

Das Glücksrad auf der schiefen Ebene

Spannende Fragen, vernetzende Entdeckungen, überraschende Begründungen (Kl. 6-13) –
Gebrauchsanleitung mit didaktischem und theoretischem Hintergrund

Wolfgang Riemer

Zentrum für schulpraktische Lehrerbildung Köln

1. Abstract

Wenn man eine Haarklemme um einen Pin rotieren lässt, erhält man ein Laplacesches Glücksrad, mit dem man das Werfen fairer Münzen und Würfel nachspielen kann. Im Gegensatz zu Münze und Würfel lässt sich ein solches Glücksrad aber durch leichtes Neigen der Unterlage präzise „zinken“. Man erlebt den fließenden Übergang von Laplace- zu nicht-Laplace Wahrscheinlichkeiten – und deutet Wahrscheinlichkeiten als Hypothesen, die in einem authentischen Modellbildungskreislauf modifiziert werden: Beschreibende Statistik wird schon in der Sekundarstufe I beurteilend, weil sie nicht nur Daten sammelt, sondern echte Fragen beantwortet, spannende Hypothesen bewertet und verbessert. In der Sekundarstufe II bietet das schiefe Glücksrad authentische Anlässe zur Anwendung klassischer Testverfahren.

Mithilfe von Energiebetrachtungen kann man Wahrscheinlichkeiten in Abhängigkeit von der Neigung des Glücksrades berechnen und dabei erleben, wie Wahrscheinlichkeitsdichten Analysis und Stochastik miteinander verknüpfen.

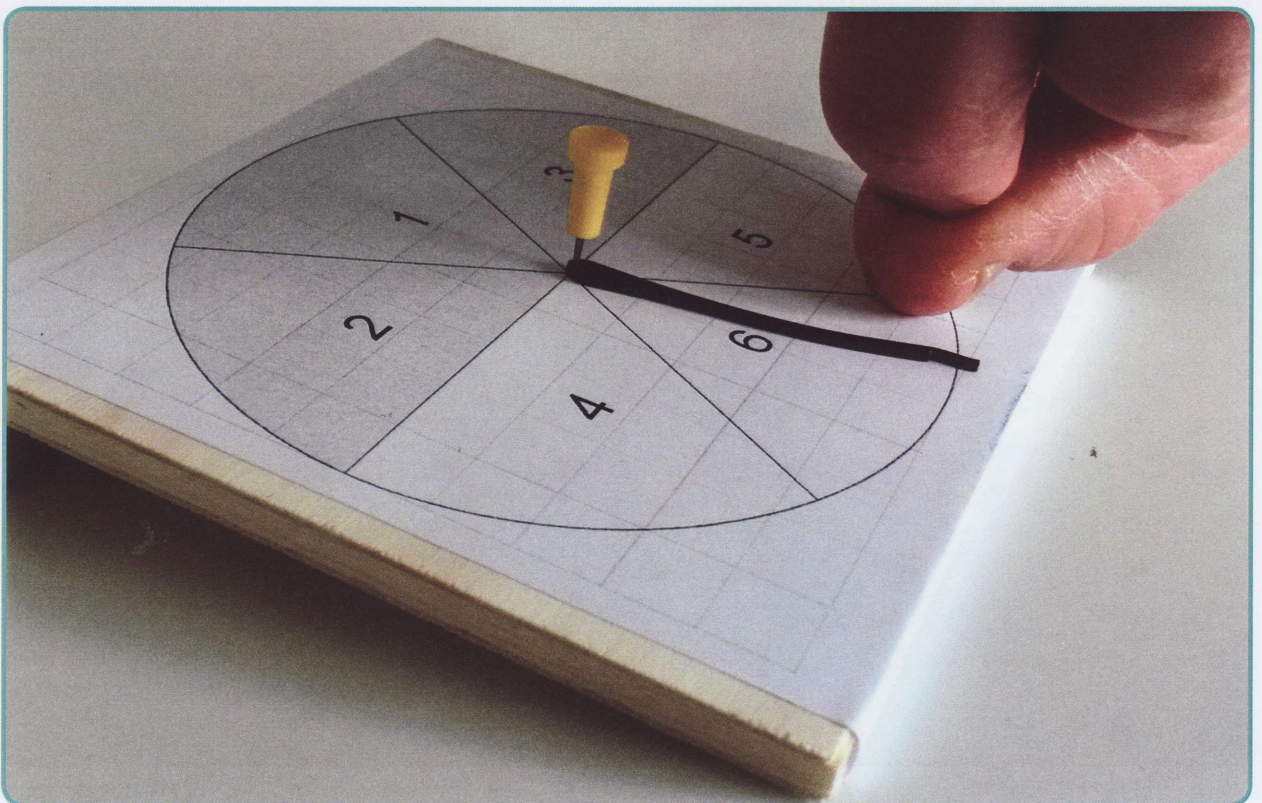


Abbildung 1: Glücksrad auf der schiefen Ebene mit Steigung 10%. Hier wird es im Uhrzeigersinn vom tiefer liegenden Feld 6 aus geschnippt.

2. Wahrscheinlichkeiten als Hypothesen und der Modellierungskreislauf

2.1 Problemstellung

Klasse 7c: Erste Stunde zur Wahrscheinlichkeitsrechnung. Ich starte zur Sicherung des Fundaments mit „Kopfrechnen zu Prozentzahlen“. Anschließend erhält jedes Kind ein Glücksrad (Abb. 1), dessen Felder mit 1 bis 6 so beschriftet sind, dass sich gegenüberliegende Augenzahlen zu 7 addieren – wie bei einem richtigen Würfel. Feld 1 liegt höher, Feld 6 tiefer.

Impuls: „Schaut euch das Glücksrad genau an und schätzt die Chancen, mit denen der Zeiger nach Anschlippen auf den sechs Feldern anhält, in Prozent... HALT! Noch nicht schnippen, nur schätzen! Ungefähr! Nach Gefühl!“

Chance (Alltagssprache) und *Wahrscheinlichkeit* (Fachsprache) werden synonym verwendet.

