

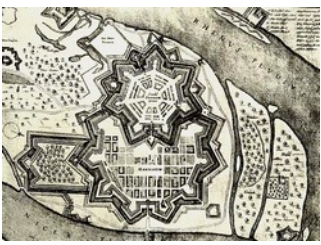
Begriffsbildung

stetige Zufallsgröße

am Beispiel

„Zufallsregen im Mannheimer-Distanz-Quadrat“

Autoren: Matthias Taulien / Rolf Reimer



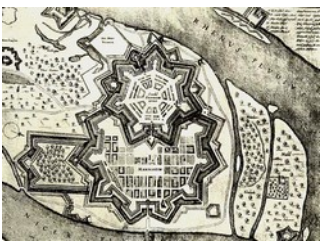
Kernidee

- Bei stetigen Verteilungen ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$F(x) = P(X \leq x)$$

- oft nicht in geschlossener Form darstellbar (z.B. bei der Normalverteilung).
- Die lokale Änderungsrate der Wahrscheinlichkeitsverteilung lässt sich dagegen angeben (sogenannte Dichtefunktion).

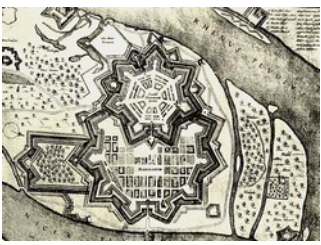
$$f(x) = P'(X = x)$$



Fachlicher Hintergrund

- Mit Hilfe der Dichtefunktion f lässt sich die Wahrscheinlichkeit über eine Integration berechnen:

$$P(r \leq X \leq s) = \int_r^s f(x) dx$$



Fachlicher Hintergrund

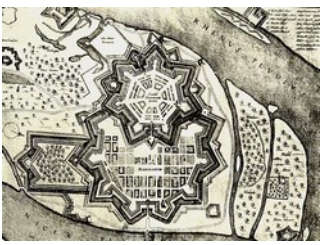
Für stetige Zufallsgrößen müssen folgende Eigenschaften gelten:

$$1. \quad P(r \leq X \leq s) \geq 0 \quad [r; s] \subseteq [a; b]$$

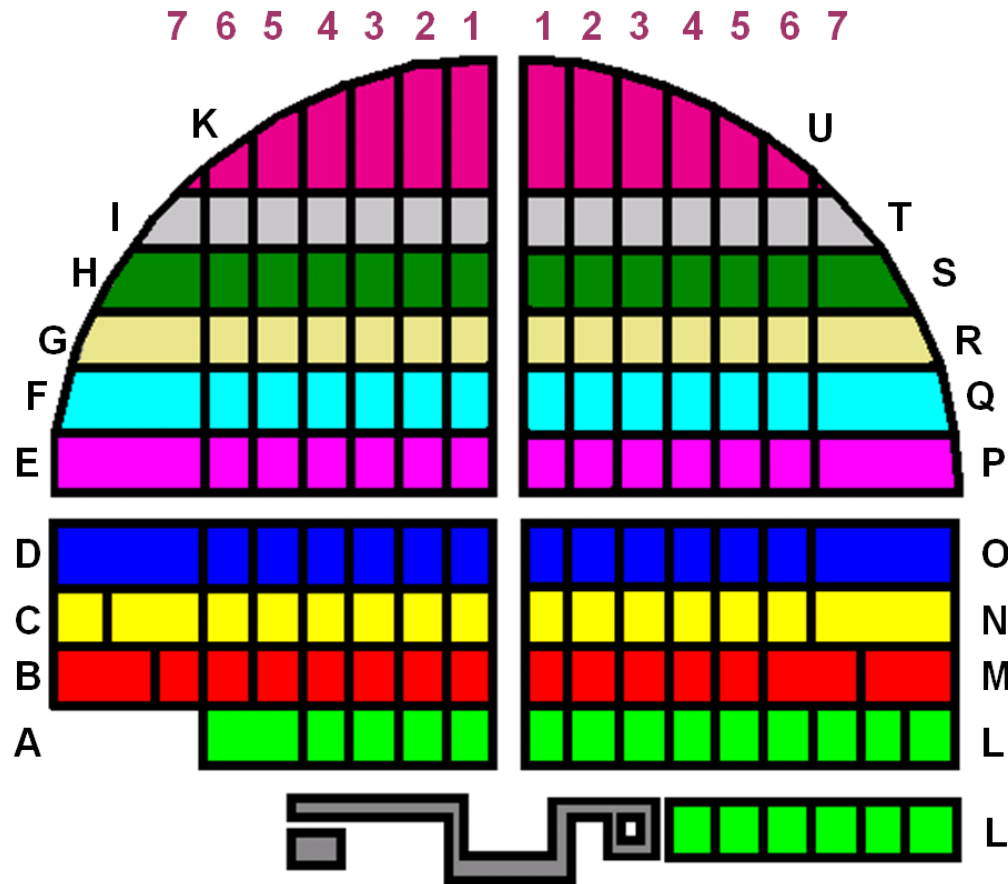
„Wahrscheinlichkeiten sind nie negativ.“

$$2. \quad P(a \leq X \leq b) = 1$$

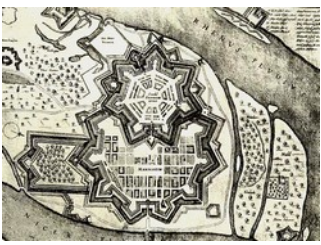
„Das sichere Ereignis hat die Wahrscheinlichkeit 1.“



