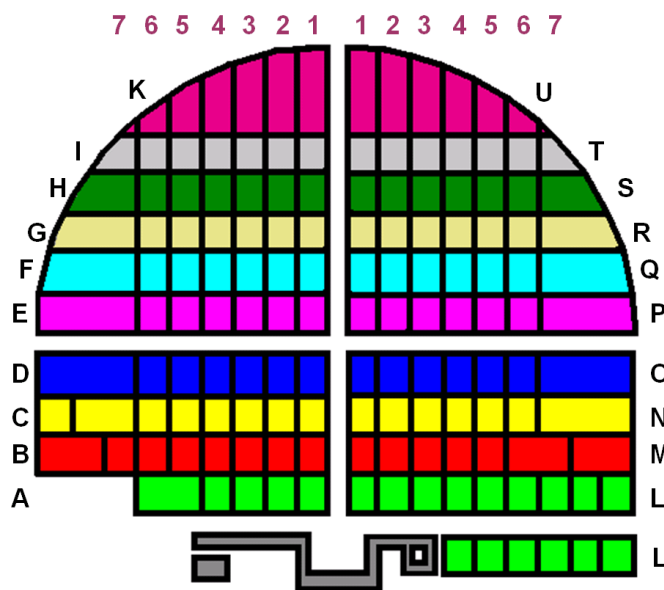
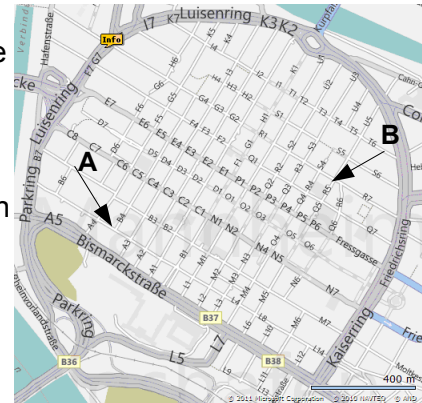
Hinweise und Kommentare sind im Folgenden kursiv geschrieben.

Zu den einzelnen Phasen der Unterrichtseinheit wurden mit GeoGebra HTML-Simulationen erstellt. Je nachdem ob diese den Schülern im Unterricht zugänglich sind oder nur im Plenum durchgeführt werden können, ergeben sich unterschiedliche methodische Möglichkeiten für die Bearbeitung der Aufträge (dem entsprechend müssen diese gegebenenfalls der Methode angepasst werden).

1. Situationsbeschreibung

1.1 Die „Mannheimer-Distanz“

Auf einer quadratischen Fläche kommt man stets geradlinig von einem Punkt A zu einem Punkt B. Die Länge der Strecke AB gibt dann den „Abstand der Punkte A und B“ bzw. die Weglänge an. Es gibt jedoch Situationen (z. B. in der „Quadrat-Stadt“ Mannheim oder in Manhattan), wo man sich nur auf parallelen Wegen zu vorgegebenen Richtungen bewegen kann. Unabhängig vom gewählten Weg ergibt sich hier die kürzeste Weglänge (der „Abstand der Punkte A und B“) als Summe zweier Streckenlängen (s. Abb. 1). In der Literatur wird dieser Abstand auch „Manhattan-Distance“ genannt. Entsprechend sprechen wir im Falle von Mannheim von der „Mannheimer-Distanz“.

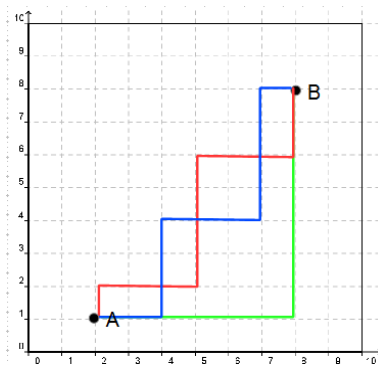


Verständnisfragen:

Mannheim ist im Zentrum über gitterförmig angeordnete Straßen in quadratische Wohnbereiche gegliedert, welche mit Buchstaben des Alphabets und Ziffern benannt sind.

- Erklären Sie das Prinzip anhand der Abbildung
- Wie lang in etwa ist der kürzeste Weg vom Punkt A in B4 nach B in R5? Verwenden Sie den Maßstab der Abbildung.
- Wählen Sie zwei verschiedene Wege mit „kürzester Weglänge“. Begründen Sie, dass diese Wege gleich lang sind.

1.2 Ein mathematisches „Mannheimer-Quadrat“



Unser Quadrat-Modell besteht aus einem Quadrat mit der Kantenlänge 10 dm, das wie links abgebildet in einem kartesischen Koordinatensystem liegt.

Von einem Punkt A zu einem Punkt B können wir nur Wege wählen, die aus Strecken parallel zu den beiden Achsenrichtungen zusammengesetzt sind.