2.2 Hypothesen formulieren: Spekulieren

Die Kinder akzeptieren das Schnippverbot, tuscheln, kneifen die Augen zusammen und nennen bereitwillig „Prozentzahlen“. Man hält einige an der Tafel fest (Abb. 2) und lässt sie kommentieren. Die folgenden Zitate liefern aufschlussreiche Einblicke in das stochastische Weltbild von Siebtklässlern:

Hannah: „Ich denke, dass die 6 am häufigsten drankommt, weil die 6 ganz unten ist. 4 und 5 sind dasselbe und liegen auch unten. Deswegen sind beide relativ hoch. 1 liegt gegenüber von der 6 und ist oben. Deswegen denke ich, dass die 1 am wenigsten drankommt. Der Rest (2 & 3) sind auch gleich. Dann habe ich die restlichen 20% durch 2 geteilt. Dann hatte ich 2 & 3.“

Alex: „Die Wahrscheinlichkeit rutscht nach unten. Rechts und links ist es gleich.“

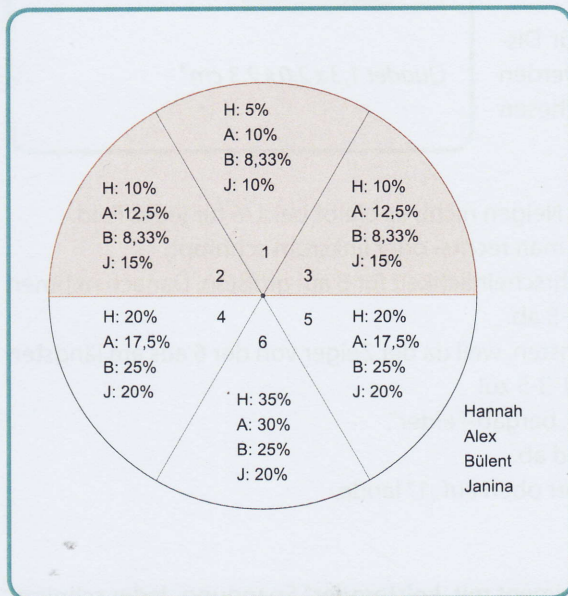


Abbildung 2: Vier Schätzungen

Bülent: „Da die Zahlen 4, 5, 6 sich weiter unten an der Drehscheibe befinden, ist es wahrscheinlicher, dass die Nadel nach unten zeigt. Da alle Felder gleich groß sind, sind alle von unten und oben gleich.“

Nach kritischen Rückfragen der Mitschüler gibt Bülent zu, dass er nur aus Bequemlichkeit – und eigentlich gegen seine innere Überzeugung für die je drei Felder in der oberen und der untere Glücksradhälfte gleiche Wahrscheinlichkeiten ansetzte. Ähnliche Kritik musste Janina einstecken, weil sie – um auf 100% zu kommen – dem Feld 6 die gleiche Chance einräumte wie den Feldern 4 und 5.

Es zeigt sich, dass alle Kinder

- als Summe der Chancen 100% angeben.
Das gehört zu den mit dem Prozentbegriff verbundenen Grundvorstellungen. Hannah beschreibt auch, wie sie das rechnerisch hinbekommt.
- von der Rechts-Links-Symmetrie der Chancen ebenso überzeugt sind wie davon, dass tiefer liegende Felder wahrscheinlicher auftreten als höher gelegene.

Die angegebenen Wahrscheinlichkeiten drücken einerseits aus,

- wie stark die Kinder an das Auftreten der einzelnen Felder glauben (subjektivistischer Aspekt) und andererseits,
- wie häufig die Kinder deren Auftreten bei wiederholtem Glücksraddrehen erwarten (frequentistischer Aspekt).

Die Wahrscheinlichkeiten sind damit Annahmen (Hypothesen), die Vorhersagen machen. Deswegen spricht man hier von einem subjektivistisch geprägten hypothetisch-prognostischen Wahrscheinlichkeitsbegriff, den die Kinder aus dem Alltag mitbringen und der den Laplaceschen Wahrscheinlichkeitsbegriff umfasst. Mit diesen Wahrscheinlichkeiten modellieren die Kinder Wirklichkeit – und sie sind mit hoher Selbstverständlichkeit bereit, ihre Einschätzungen nach Kenntnis experimenteller Ergebnisse zu bezweifeln – genau wie die Hypothesen in der beurteilenden Statistik – um sie anschließend im Sinne eines Modellierungskreislaufs zu verbessern.

Wenn man – immer noch vor dem Experimentieren – Zeit für Diskussionen und zum Austausch von Begründungen einräumt, werden zaghaft auch Zweifel benannt – und es kommen weitere Hypothesen ans Tageslicht. Man hält sie als Forschungshypothesen fest:

- Niko: Die Wahrscheinlichkeiten ändern sich durch das Neigen nicht, es bleibt bei $1/6$ für jedes Feld.
- Doris: Die Wahrscheinlichkeiten hängen davon ab, ob man rechts- oder linksrum schnippt.
- Sebi: Beim Rechtsdrehen (im Uhrzeigersinn) ist die Wahrscheinlichkeit für 6 am größten. Danach nehmen die Wahrscheinlichkeiten in der Reihenfolge 6-4-2-1-3-5 ab.
- Balthasar: Nein, ich glaube, die 5 ist am wahrscheinlichsten, weil da der Zeiger von der 6 aus am längsten unterwegs war. Sie nehmen in der Reihenfolge 6-4-2-1-3-5 zu!
- Ina: Die „bergauf-Felder“ sind wahrscheinlicher als die „bergab-Felder“.
- Simon: Die Wahrscheinlichkeiten hängen vom Startfeld ab.
- Micha: Ich kann so „Ziel-Schnippen“, dass ich fast immer oben auf „1“ lande.

2.3 Experimentieren

Nach der Fülle an Spekulationen erwarten die Kinder das Experiment mit „knisternder“ Spannung. Jeder schnippt 100-mal. Das dauert zusammen mit dem Auszählen gemäß der Kopiervorlage aus dem Anhang ca. 15 Minuten. Dabei ist es wichtig, die Versuchsbedingungen vorab genau auszuhandeln. So kann man verschiedene Schnipptechniken vergleichen, etwa Schnippen „volle Kanne“ versus „Zielschnippen“, so dass man möglichst oben in der Nähe von 1 stehen bleibt. Den Einfluss der Drehrichtung kann man untersuchen, indem eine Hälfte der Lerngruppe im, die andere Hälfte entgegengesetzt zum Uhrzeigersinn schnippt.

Ebenso kann man den Einfluss des Startfeldes, den Einfluss der Steigung (5% - 10% - 15% - 20%) der schiefen Ebene, den Einfluss der verwendeten Materialien (Bierdeckelfilz versus Klebe-Etiketten oder Kunstharz-beschichtetem Laminat aus dem Baumarkt, Haarklemmen versus Sicherheitsnadeln) studieren. Der Phantasie sind keine Grenzen

Der hypothetisch-prognostische Wahrscheinlichkeitsbegriff und die Tatsache, dass man mit Wahrscheinlichkeiten Wirklichkeit modelliert, kommt – anders als beim Einsatz von Spielwürfeln und Reißzwecken – idealtypisch auch beim Würfeln mit Quadern, Legos oder Sechskant-Schraubenmuttern zum Tragen.