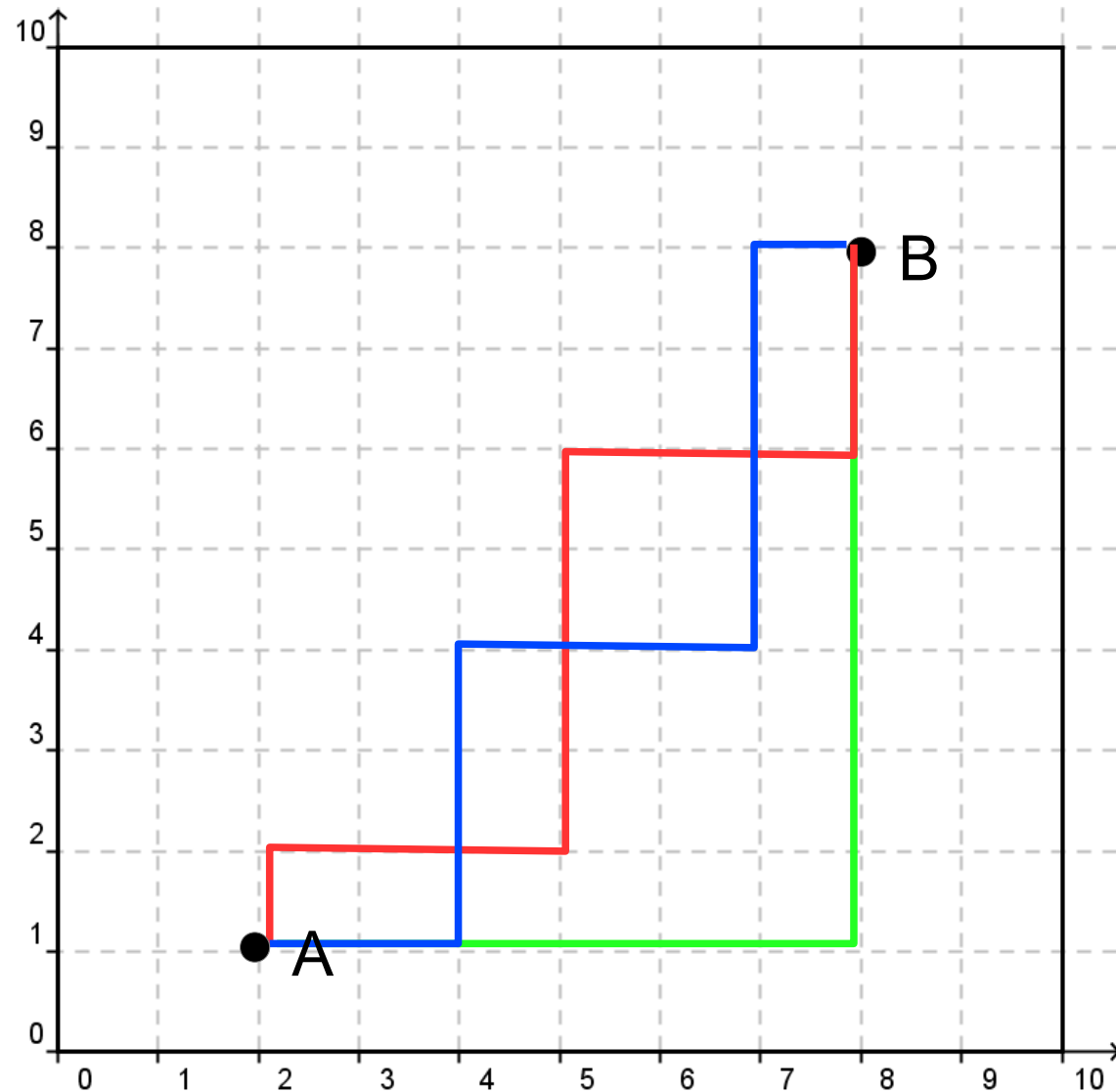
Mannheimer-Distanz

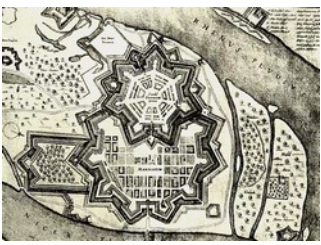


Weglängen werden als Summe der Wege in „x- und in y-Richtung“ betrachtet.



Das Quadrat-Modell





Das Quadrat-Modell

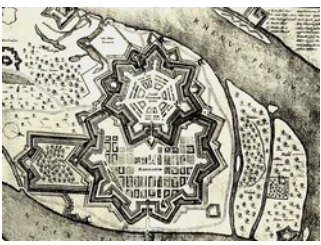
Auftrag 1:

Erstellen Sie im Heft eine maßstabsgetreue Zeichnung des Quadrates ($1 \text{ dm} \triangleq 1 \text{ cm}$).

