3 Erziehen im Mathematikunterricht

Mit GeoGebra zu den klassischen Tugenden der Elementargeometrie: Konstruieren statt „Fummeln“ – exakt beschreiben – sauber zeichnen

Wolfgang Riemer

Warum betreiben wir Geometrie? Noch *bevor* es ab Klasse 8 um Aspekte des *Beweisens* geht, spielt in den Klassen 6 und 7 die Entwicklung einer positiven Einstellung zu *planvollem Vorgehen* beim *Konstruieren* von Zeichnungen eine zentrale Rolle. Dazu kommt bei der Anfertigung von Konstruktionsbeschreibungen die Förderung der Fachsprache und eine bewusste (!) Abgrenzung von der Umgangssprache. Trotz einer gehörigen Portion Enthusiasmus waren wir mit den Ergebnissen unserer klassischen Bemühungen oft nicht zufrieden – und begannen mit GeoGebra zu experimentieren...

3.1 Probieren versus Konstruieren

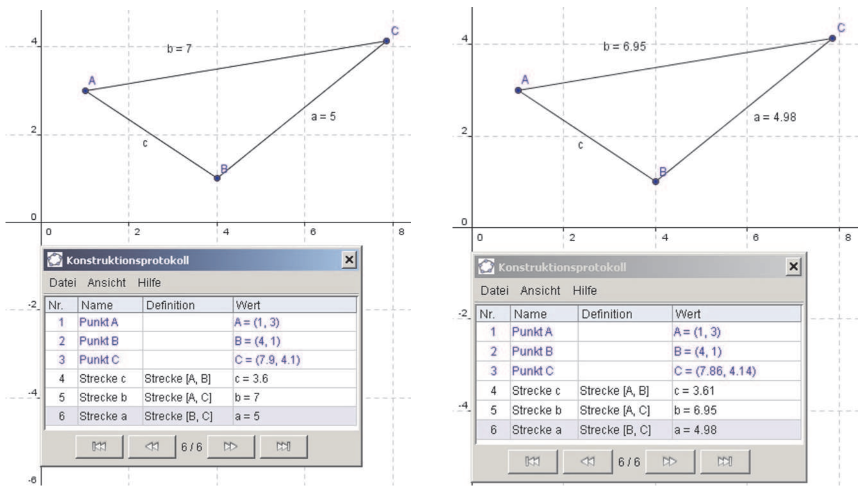
Beispiel 3.1
Die 6a hat gerade gelernt, mit Schnur oder Zirkel Kreise zu zeichnen und weiß, dass „ein Kreis mit Radius 3 cm“ aus allen Punkten besteht, die vom Mittelpunkt M genau 3 cm entfernt sind.

Nun sollen die Kinder einen Punkt zeichnen („konstruieren“), der von $A(1;3)$ genau 7 cm und von $B(4;1)$ genau 5 cm entfernt ist.

Mustafa kommt ans Pult. Mit spitzem Bleistift gezeichnet, bietet er Ihnen voller Stolz in seinem Heft einen solchen Punkte C an. Sie messen nach, es stimmt. Haargenau! Nur leider sind in Mustafas Heft weder Zirkelspuren zu finden noch ein Einstich einer Zirkelspitze. Er hat „gefummelt“ „probiert“, nicht „konstruiert“. Sie haben „schlechte Karten“, wenn Sie Mustafa davon überzeugen wollen, dass sein höchst präzises Zeichenprodukt Ihrem Erwartungshorizont „konstruieren“ nicht entspricht. Aber woher soll Mustafa wissen, was Sie unter konstruieren verstehen? Hätten Sie die Verwendung des Zirkels in der Aufgabenstellung fordern müssen? Aber dann wäre ja schon alles verraten gewesen, Mustafa sollte selber auf die Verwendung des Zirkels kommen, kam er aber nicht, bei ihm ging es „durch Fummeln“ auch so!