Quader $1,3 \times 2,0 \times 2,3 \text{ cm}^3$

gesetzt. Da die Form der Haarklemme (glatt/gewellt, mit/ohne „Boppel“) das Rutschverhalten beeinflussen kann, sollte man bei Klassenexperimenten gleichartige Klemmen verwenden.

Steigung 10%							
	1	2	3	4	5	6	
Paula	19	19	9	25	11	17	100
Elaine	11	27	11	30	9	12	100
Marie	21	24	3	25	7	20	100
Marga	18	27	9	27	5	14	100
Sandra	22	22	9	26	9	12	100
absolute H.	91	119	41	133	41	75	500
relative H.	18%	24%	8%	27%	8%	15%	100%

Hares	21	25	7	20	8	19	100
Edris	18	25	7	21	8	21	100
Christian	19	21	8	30	11	11	100
Sineat	14	26	5	27	10	18	100
Alice	14	30	10	20	6	20	100
absolute H.	86	127	37	118	43	89	500
relative H.	17%	25%	7%	24%	9%	18%	100%

Hypothese	17%	25%	8%	25%	8%	17%	100%
-----------	-----	-----	----	-----	----	-----	------

Abbildung 3: Versuchsergebnisse und verbesserte Hypothese bei dem Glücksrad aus Abb. 1 mit 10% Steigung

Die 7c hat sich darauf geeinigt „volle Kanne“ im Uhrzeigersinn zu schnippen – mit Start in der Mitte des Feldes 6. „Volle Kanne“ bedeutet: Der Zeiger muss vor Stillstand mindestens zwei Umdrehungen absolviert haben, ansonsten wird nochmals geschnippt. Ebenso, wenn der Zeiger zwischen zwei Feldern hält. Die Ergebnisse werden in 5er Gruppen zusammengefasst (Abb. 3), dann langsam zum Mitschreiben ins Heft diktiert und simultan am Beamer kontrolliert. Durch die Verlangsamung beim Mitschreiben entsteht ein Gefühl für die Zufallsschwankungen, die dann ganz bewusst wahrgenommen werden. Man erlebt, dass sie sich durch Bilden von 5er Gruppen verkleinern, aber nie verschwinden. Abschließend einigt sich die 7c auf eine brauchbare Wahrscheinlichkeitsverteilung, in die man mehr Vertrauen hat als in die zuvor „aus dem hohlem Bauch heraus geschätzten“. (Letzte Zeile von Abb. 3).

Das in dieser Doppelstunde „Erlebte“ lässt sich wie folgt zusammenfassen:

Merksatz

Wahrscheinlichkeiten sagen relative Häufigkeiten auf lange Sicht voraus. Sie sind gut gewählt, wenn die (durch Zufallseinflüsse schwankenden) relativen Häufigkeiten um die Wahrscheinlichkeit pendeln, also bei vielen Versuchsserien etwa gleich oft über wie unter der Wahrscheinlichkeit liegen.

Wahrscheinlichkeiten werden also nicht im frequentistischen Sinn als eindeutig bestimmte „Grenzwerte“ unendlich langer Folgen relativer Häufigkeiten aufgefasst und „definiert“, sondern als vom Menschen gesetzte Modelle, die sich in der Praxis bewähren. Durch die Forderung, dass die relativen Häufigkeiten etwa gleich oft über wie unter den angesetzten Wahrscheinlichkeiten liegen sollen, wird Wahrscheinlichkeit deutbar als Median der relativen Häufigkeit. Es wird nicht nur eine Brücke zur Hypothesen bezweifelnden beurteilenden, sondern auch zur beschreibenden Statistik geschlagen – ganz im Sinne eines Spiralcurriculums.

3. Ergebnisse

Die in Abbildung 3 dokumentierten Versuchsergebnisse, die sich in Untersuchungen mit hohem Stichprobenumfang bestätigen, sind frappierend, weil sie Primärintentionen eklatant zu widersprechen scheinen. Die Wahrscheinlichkeiten

- hängen bei Neigung des Glücksrades tatsächlich von der Drehrichtung ab. Der Zeiger bleibt bergauf (bei 2 und 4) viel wahrscheinlicher stehen als bergab (3 und 5).
- Die Hypothese der Links-rechts-Symmetrie muss zugunsten einer unerwarteten Oben-unten-Symmetrie aufgegeben werden. Insbesondere
- scheinen die Felder 1 und 6 gleich wahrscheinlich zu sein (je ca. 1/6).
- Die Wahrscheinlichkeiten der Felder 2 und 3 bzw. 4 und 5 ergänzen sich jeweils zu 1/3. D. h. die Wahrscheinlichkeit, die ausgehend von 1/6 bei horizontaler Lage durch das Neigen des Glücksrades bei den Feldern 3 und 5 verschwindet, lagert sich bei 2 und 4 an. Die Begründung dafür (vgl. Abschnitt 6) läuft auf ein vom Radeln bekanntes Phänomen hinaus: Der Zeiger bekommt die Bewegungsenergie, die bergauf „weggebremst“ wird, bergab wieder zurück.
- Als Konsequenz ergibt sich: Wenn man die Drehrichtung wechselt, also abwechselnd im bzw. entgegengesetzt zum Uhrzeigersinn dreht, bleibt es trotz der Neigung des Glücksrades (vgl. Nikos Hypothese) bei einer Gleichverteilung.
- Umfangreiche Versuchsreihen zeigen, dass die Wahrscheinlichkeiten stabil sind gegenüber Veränderungen des Startfeldes und der Schnipptechnik. Insbesondere bleibt das Zielschnippen erfolglos, sofern man fordert, dass die Klemme vor Stillstand mindestens zwei Vollumdrehungen absolviert hat.
- Die Abweichungen von der Gleichverteilung, d. h. die Zunahme d der Wahrscheinlichkeit auf den Feldern 2 und 4 und die gleich große Abnahme auf den Feldern 3 und 5 ist proportional zur Steigung $m = \tan(\alpha)$ der schiefen Ebene (vgl. Abb. 4).
- Wenn man die Steigung um 1 % erhöht, nimmt die Wahrscheinlichkeit des Bergauf-Feldes (2 bzw. 4) um je ca. 0,55 % zu.