Auftrag 2:

Welche Länge hat ein kürzester Weg von $A(2|1)$ nach $B(8|6)$?

Welche Länge hat der längste Weg, den man von O aus gehen kann?

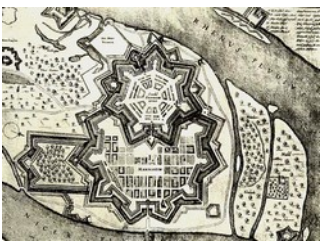


Das Quadrat-Modell

Auftrag 3:

Die Länge eines kürzesten Weges von einem Punkt P zu Q wird auch „Abstand von P zu Q “ genannt.

- a) Stellen Sie eine Formel auf für den Abstand eines Punktes $P(x|y)$ vom Ursprung $O(0|0)$.
- b) Stellen Sie eine Formel auf für den Abstand des Punktes $A(a_1|a_2)$ zum Punkt $B(b_1|b_2)$.

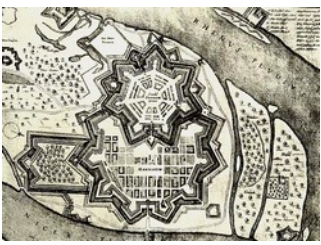


Das Quadrat-Modell

Auftrag 4:

Wir suchen Punkte, die vom Ursprung O jeweils den gleichen Abstand haben.

- Finden Sie mindestens vier Punkte, die von O den Abstand 6 haben.
- Nennen Sie zwei weitere Punkte mit Abstand 6 von O , deren Koordinaten nicht ganzzahlig sind. Stellen Sie das Ergebnis grafisch dar.



Das Quadrat-Modell

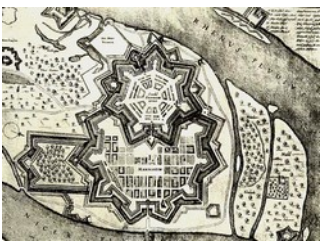
Auftrag 5:

- a) Bestimmen Sie mindestens fünf Punkte, welche vom Ursprung O aus auf Wegen der Länge 4 zu erreichen sind.
- b) Stellen Sie eine Vermutung auf über die Lage aller Punkte, welche vom Ursprung O den Abstand c haben.

Ergebnis: Punkte $P(x|y)$, welche vom Ursprung den Abstand c haben, liegen auf Geraden mit der Gleichung

$$x + y = c \text{ bzw. } y = c - x$$

(die Geraden haben die Steigung -1 und den Achsenabschnitt c).

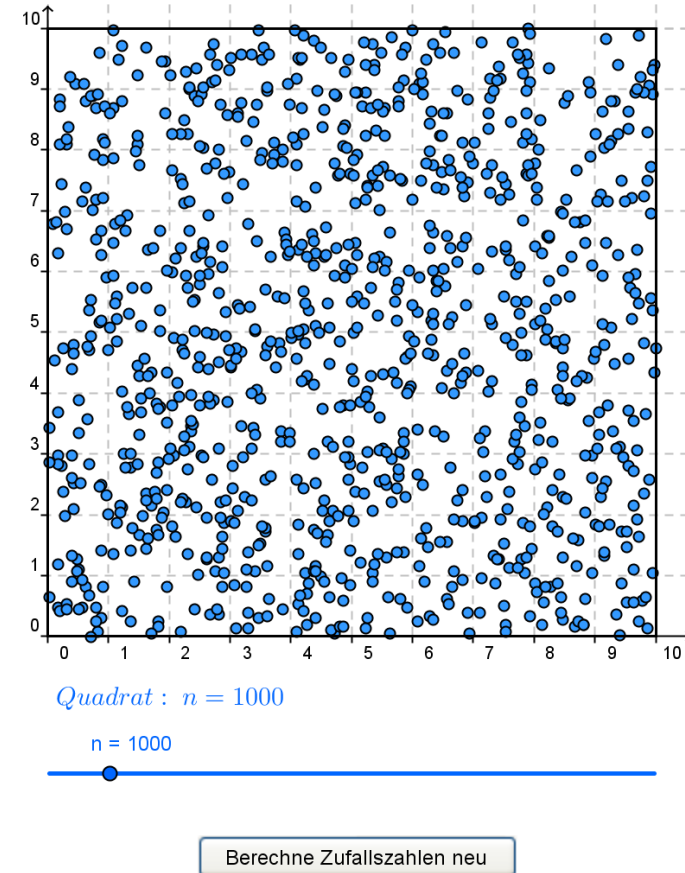


Das Quadrat-Modell

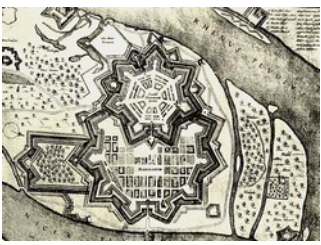
Auf unser Quadrat soll es gleichmäßig regnen.

Für auftreffende Regentropfen am Punkt $P(x|y)$ wird eine Zufallsgröße X beschrieben durch die Eigenschaft:

„Die Mannheimer-Distanz von Punkt P zum Ursprung O ist konstant“.