Der Mathematikdidaktiker Van Hiele hat eine Stufentheorie für die Sprache in der Geometrie entwickelt (siehe [Hie86]). Aus Sicht dieser Van Hiele’schen Theorie sind für dieses „Kommunikationsproblem“ zwischen Mustafa und Ihnen verschiedene Stufen der Entwicklung geometrischer Begriffe verantwortlich. Mustafa argumentiert auf der *visuell-intuitiven* Stufe 0 des anschauungsgebundenen Denkens, die in der Begriffsentwicklung nicht übersprungen werden kann: Er denkt an seine konkrete Figur in seinem Heft, die er mit seinem Stift gezeichnet hat. Sie argumentieren auf der *beschreibenden* Stufe 1 oder gar auf der *informell-deduktiven* Stufe 2. Aber anstelle eines Vortrages über das Konstruktionen lassen Sie Mustafa und die anderen Schüler der 6a ihre Zeichnungen mit GeoGebra ausführen (Abb. 3.1a).

Wieder präsentiert Mustafa seine Lösung voller Stolz... aber statt selber nachzumessen, erhöhen Sie die Anzahl der Nachkommastellen (Abb. 3.1b) und Mustafa hat mit seiner „Probierlösung“ keine Chance mehr. Das „Fummeln“ wird zu einem Stunden füllenden Programm, und



(a) Einstellung auf eine Nachkommastelle (b) Einstellung auf zwei Nachkommastellen

Abbildung 3.1: Gesucht wird ein Punkt C, der von A 7 cm und von B 5 cm entfernt ist.

immer, wenn man es mit der Maus geschafft hat, den Abstand $d(A,C)$ auf 7,000 einzustellen, verrutscht der Abstand $d(B,C)$ auf einen Wert, der von 3,000 verschieden ist. Erst die Verwendung zweier Kreise (Abb. 3.2) führt zum Erfolg.

Für Schüler ist das Argument, dass man durch „Probieren" nur ungenaue Zeichnungen erhält, überzeugender als die Tatsache, dass „saubere Konstruktionen" Ergebnisse liefern, die gegenüber dem Ziehen an den Ausgangspunkten invariant sind. „Ziehen an den Ausgangspunkten ist unfair, weil die Ausgangspunkte auf dem Papier ja auch fest sind".

Beispiel 3.2
Wenn man nach der Entdeckung des gleichseitigen Dreiecks mit seinen 60^o-Winkeln im Sinne einer offenen Aufgabenstellung die Zeichnung eines regelmäßigen Sechsecks „in Auftrag" gibt (...und als Lehrer dabei insgeheim auf die Zirkelkonstruktion 3.3c hofft...), sind immer auch „Fummelkonstruktionen" (Abb. 3.3a und b) dabei.

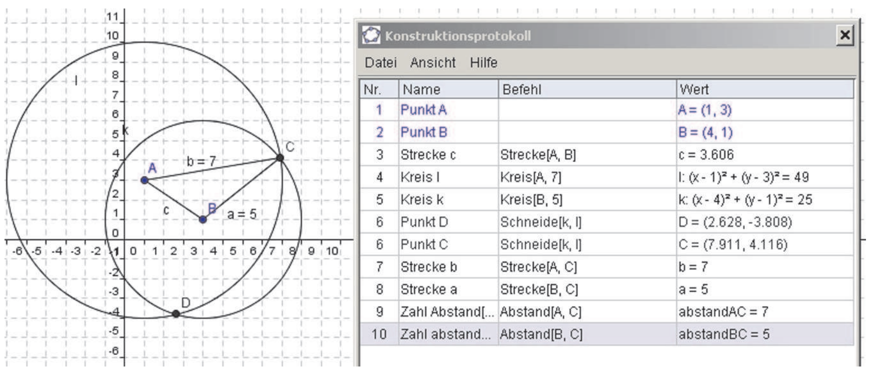
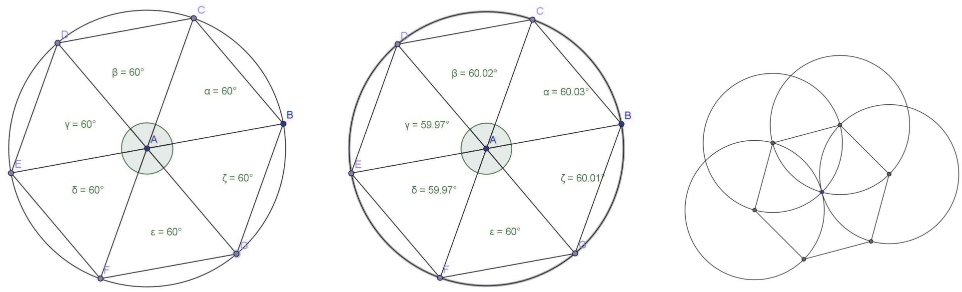