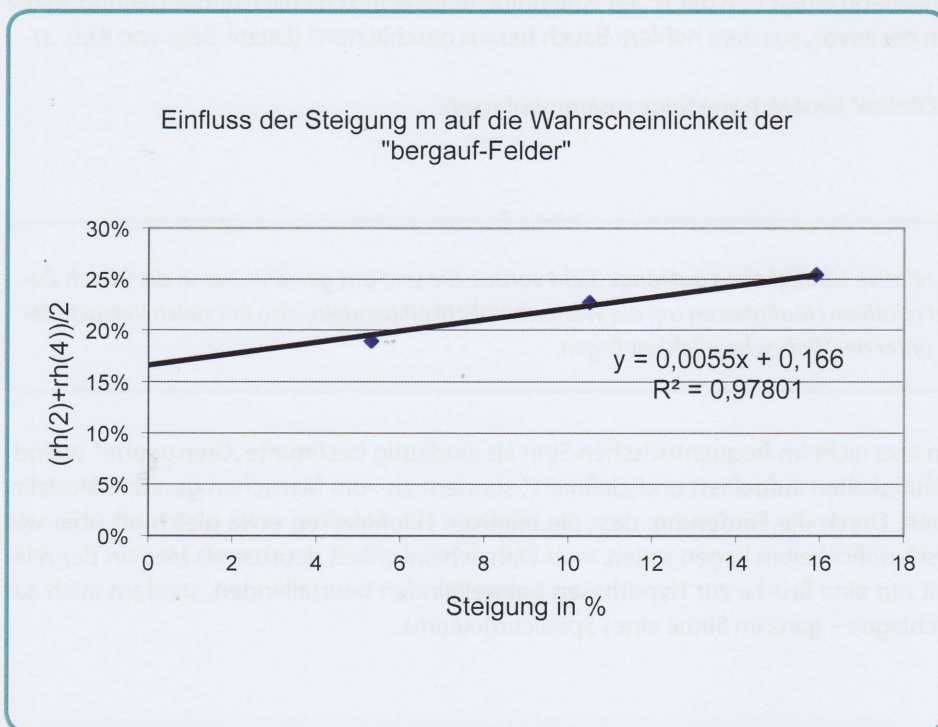


Abbildung 4: Der Einfluss der Neigung auf die Wahrscheinlichkeiten

4. Wie geht es im Unterricht weiter?

4.1 Wahrscheinlichkeitsrechnung – Klasse 7

Wie wahrscheinlich ist beim zweimaligen Drehen des Glücksrades ein Pasch? Mit welcher Wahrscheinlichkeit gelingt bei sechsmaligem Drehen ein Durchmarsch (d. h. beim ersten Mal keine 1, beim zweiten Mal keine 2, ... beim sechsten Mal keine 6)? Wie wahrscheinlich hat man nach 6 Drehungen eine vollständige Serie?

Mit den in Abbildung 2 aufgestellten Wahrscheinlichkeiten und der Pfadregel lassen sich solche Fragen beantworten und durch erneutes Auszählen der Glücksrad-Urdaten auch mit der Realität vergleichen. In der Regel sind die mithilfe der Pfadregel gewonnenen Prognosen ausgezeichnet und man erkennt den Nutzen von Wahrscheinlichkeitsrechnung. Anders als im Laplaceschen Konzept erkennen die Kinder aber, dass man in der Wahrscheinlichkeitsrechnung keine absolut richtigen Wahrscheinlichkeiten berechnet, sondern nur aus bewährten Hypothesen (Primärwahrscheinlichkeiten) Sekundärwahrscheinlichkeiten ableitet.

57

4.2 Testen von Hypothesen – Klasse 12

Das schiefe Glücksrad ist ein ideales Übungsfeld für das Testen von Hypothesen. Die gängigen Testverfahren bieten auch bei hohem Stichprobenumfang keinen Anlass, folgende Hypothesen zu bezweifeln:

- $p(1) = p(6) = 1/6$
- $p(2; 3) = p(4; 5) = 1/3$
- $p(\text{obere Hälfte}) = p(\text{untere Hälfte}) = 1/2$.

Andererseits lässt sich die Hypothese

- $p(\text{linke Hälfte}) = p(\text{rechte Hälfte}) = 1/2$

schon bei kleinem Versuchsumfang signifikant zurückweisen (Riemer 2017).

Auch den ansonsten selten thematisierten, für ein Verständnis des Stellenwertes statistischer Aussagen aber fundamentalen Unterschied zwischen Signifikanz und Relevanz macht das Glücksrad greifbar: Bei hohem Versuchsumfang wird auch eine geringe Neigung (von beispielsweise 2%) signifikant nachweisbar, obwohl die Abweichungen für Würfelspiele mit Glücksrädern nicht wirklich relevant sind. Das gilt für den Hausgebrauch, nicht aber im Casino, wo man mit dem Schiefstellen auf lange Sicht viel Geld verdienen könnte. Die Frage nach der Relevanz statistisch signifikanter Unterschiede lässt sich somit innermathematisch nicht beantworten, sie braucht Sachverstand und außermathematische Expertise.

5. Rückblick

Rückblickend erkennt man in dem skizzierten Unterrichtsgang wie auf der Grundlage des hypothetisch-prognostischen Wahrscheinlichkeitsbegriffs beim Festlegen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen ein Modellierungskreislauf in idealtypischer Form durchlaufen wird. Schon Siebtklässler durchleben die „Philosophie“ beurteilender Statistik, zu der folgende Gedankenschritte gehören:

- Aufstellen von Hypothesen.
- Experimentieren unter genau definierten Versuchsbedingungen.
- Vergleich der erwarteten mit den beobachteten relativen Häufigkeiten.
- Die Hypothesen beibehalten, solange sie sich bewähren, andernfalls Hypothesen bezweifeln und verbessern.

Das schiefe Glücksrad belegt, dass bei entsprechenden Fragestellungen beschreibende und beurteilende Statistik lernpsychologisch sehr viel näher beieinander liegen als es beim Blick auf Kerncurricula und fachsystematisch aufgebaute statistische Lehrbücher erscheinen mag.

6. Theorie des schiefen Glücksrades: Energie und Wahrscheinlichkeit

Im Folgenden Abschnitt wird erläutert, wie sich die Wahrscheinlichkeiten des Glücksrades mithilfe von Energiebetrachtungen aus plausiblen Annahmen herleiten lassen.