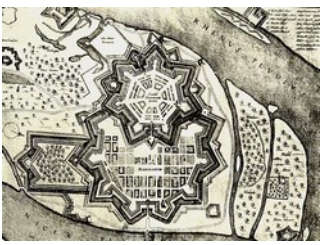
GeoGebra_Dateien/01_Regentropfen_Quadrat.html



Das Quadrat-Modell

Auftrag 6:

- a) Was bedeutet $P(4 \leq X \leq 5)$?
- b) Was bedeutet $P(0 \leq X \leq 5)$?
- c) Was bedeutet $P(X \leq 5)$?
- d) Gibt es einen Unterschied bei den Fragen b) und c)?



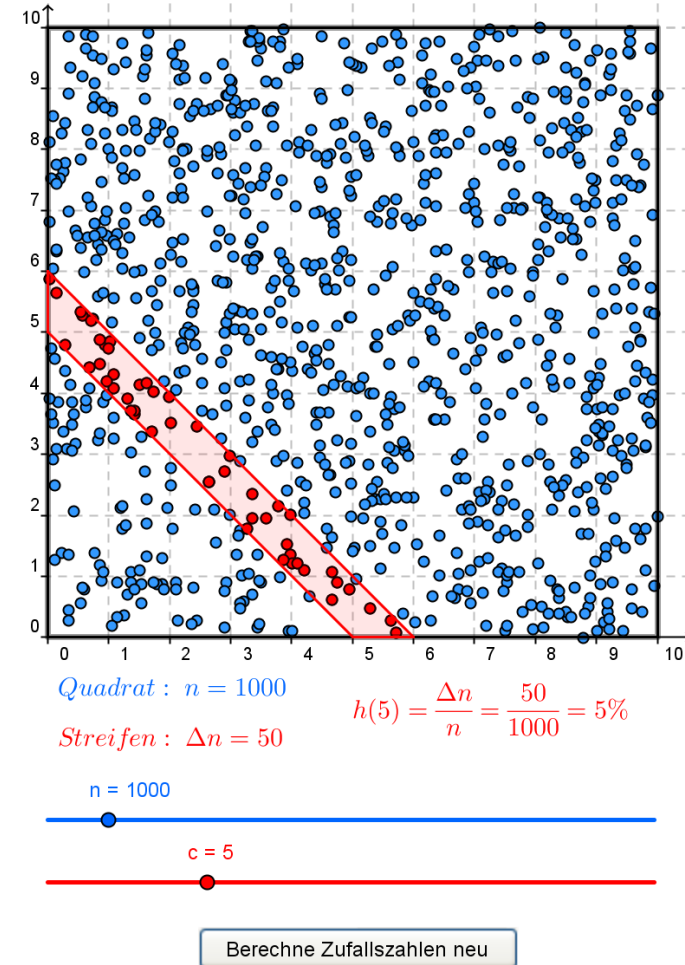
Das Quadrat-Modell

Das Quadrat soll in „Parallel-schichten“ mit Steigung -1 unterteilt werden, welche jeweils die Achsenabschnitte

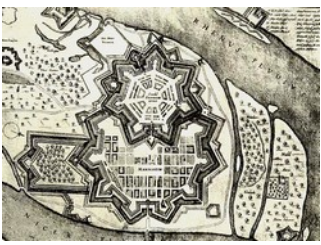
$0 \leq x < 1$, $1 \leq x < 2$, ..., $9 \leq x < 10$ abdecken.

Die Zufallsvariable X_1 :

„P(x|y) liegt in einem der Streifen“ beschreibt ein endliches Zufallsexperiment.



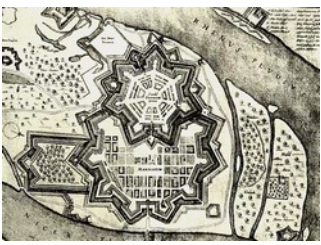
GeoGebra_Dateien/02_Regentropfen_Quadrat.html



Das Quadrat-Modell

Auftrag 7:

- a) Zeichnen Sie die Situation im Maßstab 1:10.
- b) Geben Sie eine mathematische Formulierung für die Zufallsvariablen X_1 mit Hilfe der Mannheimer-Distanz an.
- c) Was ist der Unterschied zwischen der geometrischen Streifenbreite und der „Mannheimer-Distanz-Breite“?
- d) Wie viele Ausgänge hat X_1 ?



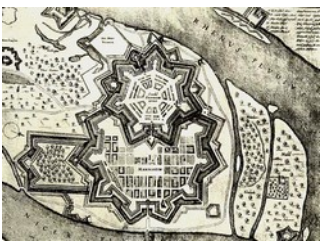
Das Quadrat-Modell

[GeoGebra_Dateien/02_Regentropfen_Quadrat.html](#)

Auftrag 8:

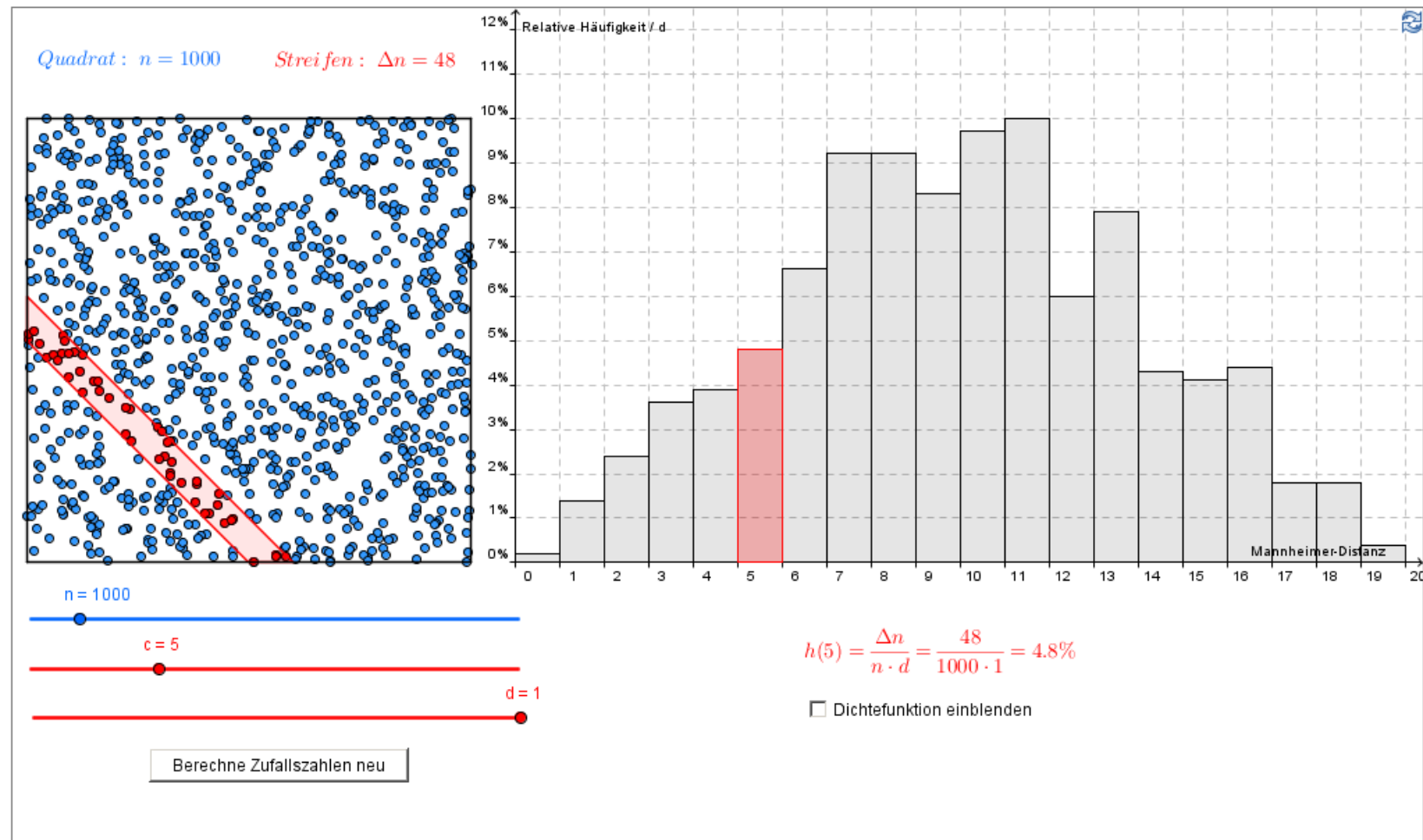
Führen Sie mit Hilfe der oben angegebenen Datei eine Simulation für $n = 10\,000$ durch. Erstellen Sie eine Häufigkeitsverteilung der Zufallsvariablen X_1 .

Zeichnen Sie ein zugehöriges Histogramm.

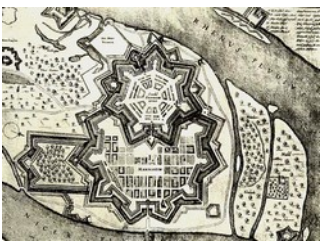


Das Quadrat-Modell

Häufigkeitsverteilung der Tropfenzahlen pro Streifen und Streifenbreite.