Aufträge 1 bis 4 (sequentiell auftragsgesteuert bearbeiten lassen)

Auftrag 1:

Erstellen Sie im Heft eine maßstabsgetreue Zeichnung des „Quadrates“ ($1 \text{ cm} \hat{=} 1 \text{ dm}$).

Auftrag 2:

Welche Länge hat ein kürzester Weg von A(2|1) nach B(8|6)?

Welche Länge hat der längste Weg, den man von O aus gehen kann?

Auftrag 3:

Die Länge eines kürzesten Weges von einem Punkt P zu Q wird auch „Abstand von P zu Q“ genannt.

- Stellen Sie eine Formel auf für den Abstand eines Punktes $P(x|y)$ vom Ursprung $O(0|0)$.
- Stellen Sie eine Formel auf für den Abstand des Punktes $A(a_1|a_2)$ zum Punkt $B(b_1|b_2)$.

Auftrag 4:

Wir suchen Punkte, die vom Ursprung O jeweils den gleichen Abstand haben.

- Finden Sie mindestens vier Punkte, die von O den Abstand 6 haben.
- Nennen Sie zwei weitere Punkte mit Abstand 6 von O, deren Koordinaten nicht ganzzahlig sind. Stellen Sie das Ergebnis grafisch dar.

Auftrag 5:

- Bestimmen Sie mindestens fünf Punkte, welche vom Ursprung O aus auf Wegen der Länge 4 zu erreichen sind.
- Stellen Sie eine Vermutung auf über die Lage aller Punkte, welche vom Ursprung O den Abstand c haben.

Mit der Besprechung von Auftrag 5b wird die Gleichung $x + y = c$ als Geradengleichung interpretiert.

Ergebnis: Punkte $P(x|y)$, welche vom Ursprung den Abstand c haben, liegen auf Geraden mit der Gleichung $x + y = c$ bzw. $y = c - x$ (die Geraden haben die Steigung -1 und den Achsenabschnitt c).

2. Zufallsregen im „Mannheimer Quadrat“

Auf unser Quadrat soll es gleichmäßig regnen. Für auftreffende Regentropfen $P(x|y)$ beschreibt die Eigenschaft „Der Abstand vom Ursprung O ist konstant“ eine Zufallsgröße X .

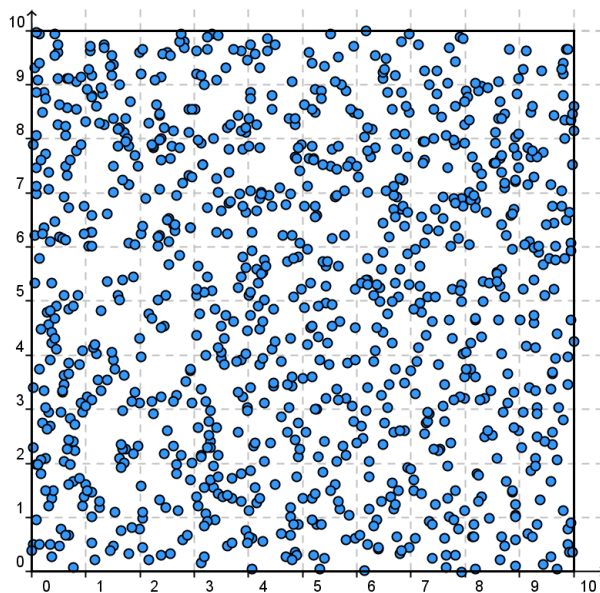
L regt Diskussion an, bei der der Unterschied zu bisher behandelten Zufallsvariablen deutlich wird: Die Zufallsgröße ist für Werte im Bereich von 0 bis 20 (dm) definiert. Man nennt solche Zufallsgrößen deshalb „stetige Zufallsgrößen“.

2.1 Vorstellen einer Simulation (GeoGebra)

Es wird eine Simulation (GeoGebra) vorgestellt, das Prinzip beschrieben (Black-Box-Modell) und mehrfach ausgeführt. In einem U-Gespräch werden Besonderheiten der Zufallsgröße X angesprochen.

Die Datei 01_Regentropfen_Quadrat ermöglicht eine Simulation des Vorgangs.