Abbildung 3.2: Eine Konstruktion erfüllt auch bei vier Nachkommastellen die geforderten Vorgaben.



(a) Ein regelmäßiges Sechseck

(b) . . . wird durch Erhöhen der Nachkommastellen als „Fummelprodukt“ entlavt.

(c) Zirkelkonstruktion, die – wenn man sie auf dem Papier ausführt – nach einer Begründung dafür „schreit“ dass man nach 5 Schritten *genau* beim ersten Punkt landen *muss*.

Abbildung 3.3: Zur Konstruktion von Sechsecken

3.2 Konstruktionen beschreiben

Neben der aus der Perspektive eins Schülers „beliebig hohen Genauigkeit“ ist es das während des Zeichnens erstellte Konstruktionsprotokoll, das GeoGebra didaktisch auszeichnet. Durch Analyse des Protokolls lernt man, ausgeführte Konstruktionsschritte formal „sauber“ zu beschreiben, also Umgangs- und Fachsprache voneinander abzugrenzen und Fachsprache bewusst einzusetzen.

Wer solche Konstruktionen schon einmal unterrichtet und Klassenarbeiten korrigiert hat, weiß

- mit welchem Widerwillen Schüler durchgeführte Konstruktionen beschreiben und
- welche „Welten“ zwischen Schülerprodukten und fachsprachlich akzeptablen Lösungen liegen.

Was gemeint ist, soll am Beispiel einer einfachen Dreieckskonstruktion erläutert werden:

Beispiel 3.3
Dreieckskonstruktion $\mathbf{SSW_k}$ (zwei Seiten und der Winkel, der der kürzeren Seite gegenüberliegt.)

- Konstruiere ein Dreieck *ABC* mit $\alpha = 25°$, $a = 2{,}5\ cm$, $c = 5\ cm$
- Fertige eine Planskizze an.
- Beschreibe die Konstruktion

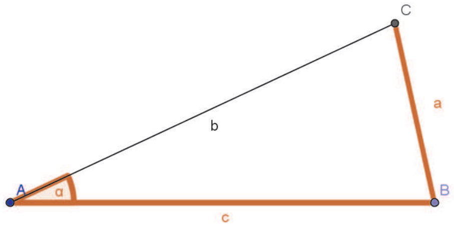


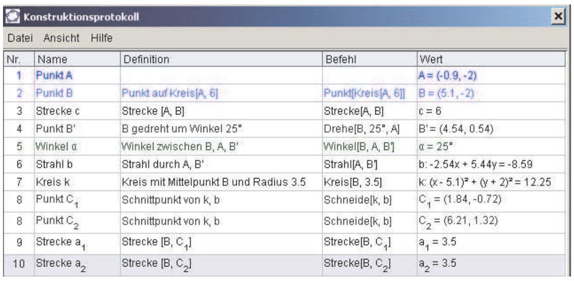
Abbildung 3.4: Planskizze

Sandras Konstruktionsbeschreibung
(Umgangssprache)

Ich ziehe einen 6 cm langen Strich. Am rechten Ende (*B*) steche ich den Zirkel in das Blatt und stelle ihn auf 3,5 cm ein. Jetzt zirkle ich einen Halbkreis nach oben. Dieser Halbkreis schneidet den Winkel, den ich vorher am linken Ende der Strecke mit dem Geodreieck eingezeichnet habe, in zwei Punkten. Jetzt verbinde ich die erhaltenen Punkte miteinander und sehe, dass es zwei Dreiecke gibt, die die $\mathrm{SSW}_{\mathbf{k}}$-Konstruktion erfüllen.