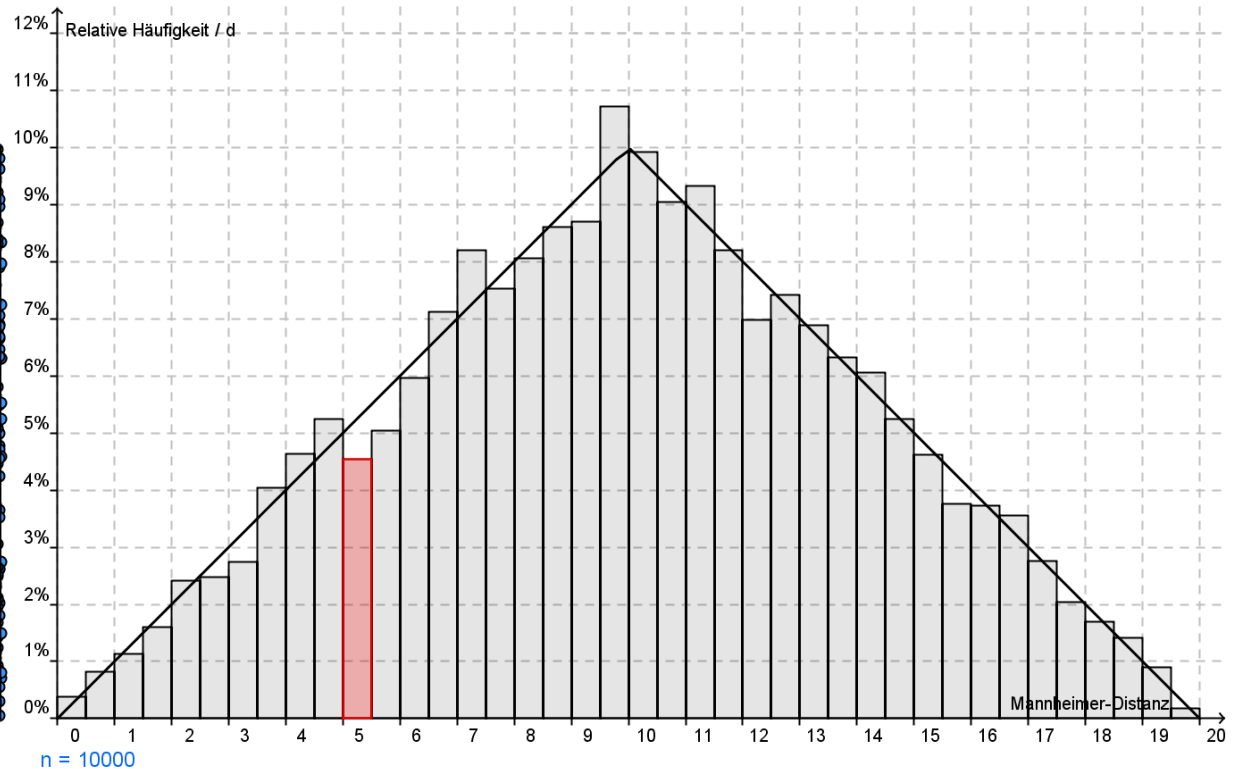
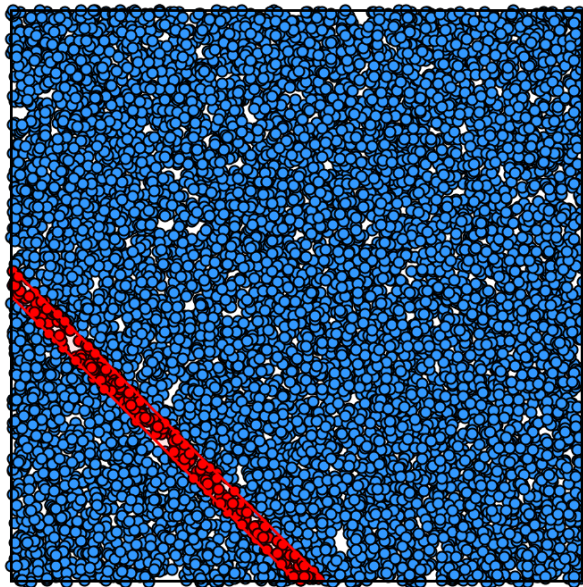
GeoGebra_Dateien/03_Regentropfen_Quadrat.html