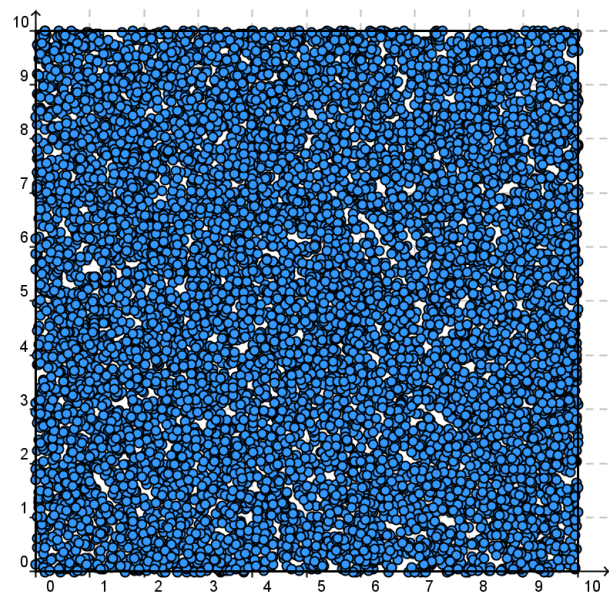
Die beiden Abbildungen zeigen eine Durchführung des Zufallsexperiments für $n = 1\,000$ und $n = 10\,000$.



Quadrat : $n = 1000$

$n = 1000$

Berechne Zufallszahlen neu



Quadrat : $n = 10000$

$n = 10000$

Berechne Zufallszahlen neu

Neben der Wiederholung von Schreibweisen wie z. B. $0 \leq X < 5$ wird auch diskutiert, ob es einen Unterschied von $P(0 \leq X \leq 5)$ und $P(0 \leq X < 5)$ gibt und welche Wahrscheinlichkeit man dem Auftreffen von Regentropfen auf Flächen mit einem vorgegebenem Quadrat-Abstand zuordnen sollte.

Auftrag 6:

- Was bedeutet $P(4 \leq X \leq 5)$?
- Was bedeutet $P(0 \leq X \leq 5)$?
- Was bedeutet $P(X \leq 5)$?
- Gibt es einen Unterschied bei den Fragen b) und c)?

3. Diskretisierung des Zufallsversuchs – Die Zufallsvariable X_1

Unser Ziel ist es, den Wahrscheinlichkeitsbegriff auf eine stetige Zufallsvariable zu übertragen. Dazu verwenden wir eine bei mathematischen Begriffen schon öfters verwendete Strategie: Wir diskretisieren den Vorgang und arbeiten uns dann mit einer Verfeinerung an den stetigen Fall heran (Grenzwertgedanke; hier kann L an Analogien mit reellen Zahlen, der Ableitung, dem Integrieren erinnern).

L schlägt folgende Diskretisierung des Vorgangs vor:

Diskretisierung: Das Quadrat soll in „Parallelschichten“ mit Steigung -1 unterteilt werden, welche die Achsenabschnittslänge 1 haben. D. h. es entstehen Schichten mit Achsenabschnitten von 0 bis 1, 1 bis 2, 2 bis 3 usw.

Die Zufallsvariable X_1 : „Die Mannheimer-Distanz liegt in einem dieser Streifen“ beschreibt ein endliches Zufallsexperiment.

Auftrag 7:

- Zeichnen Sie die Situation im Maßstab 1:10.
- Geben Sie eine mathematische Formulierung für die Zufallsvariable X_1 mit Hilfe der Mannheimer-Distanz an.
- Was ist der Unterschied zwischen der geometrischen Streifenbreite und der „Mannheimer-Distanz-Breite“?
- Wie viele Ausgänge hat die Zufallsvariable X_1 ?

Bei der Besprechung der Aufträge „vereinheitlicht“ L die Schreibweise:

Es gibt 20 Ergebnisse, die wir wie folgt schreiben:

$$0 \leq X_1 < 1, 1 \leq X_1 < 2, 2 \leq X_1 < 3, \dots, 19 \leq X_1 < 20$$

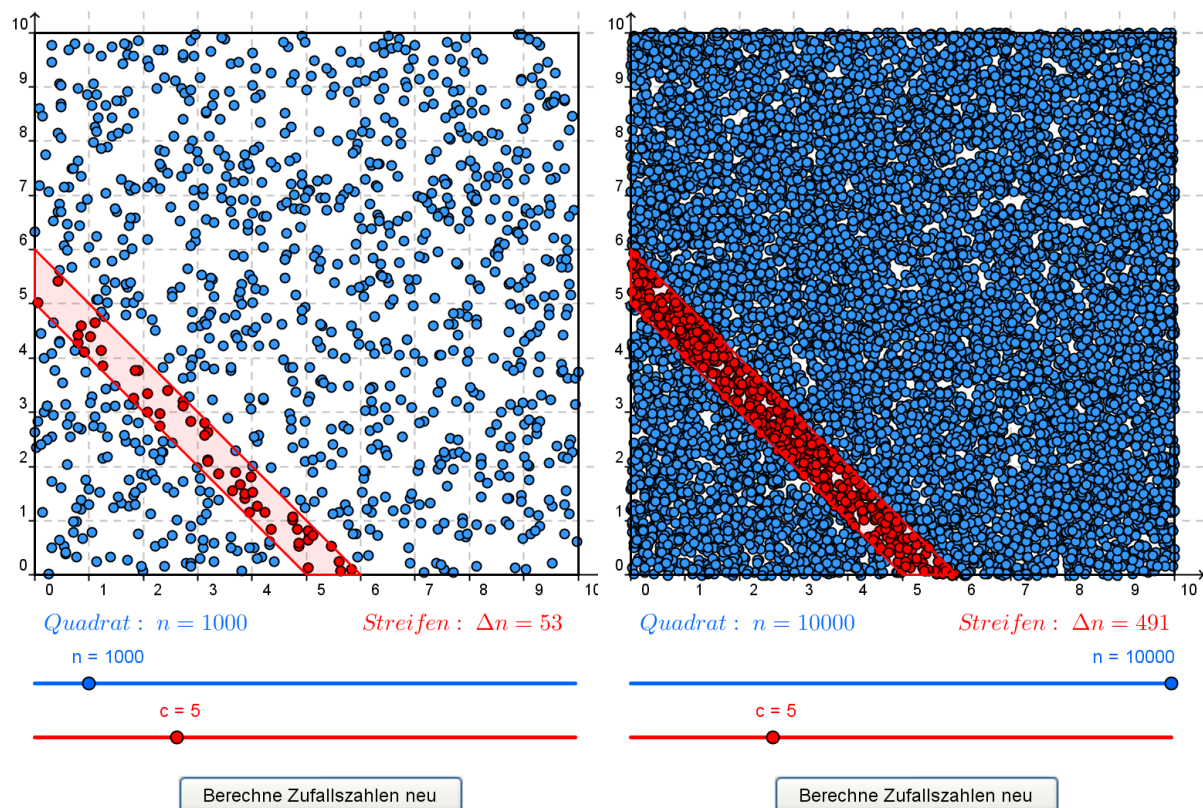
Simulation des Zufallsversuchs

Mit der Datei 02_Regentropfen_Quadrat.html kann der Zufallsregen simuliert werden. Bei Zufallsversuchen sind relative Häufigkeiten (bestmögliche) Schätzwerte für Wahrscheinlichkeiten.

Auftrag 8:

- Führen Sie mit Hilfe der oben angegebenen Datei eine Simulation für $n = 10\,000$ durch. Erstellen Sie eine Häufigkeitsverteilung der Zufallsgröße X_1 . Zeichnen Sie ein zugehöriges Histogramm.

Abbildungen: Beispiele für Zufallsversuche mit $n = 1\,000$ und $n = 10\,000$



Hier kann die Problematik des Zusammenführens von Simulationen angesprochen werden. L kann an Gesetz der großen Zahlen erinnern.

Tipp: Die Tabelle kann mit Hilfe der Simulation arbeitsteilig erstellt werden.

Relative Häufigkeiten sind bestmögliche Schätzwerte für Wahrscheinlichkeiten, wenn man sonst nichts kennt. Bei der Auswertung der Tabelle und mit Blick auf das Histogramm können wir die Veränderung des Zuwachses an Wahrscheinlichkeit zur nächsten Schicht bestimmen. Dabei kann die Vermutung herausgearbeitet werden, dass diese (proportional) zunehmen bis $X_1 = 9$ und dann wieder (linear) abnehmen bis $X_1 = 19$.