Musterlösung
(Fachsprache)

1. Zeichen eine Strecke $c = [A;B]$ der Länge 6 cm.
2. Zeichne einen beliebigen Punkt B' so, dass der Winkel $\alpha = \angle(B;A;B')$ die Größe 25° hat.
3. Bezeichne den Strahl $[A;B')$ mit b.
4. Zeichne um B einen Kreis k mit Radius 3,5 cm.
5. k und b haben zwei Schnittpunkte, die mit C_1 und C_2 bezeichnet werden.
6. Die Dreiecke ABC_1 und ABC_2 sind die gewünschten Dreiecke.



Konstruktionsprotokoll

Datei Ansicht Hilfe

Nr.	Name	Definition	Befehl	Wert
1	Punkt A			A = (-0.9, -2)
2	Punkt B	Punkt auf Kreis[A, 6]	Punkt[Kreis[A, 6]]	B = (5.1, -2)
3	Strecke c	Strecke [A, B]	Strecke[A, B]	c = 6
4	Punkt B'	B gedreht um Winkel 25°	Drehe[B, 25°, A]	B' = (4.54, 0.54)
5	Winkel α	Winkel zwischen B, A, B'	Winkel[B, A, B']	α = 25°
6	Strahl b	Strahl durch A, B'	Strahl[A, B']	b: -2.54x + 5.44y = -8.59
7	Kreis k	Kreis mit Mittelpunkt B und Radius 3.5	Kreis[B, 3.5]	k: (x - 5.1)² + (y + 2)² = 12.25
8	Punkt C_1	Schnittpunkt von k, b	Schneide[k, b]	C_1 = (1.84, -0.72)
8	Punkt C_2	Schnittpunkt von k, b	Schneide[k, b]	C_2 = (6.21, 1.32)
9	Strecke a_1	Strecke [B, C_1]	Strecke[B, C_1]	a_1 = 3.5
10	Strecke a_2	Strecke [B, C_2]	Strecke[B, C_2]	a_2 = 3.5

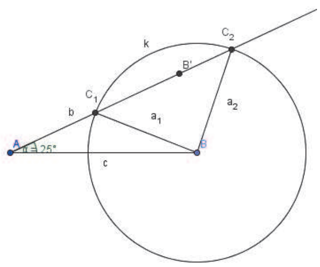


Abbildung 3.5: Konstruktion mit Protokoll in GeoGebra

Der unterrichtspraktische Nutzen automatisch erzeugter Konstruktionsprotokolle lässt sich wie folgt umreißen:

1. Konstruktionsprotokolle sind kurz und normiert: Der Befehlsvorrat ist klar abgegrenzt, übersichtlich und leicht sachgerecht einzusetzen.
2. Formulierungen hängen nicht von stilistischen Präferenzen ab. (Statt an die Strecke $[A;B]$ im Punkt A einen Winkel α mit „freiem Schenkel b" anzutragen, dreht man B um A... etc.)
3. Probierschritte in Konstruktionen (vgl. Abschnitt 3.1) werden als solche entlarvt, denn sie hinterlassen in der Protokoll-Spalte „Befehl" keine Spuren.
4. Man erlernt das Beschreiben von Konstruktionen „handlungsorientiert" durch das Konstruieren und Nachschauen im Protokoll. Eigene Beschreibungen lassen sich selbsttätig kontrollieren. Das ist eine sehr praktikable und effektive Ergänzung zur Korrektur von Protokollbeschreibungen in Plenum, in Partnerarbeit oder durch den Lehrer im Heft.
5. Die präzise Beschreibung von Winkeln durch drei Punkte (z. B. $\alpha = \angle(B;A;B')$, „drehe B um A auf B'") braucht erfahrungsgemäß viel Übung. Der durch den Einsatz von GeoGebra erzielte Trainingseffekt ist wertvoll.