Das Quadrat-Modell

Quadrat : $n = 10000$

Streifen : $\Delta n = 227$



$n = 10000$

$c = 5$

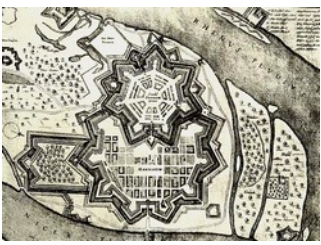
$d = 0.5$

Berechne Zufallszahlen neu

$$h(5) = \frac{\Delta n}{n \cdot d} = \frac{227}{10000 \cdot 0.5} = 4.54\%$$

☒ Dichtefunktion einblenden

Verfeinerung für $d = 0,5$ mit $n = 10\,000$

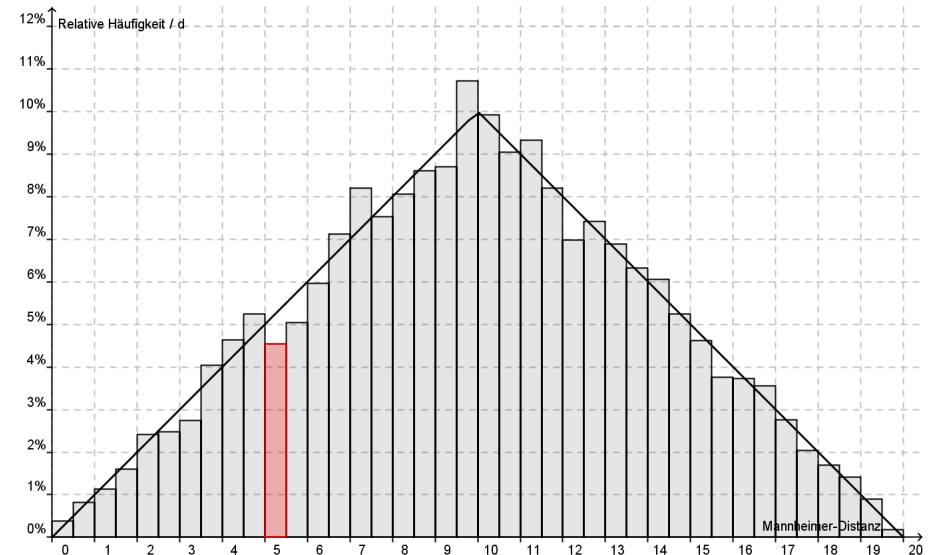


Das Quadrat-Modell

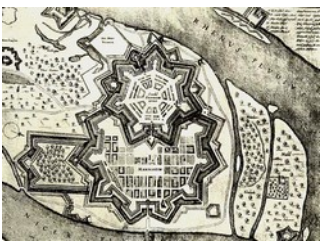
Bei $\frac{P(x \leq X_d \leq x + d)}{d}$ d gegen null gehen lassen,

dann geht die relative Häufigkeit pro Distanz-zuwachs d gegen

$$P'(X_d = x).$$



Das heißt, unser Diagramm zeigt die Ableitungsfunktion P' der Wahrscheinlichkeitsfunktion P .

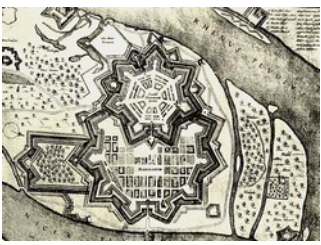


Bestimmung der Dichtefunktion

Formal:

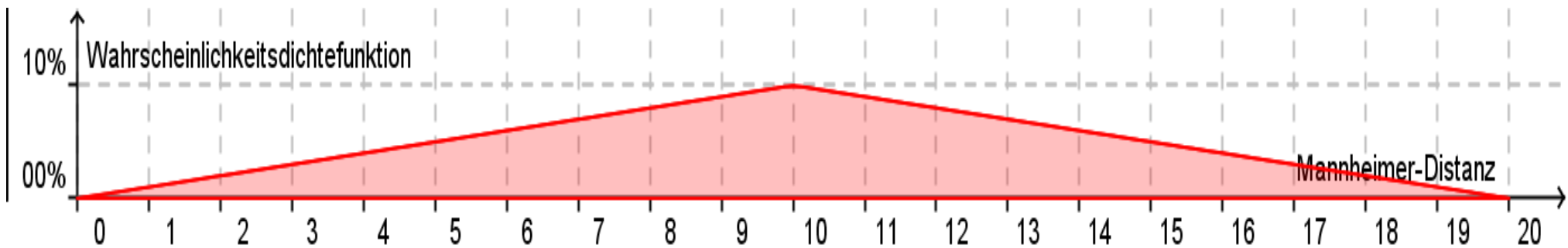
Für die Ableitung von $F(x) = P(X \leq x)$ gilt:

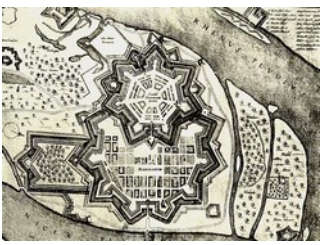
$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{d \rightarrow 0} \frac{F(x+d) - F(x)}{d} \\ &= \lim_{d \rightarrow 0} \frac{P(X \leq x+d) - P(X \leq x)}{d} \\ &= \lim_{d \rightarrow 0} \frac{P(x \leq X \leq x+d)}{d} \\ &= P'(X=x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$



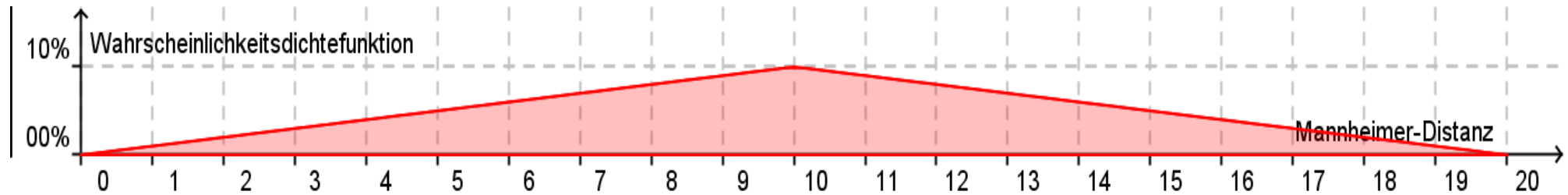
Bestimmung der Dichtefunktion

- Annahme:
Die Ableitungsfunktion $P'(X=x)$
wächst linear für $0 \leq X < 10$
und fällt linear für $10 \leq X \leq 20$
- Wegen $P(0 \leq X \leq 20) = 1$ gilt $\int_0^{20} P'(X=x) dx = 1$



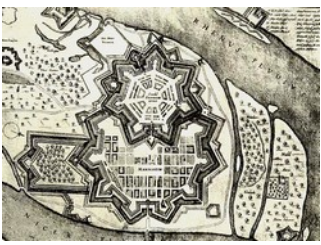


Bestimmung der Dichtefunktion



Es gilt:

$$P'(X=x) = \begin{cases} \frac{1}{100} \cdot x & , \text{ falls } 0 \leq x < 10 \\ \frac{1}{100} \cdot (20 - x) & , \text{ falls } 10 \leq x \leq 20 \end{cases}$$