6.1 Gleitreibung

Das Anziehen eines Schlittens auf horizontaler Unterlage erfordert viel Kraft, denn er haftet zunächst fest auf dem Schnee. Nach einem Ruck beginnt er aber zu gleiten, was dann sehr viel weniger Krafteinsatz erfordert: Die hohe Haftreibung wird durch die viel kleinere Gleitreibung abgelöst. Bei Eisenkufen auf Schnee wirken ca. $\rho = 1\%$ und bei einer Haarklemme auf Papier etwa $\rho = 30\%$ der Gewichtskraft $m \cdot g$ als Gleitreibung. Den dimensionslosen Faktor ρ bezeichnet man als Gleitreibungskoeffizienten.

Auf einer schiefen Ebene mit Neigungswinkel α sorgt aber nicht mehr die ganze Gewichtskraft, sondern nur noch deren senkrecht zur Auflage wirkende Normalkomponente für die Gleitreibung. Man erhält $f_{\text{gleit}} = \rho \cdot m \cdot g \cdot \cos(\alpha)$ (vgl. Abb. 5).

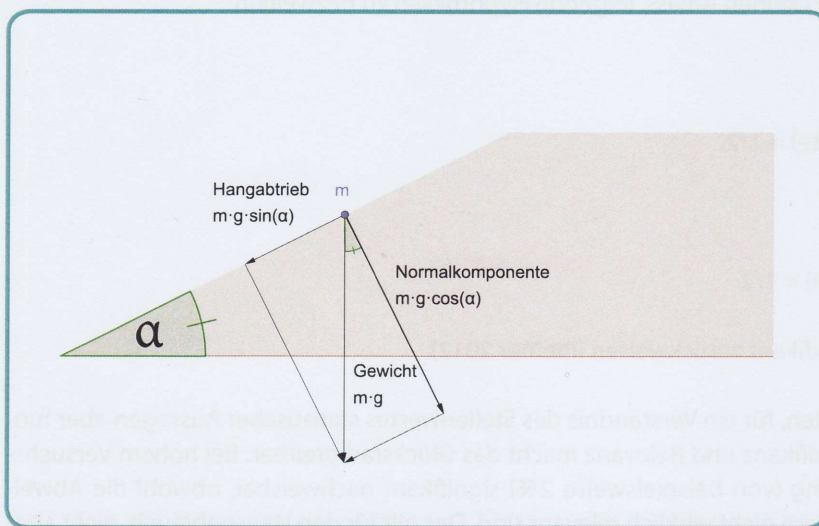


Abbildung 5: Das Gewicht wird auf der schiefen Ebene in Hangabtrieb und eine Normalkomponente zerlegt.

6.2 Gleichverteilung der Startenergie vor der „entscheidenden“ letzten Runde

Wir stellen uns den Zeiger des Glücksrades als Punktmasse m vor, die vom tiefsten Punkt bei $\varphi = 0$ (in der Mitte des Feldes 6) aus auf einem Kreis mit Radius r im Uhrzeigersinn rotiert. Direkt nach dem Anschneiden „volle Kanne“ hat er sehr viel Bewegungsenergie, die sich aber in jeder Vollumdrehung durch die Gleitreibung um den gleichen Betrag $E_0 = \text{Gleitreibung} \cdot \text{Weg} = f_{\text{gleit}} \cdot 2\pi \cdot r = 2\pi \cdot r \cdot \rho \cdot m \cdot g \cdot \cos(\alpha)$ verringert. (Die Bewegungsenergie wird „Modulo E_0 “ Runde für Runde in Wärme umgewandelt, man nennt das Energiedissipation). Am Anfang der „alles entscheidenden“ letzten Runde hat der Zeiger dann eine Bewegungsenergie $0 \leq E_{\text{kin}} < E_0$. Andernfalls würde er ja noch eine weitere Runde schaffen. Da die Startenergie durch das kräftige Anschneiden stark streut, vielleicht sogar normalverteilt ist mit einem sehr großen Erwartungswert und großer Standardabweichung, liegt die Annahme nahe, dass zu Beginn der letzten Runde die noch verfügbare Bewegungsenergie – die eindeutig bestimmt, bis wohin der Zeiger es dann noch schafft – alle Werte im Intervall $[0; E_0)$ mit gleicher Wahrscheinlichkeit annimmt. Mit dieser plausiblen Annahme kann man dann wie in 6.4 ausgeführt, die Wahrscheinlichkeiten des Glücksrades bestimmen.

6.3 Hangabtrieb

Neben der für die Gleitreibung verantwortlichen Normalkomponente der Gewichtskraft, wirkt auf den Zeiger auch die Hangabtriebskraft $f_{\text{hang}} = m \cdot g \cdot \sin(\alpha)$ parallel zur Ebene. Sie zieht den Zeiger „nach unten“ (Abb. 5). Wenn

die Gleitreibung f_{gleit} und der Hangabtrieb f_{hang} gleich groß sind, dann rutscht eine sich bewegende Masse mit konstanter Geschwindigkeit. Das ist genau dann der Fall, wenn gilt $\rho \cdot m \cdot g \cdot \cos(\alpha) = m \cdot g \cdot \sin(\alpha)$ bzw. $\rho = \tan(\alpha)$.

Ist dagegen $\tan(\alpha) < \rho$, wird die rutschende Masse gebremst und bleibt, „irgendwann“ stehen. In diesem Bereich muss das Glücksrad arbeiten. Der Zeiger soll ja überall – auch bergab zwischen den Sektoren 3 und 5 – sicher anhalten können. Tatsächlich kann man den Gleitreibungskoeffizienten ρ durch Rutschversuche bestimmen: ρ ist die Steigung (in Prozent), bei der ein frei rutschender Zeiger gerade noch zum Stehen kommt. Für Haarklemmen auf glatten Etiketten erhält man $\rho \approx 3,0$. Man sollte also mit Glücksrad-Steigungen unter 20% arbeiten.