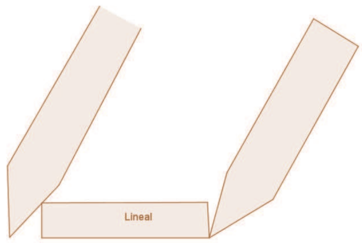
In der Praxis selbst verfasster Konstruktionsbeschreibungen empfiehlt sich – auch in Klassenarbeiten, in denen man aus guten Gründen nach wie vor mit Papier und Bleistift arbeitet – eine Beschränkung auf die Protokollspalten „Name" und „Befehl", wobei die Werte bei Streckenlängen und Winkeln ergänzt werden.

3.3 Erziehen zu sauberem Zeichnen

Trotz der weiten Verbreitung von Geometrieprogrammen scheint es bis heute nicht wünschenswert, auf Bleistift, Zirkel und Lineal zu verzichten. Das kann man aus Sicht der Van-Hiele'schen Stufentheorie begründen: Van-Hiele strebe an, möglichst schnell – sogar schon in der Grundschule – einen hohen Grad an Abstraktion zu erreichen. Dazu muss man gerade die visuell-intuitive und die beschreibende Stufe ernst genommen und durchlebt werden müssen. Auch wenn es paradox erscheinen mag, sind gerade praktische Übungen mit Zeichnen und Beschreiben umso wichtiger, je eher man auch abstrakt mit den Kindern arbeiten möchte.

Die Entwicklung einer Sensibilität für Exaktheit beim Zeichnen (ebenso wie für eine saubere Heftführung und eine lesbare Handschrift) gehört daher zu den unverzichtbaren „Erziehungszielen" im Mathematikunterricht. Mathelehrer mit pädagogischem Ethos heften auch im Smartboard-Zeitalter ein Stückchen Schmirgelpapier an die Seitentafel, um für gut geschärfte Zirkelspitzen (Abb. 3.6b) zu sorgen. In der Tat ist es immer wieder ein Erlebnis zu sehen, wie sich die drei Mittelsenkrechten eines Dreiecks auf dem Papier in einem kleinen Dreieck schneiden. Das sorgt für viel mehr Aufmerksamkeit (Faszination, Beweisbedürfnis), als wenn sie sich „ganz genau" in einem Pixel des Computerbildschirmes schneiden!

Aber warum sollte man Zeichenprogramme nicht nutzen, um die Präzision händischen Zeichnens zu überprüfen? Wenn man z. B. eine motivierende „Schatzsuche" als Wettkampfaufgabe formuliert und anschließend dem Computer die Rolle einer Jury zubilligt, sind äußerst motivierende Geometrie-Stunden garantiert, in denen mit hoher Präzision händisch um die Wette



(a) Gezeichnet wird mit Bleistift, dessen Spitze man immer „vom Lineal weg“ führt (links) und nie in das Lineal hineindrückt (rechts).

(b) Zirkelminen schärfen Profis mit Schleifpapier (flach angeschrägt, nicht rund)

Abbildung 3.6: Sauberes Zeichnen

konstruiert wird. Die Schatzsuche aus Abb. 3.7 ist als Anregung gedacht. Hier treten die Schüler als kleine Teams gegeneinander an.

Auf Goldsuche im Wilden Westen

Vor langer Zeit erbeuteten die Bonitos bei einem Überfall auf eine Postkutsche eine Kiste mit Gold. Nachdem die Bonitos bei einer Schießerei ums Leben kamen, blieb das Gold verschollen. Man fand aber eine Beschreibung und einen Plan, auf der die Bahnlinie von Sweetwater nach Santacroce sowie die Orte Redrock und Blackstone verzeichnet sind.