5. Verfeinerung der Zufallsvariablen X_1

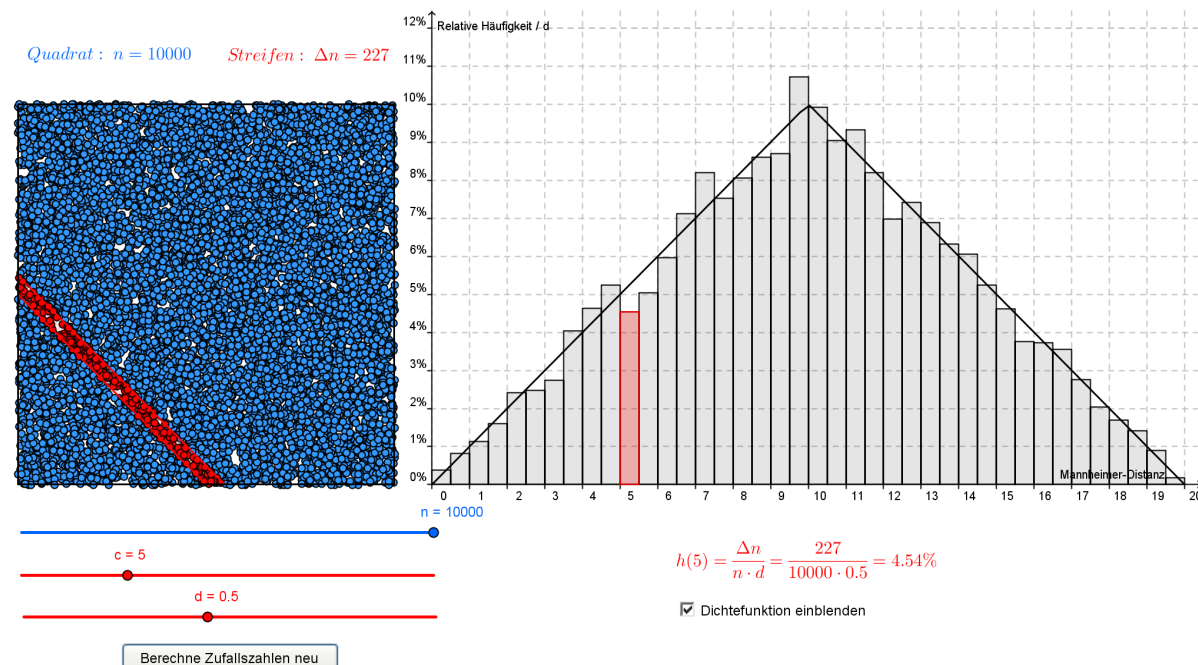
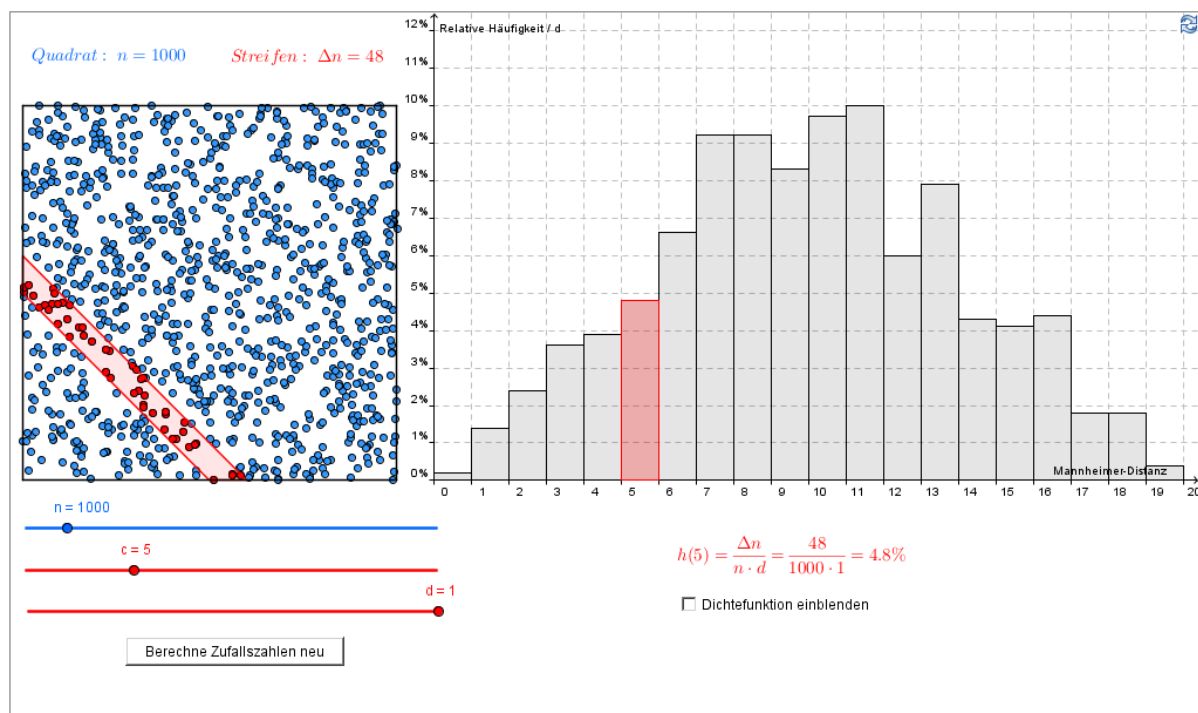
Simulation zum Experiment aus 4. mit variabler Achsenabschnittslänge d (Mannheimer-Distanz bzw. Achsenabschnittslänge)

Wir erstellen mit Hilfe einer Simulation Häufigkeitsdiagramme für die relativen Häufigkeiten pro „Distanzwert“ d für variable Werte von n und d . Die Werte sind somit als mittlerer Zuwachs der Wahrscheinlichkeitsfunktion $P(c \leq X \leq c+d)/d$ im Distanzbereich $c \leq X \leq c+d$ anzusehen.