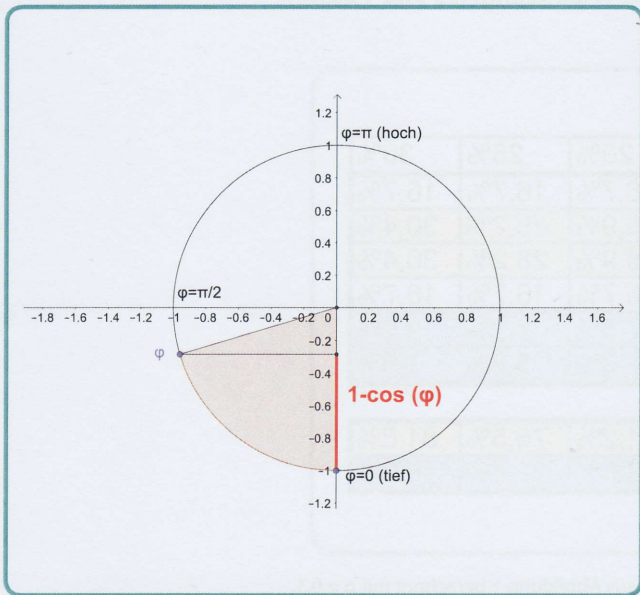


Abbildung 6: Nach Drehung um φ hat der Zeiger die Lageenergie $E_{\text{pot}}(\varphi) = (1 - \cos(\varphi)) \cdot r \cdot f_{\text{hang}}$

6.4 Wahrscheinlichkeits-Verteilungsfunktion

Unten in der Mitte des Feldes 6 bei $\varphi = 0$ hat der Zeiger die Lageenergie 0. Oben, in der Mitte des Feldes 1 bei $\varphi = \pi$, ist seine Lageenergie $2r \cdot f_{\text{hang}}$, denn er hat sich gegen den Hangabtrieb f_{hang} um die Strecke $2r$ nach oben bewegt. Allgemein hat der Zeiger in der durch φ gekennzeichneten Position (Abb. 6) die Lageenergie $E_{\text{pot}}(\varphi) = (1 - \cos(\varphi)) \cdot r \cdot f_{\text{hang}}$. Um an dieser Position anzuhalten, braucht der Zeiger am Anfang der letzten Runde die Startenergie $E(\varphi) = E_{\text{pot}}(\varphi) + E_{\text{gleit}}(\varphi) = (1 - \cos(\varphi)) \cdot r \cdot f_{\text{hang}} + \varphi \cdot r \cdot f_{\text{gleit}}$, denn bis zu dieser Position ist zusätzlich zur (gespeicherten) Lageenergie die Gleitarbeit zu verrichten.

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Zeiger vorher, also an einer Position $x \leq \varphi$ hält, entspricht wegen der Gleichverteilung der Startenergien dem Anteil $E(\varphi) / E_0$. Damit erhält man die Verteilungsfunktion:

$$F(\varphi) = P(x \leq \varphi) = \frac{\varphi r \cdot f_{\text{gleit}} + (1 - \cos(\varphi)) r \cdot f_{\text{hang}}}{2\pi r \cdot f_{\text{gleit}}} = \frac{\varphi}{2\pi} + \frac{\tan(\alpha)}{\rho} \cdot \frac{1 - \cos(\varphi)}{2\pi}$$

dabei wurde die Beziehung $\frac{f_{\text{hang}}}{f_{\text{gleit}}} = \frac{m \cdot g \cdot \sin(\alpha)}{\rho \cdot m \cdot g \cdot \cos(\alpha)} = \frac{\tan(\alpha)}{\rho}$ genutzt.

Für das Glücksrad aus Abbildung 1 berechnet sich damit die Wahrscheinlichkeit für ein Anhalten auf dem Feld 4

wegen $\frac{\tan(\alpha)}{\rho} = \frac{0,1}{0,3} = \frac{1}{3}$ zu $F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F\left(\frac{\pi}{12}\right) \approx 21,3\%$. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Zeiger in der linken Hälfte des Glücksrades (bergauf) stehen bleibt, ergibt sich zu $P(\text{bergauf}) = F(\pi) = \frac{1}{2} + \frac{\tan(\alpha)}{\pi\rho}$.

Die Abweichung der „bergauf-Wahrscheinlichkeit“ vom Wert 1/2 beim Laplaceschen Glücksrad ist damit in Übereinstimmung mit den experimentellen Ergebnissen proportional zur Steigung $\tan(\alpha)$. Abbildung 7 zeigt die Modellergebnisse, die gut zu den experimentellen aus den Abbildungen 3 und 4 passen.

Steigung		5%	10%	15%	20%	25%	30%
unten	6	16,7%	16,7%	16,7%	16,7%	16,7%	16,7%
bergauf	4	19,0%	21,3%	23,6%	25,9%	28,2%	30,4%
	2	19,0%	21,3%	23,6%	25,9%	28,2%	30,4%
oben	1	16,7%	16,7%	16,7%	16,7%	16,7%	16,7%
bergab	3	14,4%	12,1%	9,8%	7,5%	5,2%	2,9%
	5	14,4%	12,1%	9,8%	7,5%	5,2%	2,9%

links		55,3%	60,6%	65,9%	71,2%	76,5%	81,8%
rechts		44,7%	39,4%	34,1%	28,8%	23,5%	18,2%

Abbildung 7: Wahrscheinlichkeiten der sechs Felder des Glücksrades aus Abbildung 1 berechnet mit $\rho = 0,3$.

6.5 Wahrscheinlichkeitsdichte

Mithilfe der Verteilungsfunktion F erhält man für das Glücksrad auf der schiefen Ebene

$$P(\varphi_1 < x \leq \varphi_2) = F(\varphi_2) - F(\varphi_1) =$$

$$\frac{(\varphi_2 - \varphi_1)}{2\pi} - \frac{\tan(\alpha)}{\rho} \cdot \frac{\cos(\varphi_2) - \cos(\varphi_1)}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \left[x - \frac{\tan(\alpha)}{\rho} \cdot \cos(x) \right]_{\varphi_1}^{\varphi_2}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Zeiger im Intervall $(\varphi_1; \varphi_2]$ stehen bleibt, lässt sich damit durch Integration der

Wahrscheinlichkeitsdichte $f(\varphi) = \frac{1}{2\pi} (1 + \frac{\tan(\alpha)}{\rho} \cdot \sin(\varphi))$ für $0 \leq \varphi < 2\pi$ bestimmen. Sie ist zusammen

mit der Verteilungsfunktion $F(\varphi) = \int_0^\varphi f(x)dx = \frac{x}{2\pi} + \frac{\tan(\alpha)}{\rho} \cdot \frac{1 - \cos(x)}{2\pi}$ der Abbildung 8 zu entnehmen.

Die Dichte f hat ihr Maximum bei $x = \frac{\pi}{2}$ und ihr Minimum bei $x = \frac{3\pi}{2}$. Wo es am steilsten bergauf geht, bleibt der

Zeiger am wahrscheinlichsten, wo es am steilsten bergab geht, am unwahrscheinlichsten stehen.