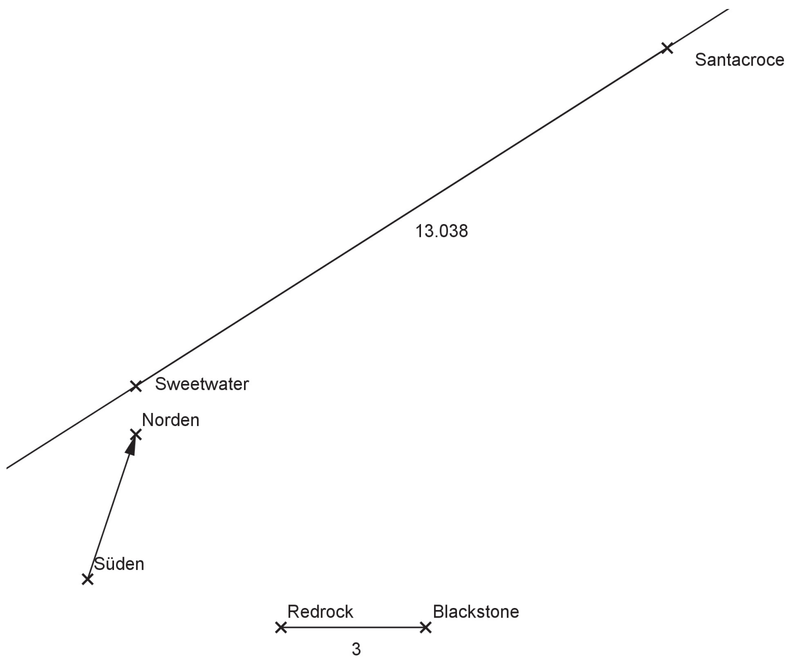


Abbildung 3.7: Schatzkarte – GeoGebra kann im Maßstab 1:1 drucken.

Ein cm auf der Karte entspricht in der Wirklichkeit einem km (Maßstab 1:100 000). Zur Kontrolle: Redrock und Blackstone sind 3 Kilometer voneinander entfernt.

Wegbeschreibung

- *Zwei Kilometer (irgendwo nördlich) von Blackstone und drei Kilometer von Redrock entfernt steht ein Galgen.*
- *Von diesem Galgen aus sieht man am Horizont die Bahnstationen Sweetwater und Santacroce. Peile nun von diesem Galgen aus eine Richtung so an, dass Sweetwater genauso viele Grad links wie Santacroce rechts erscheint. Genau in diese Richtung gehst du 5 Kilometer. Du erreichst die (inzwischen verfallene) Ponderosa-Ranch.*
- *Nun gehst du 10,5 Kilometer genau nach Osten. Dort lag früher einmal die Bärenhütte. Berate dich mit deinem Nachbarn, wenn du nicht mehr weißt, wo Osten liegt.*
- *Da du vor einem Sumpfgebiet stehst, musst du einen Umweg machen: Gehe 2 Kilometer nach Süden, 3 Kilometer nach Osten, dann 5,4 Kilometer nach Norden. Hier ist die alte Goldmine. Wenn sie mehr als 18,3 Kilometer von Sweetwater entfernt ist, findet man hier noch einzelne Nuggets. Hast du eine Chance?*
- *Nun gehe auf kürzestem Wege auf die Bahnlinie Sweetwater-Santacroce zu. Wenn du ganz genau gezeichnet hast, liegt das Gold unter der Bahnschwelle vergraben. Wie weit ist deine Bahnschwelle von Sweetwater entfernt?*

Nach meiner Zeichnung ist die Entfernung zwischen der Bahnschwelle und Sweetwater km.

Das Team, das dem Schatz nach intensivem Denken und genauem Zeichnen am nächsten kommt, erhält die Schürfrechte. Ihr habt 10 Minuten Zeit. Wer nicht fertig wird, muss schätzen. Los geht's.