Die entsprechende Zufallsgröße wird mit X_d bezeichnet. Im zugehörigen Diagramm wird die relative Häufigkeit pro Distanzwert d angegeben, weil die relativen Häufigkeiten bei Verkleinerung von d abnehmen würden (vgl. $n \rightarrow \infty$ beim Übergang von der Binomial- zur Normalverteilung).

Die folgenden Abbildungen zeigen die Ergebnisse zweier Simulationen mit $n = 1\,000$ und $d = 1$ bzw. $n = 10\,000$ und $d = 0,5$.

Häufigkeitsverteilung der Tropfenzahlen pro Streifen und Streifenbreite.



Bei der Simulation kann festgestellt werden, dass bei einer Verkleinerung von d die Anzahl n der Tropfen erhöht werden müsste, um die Grafik wieder zu glätten. Dies erhöht jedoch beträchtlich die Rechenzeit. Alternativ kann man bei mehrfacher Simulation für $n = 1\,000$ sehr gut beobachten, dass die Änderungsraten der Wahrscheinlichkeiten (d. h. die relativen Häufigkeiten pro Achsenabschnittsdistanz d) um die Funktionswerte einer abschnittsweise linearen Funktion (Änderungsratenfunktion $P'(c)$) schwanken.

6. Bestimmung der Wahrscheinlichkeitsfunktion der Zufallsvariablen X über Grundvorstellungen zur Integration und zum Wahrscheinlichkeitsbegriff

L stellt den bisherigen Vorgang dar. Wir haben experimentell bestätigt, dass der Ansatz der Linearität der Ableitungsfunktion sinnvoll ist. Nun können wir mathematisch argumentieren.

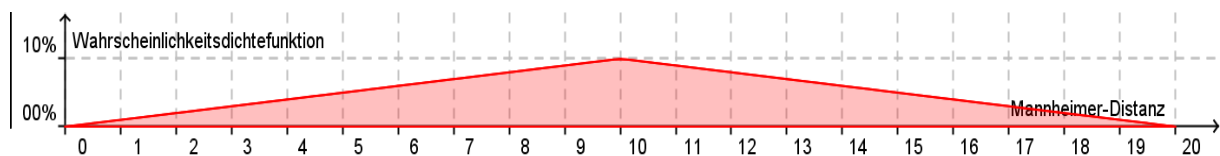
Bemerkung: Für $P(0 \leq X \leq c)$ schreibt man auch kurz $P(X \leq c)$.

Formales zur Schreibweise: Für die Ableitung der Funktion $F(x) = P(X \leq x)$ gilt:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{d \rightarrow 0} \frac{F(x+d) - F(x)}{d} = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{P(X \leq x+d) - P(X \leq x)}{d} = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{P(x \leq X \leq x+d)}{d} \\ &= P'(X=x) = f(x) \end{aligned}$$

Wenn die Ableitungsfunktion $P'(X=x)$ streckenweise linear ist, für $x=0$ bei 0 beginnt, für $0 \leq x < 10$ linear wächst und für $10 \leq x \leq 20$ entsprechend wieder linear bis auf den Wert 0 fällt, muss die Steigung so gewählt werden, dass das Integral über P' von 0 bis 20 den Wert 1 hat.

In der Abbildung bedeutet dies, dass das Dreieck den Flächeninhalt 1 hat (sicheres Ereignis).



Damit wird hergeleitet, dass

$$P'(X=x) = \begin{cases} \frac{1}{100} \cdot x & , \text{ falls } 0 \leq x < 10 \\ \frac{1}{100} \cdot (20 - x) & , \text{ falls } 10 \leq x \leq 20 \end{cases}$$

gilt.

Auftrag 9 (Verständnisübung)

Bestimmen Sie mit der obigen Definition die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses und interpretieren Sie das Ergebnis.

- a) $P(0 \leq X \leq 5)$ b) $P(0 \leq X \leq 20)$ c) $P(5 \leq X \leq 10)$ d) $P(3 \leq X \leq 5)$

Auftrag 10 (Begriffsverständnis)

a) Berechnen Sie $P(5 \leq X \leq 5)$. Interpretieren Sie das Ergebnis.

b) Warum ist eine Aufgabenstellung wie z. B. $P(5 \leq X < 8)$ nicht sinnvoll?

Auftrag 11

Vergleichen Sie für eine Simulation mit $d=1$ die relativen Häufigkeiten mit den berechneten Wahrscheinlichkeiten der Dichtefunktion.

Rückschau und Zusammenfassung

Was ist neu?