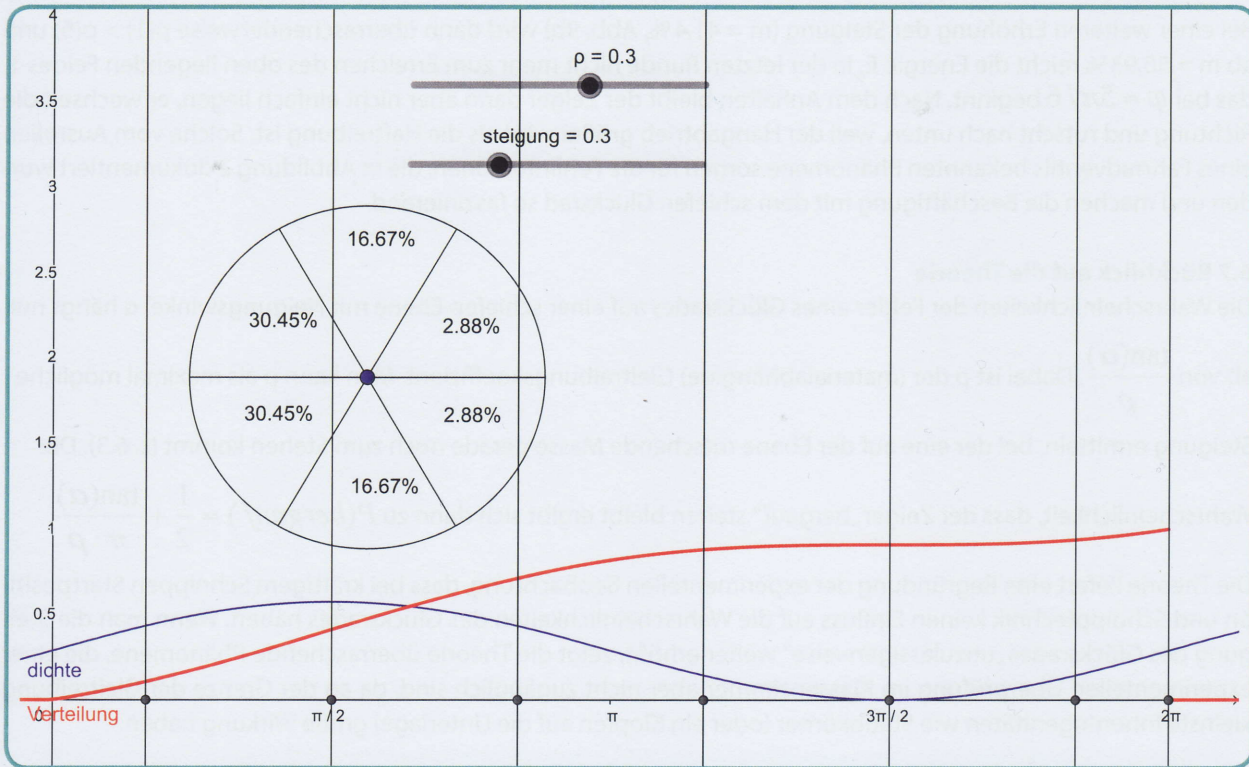


Abbildung 8: Glücksrad-Wahrscheinlichkeiten, Wahrscheinlichkeitsdichte f (blau) und Verteilungsfunktion F (rot) für $\tan(\alpha) = \rho$.

6.6 Wenn sich die Ebene noch stärker neigt

Wenn man die Steigung $m = \tan(\alpha)$ des Glücksrades „verbotenerweise“ doch größer macht als den Gleitreibungskoeffizienten $\rho = 0,3$, hält der Zeiger bergab in den markierten Bereichen von Abbildung 9a/b/c nicht mehr an. So wird in Abbildung 9a bei $m = 34,5\%$ ein Anhalten auf dem Feld 5 unmöglich. Es ergibt sich $p(5) = 0$, obwohl immer noch gilt $p(1) = p(6) = 1/6$.

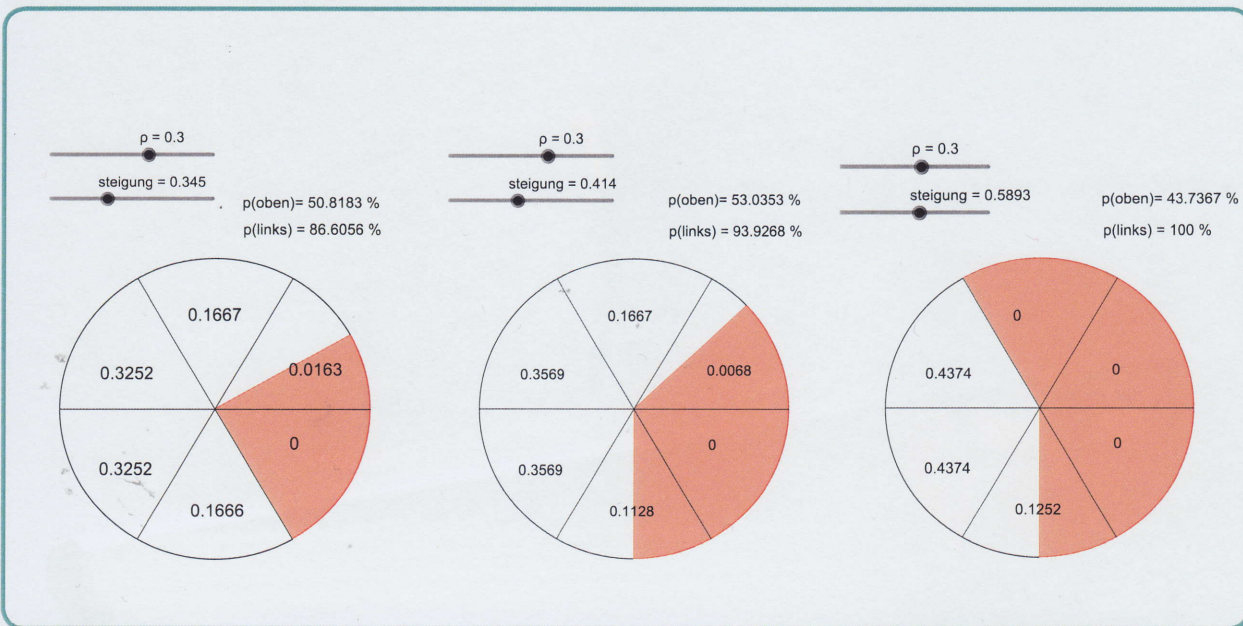


Abbildung 9a: $m = 34,5\%$.
Der Zeiger rutscht abwärts bis zum Anfang des Feldes 6.