Die Abbildung 3.8 zeigt die Konstruktion der „exakten Lösung“ mit GeoGebra: der Schatz liegt 15,777 km von Sweetwater entfernt.

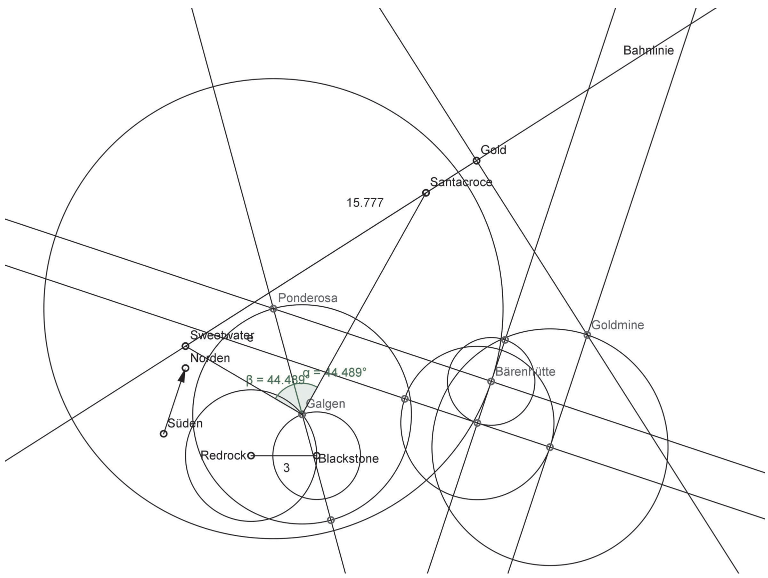
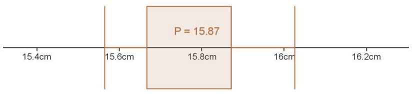


Abbildung 3.8: Exakte Konstruktion mit GeoGebra.

Und in Abb. 3.9 sieht man die händisch konstruierten Lösungen von 11 sauber zeichnenden Mathelehrern. Die Spannweite beträgt 16,03 km − 15,56 km = 0,460 km! Immerhin liegt der „wahre Wert“ in der Box des zugehörigen Plots.



(a) Grafische Darstellung

Christoph	15,89
Sebastian	15,87
Johanna	15,87
Teresa	15,77
Mario	16,03
Andrea	15,59
Siggi	15,87
Sonja	15,77
Jessi	15,56
Urte	15,67
Heyon	15,87
Mittelwert	15,88
Standardabweichung	0,13

(b) Tabelle

Abbildung 3.9: Untersuchung der Messfehler von 11 Mathelehrern

Es ist unschwer nachzuvollziehen, dass die „statistische Untersuchung“ der Ungenauigkeiten bei Lehrern wie bei Schülern auf noch größeres Interesse stößt als die Konstruktion des exakten Ergebnisses mit GeoGebra, weil sie mit subjektiven Gefühlen und Spannung verbunden ist: „Wo liege ich mit meinem Ergebnis im Vergleich zu den anderen?“

3.4 Resümee

Würde man Papier und Bleistift einer Medieneuphorie folgend unreflektiert durch Bildschirm und Maus ersetzen, ginge trotz begeisterter Schülerblicke vieles vom allgemeinbildenden Kern der Schulgeometrie zwischen den Pixeln verloren. Das ist unter Lehrern unbestritten.

Wie hier an den drei Beispielen (Zeichenungenauigkeit, Konstruieren und fachsprachliches Beschreiben) ausgeführt wurde, bietet ein Perspektivwechsel, ein frühes „digitales Nachdenken über händisches Tun“ faszinierende Möglichkeiten gedanklicher Vertiefung und bisher noch wenig ausgetretene Pfade zu einer höheren mathematischen Bewusstheit.

Literatur

[Hie86] VAN HIELE, P. M. (1986). *Structure and Insight.* Orlando, Academic Press.