1. Es handelt sich um einen Vorgang, bei der eine Zufallsgröße X reelle Werte in einem Intervall $[a; b]$ annehmen kann (X heißt stetige Zufallsgröße).
2. Wahrscheinlichkeiten für Teilintervalle $[r; s]$ können durch Integration einer Funktion f bestimmt werden:

$$P(r \leq X \leq s) = \int_r^s f(x) dx \quad \text{Die Funktion } f \text{ heißt } \mathbf{Dichtefunktion \text{ der Zufallsgröße.}}$$

3. Ein einzelner Wert der Zufallsgröße hat die Wahrscheinlichkeit null: $P(X=r)=0$.
4. Der Funktionswert $f(x)$ der Dichtefunktion ist die momentane Änderungsrate der Wahrscheinlichkeitsfunktion an der Stelle x .
5. Für die Dichtefunktion einer stetigen Zufallsgröße X mit Werten im Intervall $[a; b]$ muss gelten:
 - (1) $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a; b]$, d.h. f hat keine negativen Funktionswerte.
 - (2) $\int_a^b f(x) dx = 1$; d. h. $P(a \leq X \leq b) = 1$.

Worin liegt der Vorteil?

In manchen Situationen kommt man einfacher (oder überhaupt nur) zu einer geeigneten Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße, indem man die Änderungsrate der Zufallsgröße modelliert, d.h. die zugehörige Dichtefunktion bestimmt.

→ Rückschau auf Quadrat:

Wir haben angenommen, dass die momentane Änderungsrate der Wahrscheinlichkeitsfunktion, also $P'(X=x)=f(x)$, aufgrund der geometrischen Situation im Intervall $[0; 10]$ proportional zu x wächst und im Intervall $[10; 20]$ entsprechend wieder fällt.

Machen wir den Ansatz $f(x)=a \cdot x$, dann muss im Intervall $[0; 10]$ gelten:

$$\int_0^{10} a \cdot x \, dx = \frac{1}{2} \quad \text{oder} \quad \left[\frac{1}{2} a \cdot x^2 \right]_0^{10} = 50 \cdot a = \frac{1}{2}, \text{ daraus folgt } a = \frac{1}{100}.$$

Weitere Anwendungen:

Aufgabe 1:

Auf eine Kreisscheibe mit Radius 1 m fällt ein Zufallsregen.

Die Zufallsvariable X beschreibt den Abstand der Regentropfen vom Kreismittelpunkt.

- a) Welches mathematische Modell für die Dichtefunktion dieses Zufallsversuchs schlagen Sie vor?
(Tipp: Gehen Sie wie beim Quadrat vor und machen Sie zunächst eine Verfeinerung. Dazu gibt es eine Simulation.)
- b) Bestimmen Sie mit dem Ergebnis aus a) die Wahrscheinlichkeiten für einige selbstgewählte Ereignisse.

Aufgabe 2

Gleichwahrscheinlichkeit von Zufallszahlen – Vom Diskreten zum Kontinuierlichen

Beim Würfeln haben die Zufallszahlen 1 bis 6 die gleiche Wahrscheinlichkeit .

- a) Welche Wahrscheinlichkeiten haben Zufallszahlen von 0,5 bis 6,4?
(Das sind diejenigen Zahlen mit einer Nachkommastelle, die gerundet die Zahlen 1 bis 6 ergeben.)
- b) Führen Sie die entsprechenden Überlegungen für Zufallszahlen mit zwei Nachkommastellen durch.
- c) Geben Sie die Dichtefunktion bei einer Modellierung des „Würfeln“ mit einer stetigen Zufallsgröße an.
- d) Überprüfen Sie das Ergebnis an jeweils einem Beispiel zu a), b) und c).

Lösungen

1.1 Die „Mannheimer-Distanz“

Verständnisfragen:

- Ein sogenanntes „Quadrat“ wird durch einen Buchstaben und eine Zahl gekennzeichnet. Man beginnt am Schloss. Die Kurpfalzstraße führt vom Schloss weg bis zur Kurpfalzbrücke. Links von der Kurpfalzstraße werden die Quadratreihen mit A bis K bezeichnet, rechts davon mit L bis U. Die Quadratspalten werden von der Kurpfalzstraße ausgehend nach links aufsteigend und nach rechts aufsteigend mit den Ziffern 1 bis 7 bezeichnet. Die Hausnummern beginnen immer der dem Schloss am nächsten zugewandten Ecke eines Quadrats. Links der Kurpfalzstraße erfolgt die Nummerierung im Gegenuhrzeigersinn, rechts der Kurpfalzstraße im Uhrzeigersinn.
- Der Weg von Punkt A in B4 nach Punkt B in R5 ist etwa 1 400 m lang.
- Wege mit „kürzester Weglänge“ berechnen sich nach dem Muster

$$d(A, B) = |x_B - x_A| + |y_B - y_A|.$$

Dabei spielt es keine Rolle, welche Eckpunkte man unterwegs ansteuert, vorausgesetzt man kann sich immer nur nach rechts oder nach oben bewegen.