Abbildung 9b: $m = 41,4\%$.
Der Zeiger hält abwärts nicht mehr in der rechten Hälfte des Feldes 6. Dadurch wird $p(1) = 1/6 > p(6)$.

Abbildung 9c: $m = 58,93\%$.
In der letzten Runde schafft es der Zeiger nicht mehr bis auf das obere Feld 1, es gilt aber $p(2) = p(4)$.

Bei einer weiteren Erhöhung der Steigung ($m = 41,4\%$, Abb. 9b) wird dann überraschenderweise $p(1) > p(6)$ und ab $m = 58,93\%$ reicht die Energie E_0 in der letzten Runde nicht mehr zum Erreichen des oben liegenden Feldes 1, das bei $\varphi = 5\pi/6$ beginnt. Nach dem Anhalten bleibt der Zeiger dann aber nicht einfach liegen, er wechselt die Richtung und rutscht nach unten, weil der Hangabtrieb größer wird als die Haftreibung ist. Solche vom Ausrollen eines Fahrradventils bekannten Phänomene sorgen für die Fehlintuitionen, die in Abbildung 2 dokumentiert wurden und machen die Beschäftigung mit dem schiefen Glücksrad so faszinierend.

6.7 Rückblick auf die Theorie

Die Wahrscheinlichkeiten der Felder eines Glücksrades auf einer schiefen Ebene mit Neigungswinkel α hängt nur ab von $\frac{\tan(\alpha)}{\rho}$. Dabei ist ρ der (materialabhängige) Gleitreibungskoeffizient. Man kann ρ als maximal mögliche

Steigung ermitteln, bei der eine auf der Ebene rutschende Masse gerade noch zum Stehen kommt (s. 6.3). Die

Wahrscheinlichkeit, dass der Zeiger „bergauf“ stehen bleibt ergibt sich dann zu $P(\text{bergauf}) = \frac{1}{2} + \frac{\tan(\alpha)}{\pi \cdot \rho}$.

Die Theorie liefert eine Begründung der experimentellen Beobachtung, dass bei kräftigem Schnippen Startposition und Schnipptechnik keinen Einfluss auf die Wahrscheinlichkeiten des Glücksrades haben. Wenn man die Steigung des Glücksrades „unzulässigerweise“ weiter erhöht, zeigt die Theorie überraschende Phänomene, die einer experimentellen Überprüfung im Klassenzimmer aber nicht zugänglich sind, da an der Grenze der Gleitreibung kleinste Inhomogenitäten wie Staubkörner (oder ein Klopfen auf die Unterlage) große Wirkung haben.

Wer experimentieren, aber nicht basteln möchte, kann „schiefe Glücksräder“ auf Sperrholzbretchen wie in Abbildung 1 oder mit Glücksrädern bedruckte Bierdeckel (Abb. 10) zur Verwendung auf geöffneten Buchunterlagen beim Autor anfordern. Kopiervorlagen und die GeoGebra-Dateien zur Bestimmung der Glücksradwahrscheinlichkeiten und Wahrscheinlichkeitsdichten in Abhängigkeit von der Neigung auch für $\tan(\alpha) > \rho$ findet man bei: www.riemer-koeln.de.

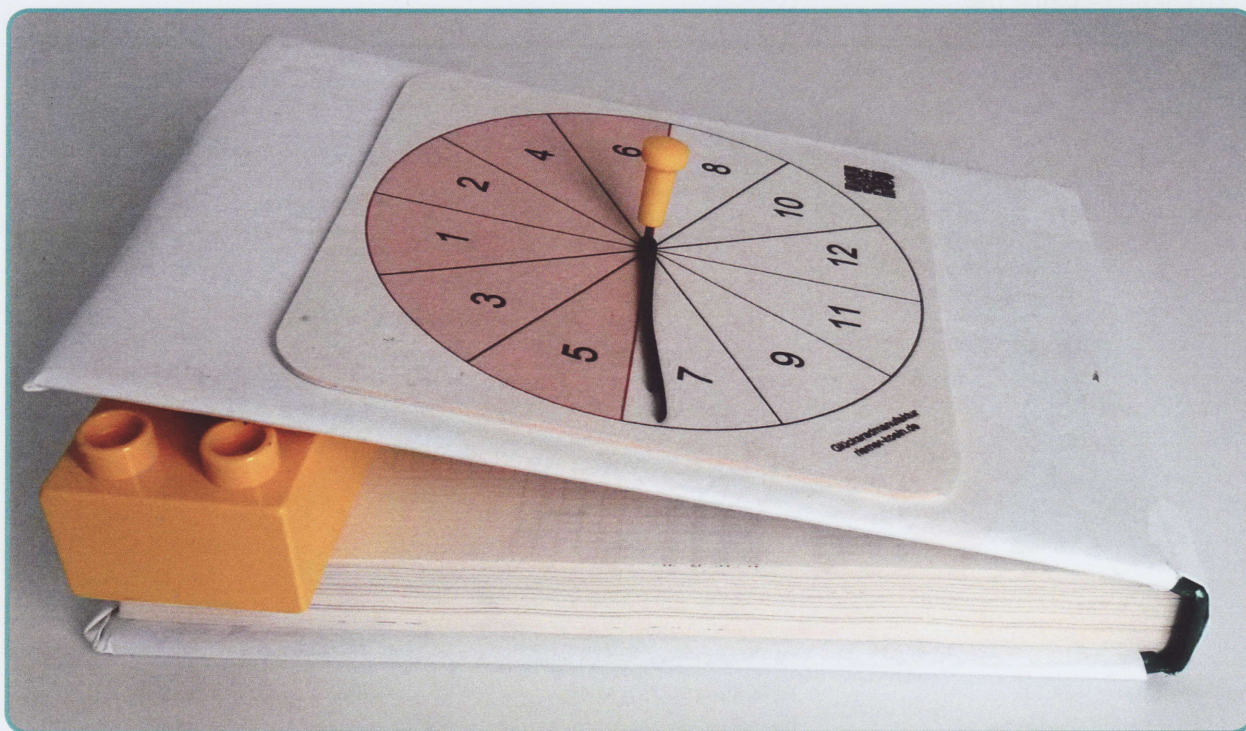


Abbildung 10: Die Rückseite des Bierdeckels zeigt ein Glücksrad mit 12 Feldern.

Literatur

Riemer, W. (2017). Das „eiernde Glücksrad“ – ein Sprungbrett in die Statistik. MNU 70 (2) 89-94.