Festigungen

Auftrag 9:

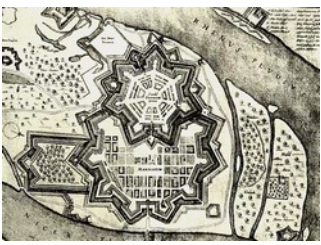
Bestimmen Sie mit der obigen Definition die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses und interpretieren Sie das Ergebnis.

a) $P(0 \leq X \leq 5)$

b) $P(0 \leq X \leq 20)$

c) $P(5 \leq X \leq 10)$

d) $P(3 \leq X \leq 5)$



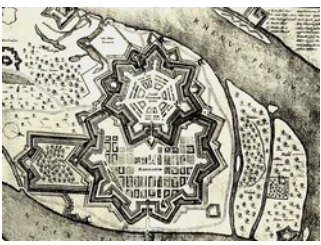
Festigungen

Auftrag 10:

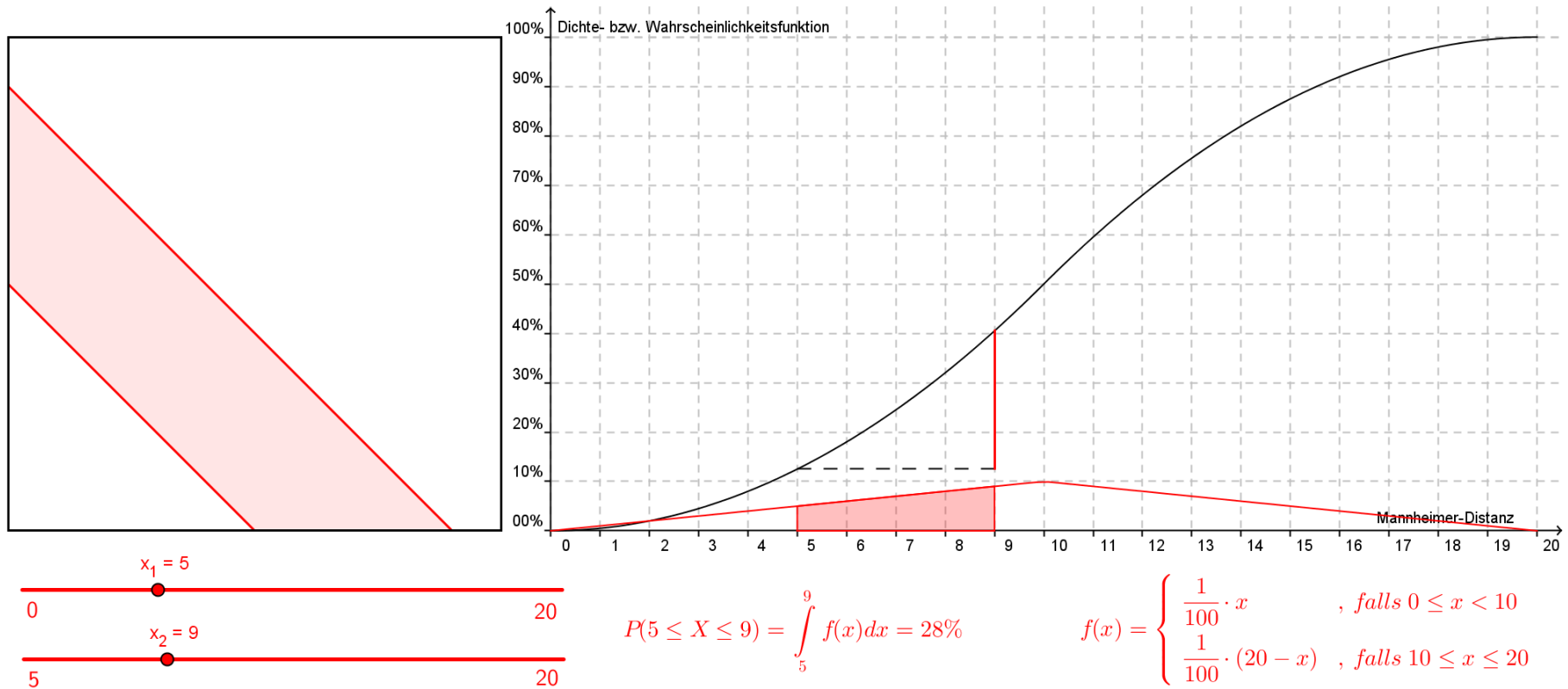
- a) Berechnen Sie $P(5 \leq X \leq 5)$.
Interpretieren Sie das Ergebnis.
- b) Warum ist eine Aufgabenstellung wie z. B.
 $P(5 \leq X < 8)$ nicht sinnvoll?

Auftrag 11:

Vergleichen Sie für eine Simulation mit $d=1$ die relativen Häufigkeiten mit den berechneten Wahrscheinlichkeiten mit der Dichtefunktion.



Ergebnis



GeoGebra_Dateien/04_Regentropfen_Quadrat.html