1.2 Ein mathematisches „Mannheimer-Quadrat“

Auftrag 2:

Ein kürzester Weg von A(2|1) nach B(8|6) hat die Länge $d = 11$.

Der längste Weg, den man von O aus gehen kann, hat die Länge $d = 20$.

Auftrag 3:

- Für den Abstand eines Punktes $P(x|y)$ vom Ursprung $O(0|0)$ gilt $d(O, P) = x_P + y_P$.
- Für den Abstand des Punktes $A(a_1|a_2)$ zum Punkt $B(b_1|b_2)$ gilt

$$d(A, B) = |b_1 - a_1| + |b_2 - a_2|$$

Auftrag 4:

- Z.B. A(0|6), B(4|2), C(1|5), D(3|3) haben von O den Abstand 6.
- E(2,5|3,5), F(5,8|0,2).

Auftrag 5:

- $P_1(0|4)$, $P_2(1|3)$, $P_3(2|2)$, $P_4(3|1)$, $P_5(4|0)$.
- Ergebnis: Punkte $P(x|y)$, welche vom Ursprung den Abstand c haben, liegen auf Geraden mit der Gleichung $x + y = c$ bzw. $y = c - x$ (die Geraden haben die Steigung -1 und den Achsenabschnitt c).

2.1 Vorstellen einer Simulation (GeoGebra)

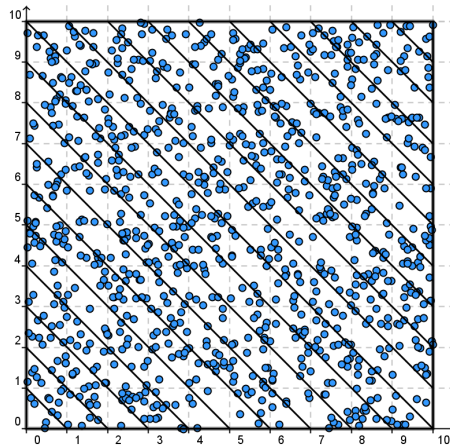
Auftrag 6:

- $P(4 \leq X \leq 5)$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, mit der ein zufällig auf die Tischplatte auftreffender Regentropfen von O den Abstand c mit $4 \leq c \leq 5$ hat.
- $P(0 \leq X \leq 5)$ wie a) mit $0 \leq c \leq 5$
- $P(X \leq 5)$ wie a) mit $0 \leq c \leq 5$
- Es gibt keinen Unterschied.

3. Diskretisierung des Zufallsversuchs – Die Zufallsvariable X_1

Auftrag 7:

a)



b) $c \leq X_1 < c+1$ mit $c=0 \dots 19$

c) Die geometrische Streifenbreite hat den Wert $\sqrt{2}$, die Mannheimer-Distanz-Breite den Wert 2.

d) X_1 hat 20 Ausgänge.

Auftrag 8:

Siehe Text und Grafiken zu 5. Verfeinerung der Zufallsvariablen X_1 .

Auftrag 9 (Verständnisübung)

a) $P(0 \leq X \leq 5) = 0,125$

b) $P(0 \leq X \leq 20) = 1$

c) $P(5 \leq X \leq 10) = 0,375$

d) $P(3 \leq X \leq 5) = 0,08$

Auftrag 10 (Begriffsverständnis)

a) $P(5 \leq X \leq 5) = 0$, die „Einzelwahrscheinlichkeit“ einer stetigen Zufallsvariablen ist 0.

b) $P(5 \leq X < 8) = P(5 \leq X \leq 8)$

Auftrag 11

Siehe zweite Grafik zu 5. Verfeinerung der Zufallsvariablen X_1 .

Weitere Anwendungen:

Aufgabe 1:

a) Dichtefunktion: $f(x) = \frac{2}{R} \cdot x$ bzw. $f(x) = 2 \cdot x$ für $R=1$.

b) $P(r \leq X \leq s) = \int_r^s \frac{2}{R} \cdot x \, dx$

Aufgabe 2

a) $p = \frac{1}{60}$

b) $p = \frac{1}{600}$

c) Dichtefunktion: $f(x) = \frac{1}{6,5 - 0,5} = \frac{1}{6}$ falls $0,5 \leq x < 6,5$

Für die Wahrscheinlichkeitsfunktion gilt dann: $P(x \leq X) = F(x) = \frac{x - 0,5}{6}$

d) a) $P(X = 2,2) = \frac{1}{60}$, b) $P(X = 4,13) = \frac{1}{600}$

und c) $P\left(\frac{1}{7} \leq X \leq \sqrt{30}\right) = \frac{\left(\sqrt{30} - \frac{1}{7}\right)}{6} \approx 0,8891$