G 20353 F

PM

Praxis der Mathematik in der Schule

Sekundarstufen I und II

48

Heft Nr. 48/54. Jahrgang

Dezember 2012

Fit für die Zukunft

Stochastik

AulisVerlag

Stetige Zufallsgrößen

Mit Dartwerfen durch das Tor der Analysis in die Stochastik

Wolfgang Riemer

Die Wirklichkeit ist die schönste Lernumgebung. Das wird in diesem Beitrag anhand eines Dartwurfwettbewerbs deutlich. Die Auswertung der Ergebnisse sorgt nicht nur im Rahmen der beschreibenden Statistik für Spannung. Sie mündet in einer handfesten Begründung des Funktionsterms der Normalverteilung (der gaußschen Glocke), so wie sie von Gauß persönlich hätte stammen können.

Simone scheint mit Tobias nicht zufrieden

Ob sie besser ist?

Eine Welt voller Zufall

Die Welt steckt voller Zufall. Viele Zufallsphänomene lassen sich durch das Werfen von Münzen oder durch das Drehen von Glücksrädern beschreiben oder modellieren. Man spricht von *diskreter* Stochastik, weil die Ergebnisse dabei ganzzahlige Zufallsgrößen sind. Als Werkzeuge kommen Baumdiagramme und Pfadregeln zum Einsatz. Daneben gibt es stetige Zufallsgrößen, deren Werte reelle Zahlen sind. Zur Beschreibung von Wahrscheinlichkeiten nutzt man dann Integrale. Die Funktionen werden zu Wahrscheinlichkeitsdichten. Das berühmteste Beispiel einer Wahrscheinlichkeitsdichte ist die gaußsche Glockenfunktion, aber auch lineare Funktionen und Exponentialfunktionen genießen in der Stochastik hohes Ansehen. Die folgenden Ausführungen zeigen, wie motivierend es sein kann, (auch ohne die Binomialverteilung) direkt von der Analysis in die Stochastik stetiger Zufallsgrößen einzusteigen. Dabei erhalten die aus der Analysis bekannten Integrale die Bedeutung von Wahrscheinlichkeiten und der Einsatzbereich der Integralrechnung wird erheblich erweitert. Probieren Sie es aus, es ist einfacher als Sie vielleicht denken.

Mit stetigen Zufallsgrößen experimentieren

Statt vieler Worte beginnen wir mit zwei Experimenten. Wer das Sammeln von Daten beschleunigen möchte, um im Unterricht Leerlauf zu vermeiden, kann seine Lerngruppe in mehrere Teams aufteilen und das Experiment als Wettkampf gestalten. Jedes Team bekommt eine Pinnwand oder Korkplatte und zwei Zielscheiben (bestehend aus einem Kreis mit Radius $r = 10\,\text{cm}$ z.B. auf einem DIN-A3-Millimeterpapier), auf die jedes Team-Mitglied mit zehn Pfeilen so zielt, wie es im Folgenden beschrieben wird.

Experiment 1

Jedes Team-Mitglied zielt auf den Mittelpunkt des Kreises und versucht, diesem möglichst nahe zu kommen (siehe *Abb. 1*).

Experiment 2

Es kommt darauf an, die Pfeile im 10-cm-Zielkreis *möglichst gleichmäßig* zu verteilen. Falls sich Punkte „unten“ häufen, wird man im Folgenden weiter nach „oben“ zielen.

Regeln

Der Abstand von der Zielscheibe ist stets 2 m. Das Wurffeld wird durch Tische, die als Absperrung dienen, gesichert. Der Teamchef achtet (zusätzlich zur Lehrperson) auf Sicherheit. Damit die Pfeile sich nicht gegenseitig stören, werden sie nach je zehn Würfen eingesammelt. Wenn ein Pfeil nicht in der Unterlage stecken bleibt, zählt die Marke trotzdem. In Experiment 2 bleiben Pfeile außerhalb des Kreises unberücksichtigt. Es kommt nur auf die gleichmäßige Verteilung *innerhalb des Kreises* an. In Experiment 1 zählen *alle* Pfeile. „Übung macht den Meister“: Man kann mit neuen Zielscheiben einen zweiten Durchgang machen um zu testen, ob die Teams sich durch Übung verbessern.

Deskriptive Auswertung

Jedes Team tippt die Koordinaten seiner Einstichpunkte in eine vorbereitete Tabellenkalkulation ein (*Abb. 2*, Vorlage im Download). Damit im Unterricht kein Leerlauf entsteht, empfiehlt es sich, die durchlöcherten Zielscheiben zu kopieren und die Auswertung durch die anderen Gruppen kontrollieren zu lassen. Das Kopieren erfolgt (ohne Kopiergerät) während

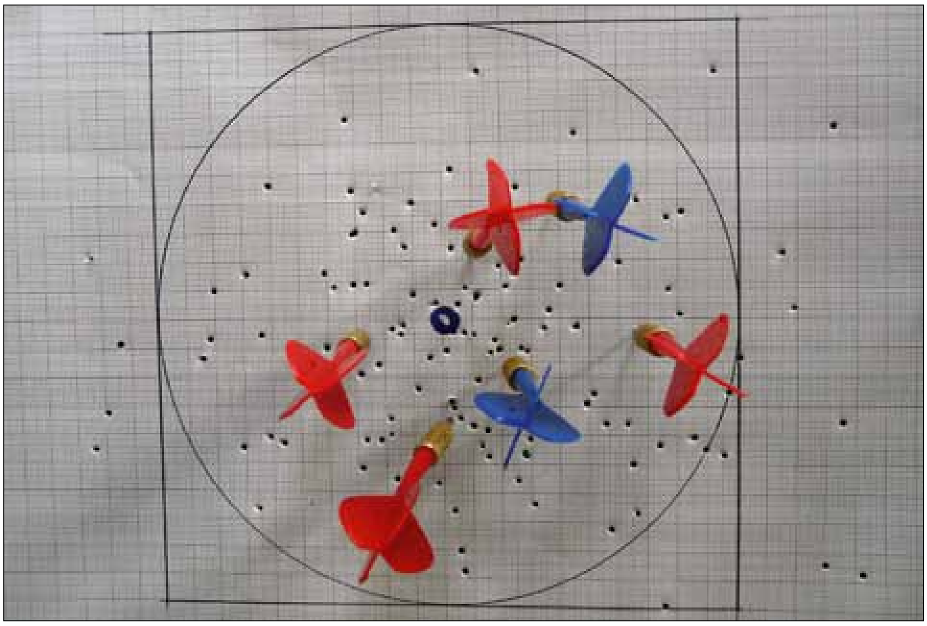


Abb. 1: Darts auf Millimeterpapier. Das Ziel ist in der Mitte markiert (Kopiervorlage im Download)

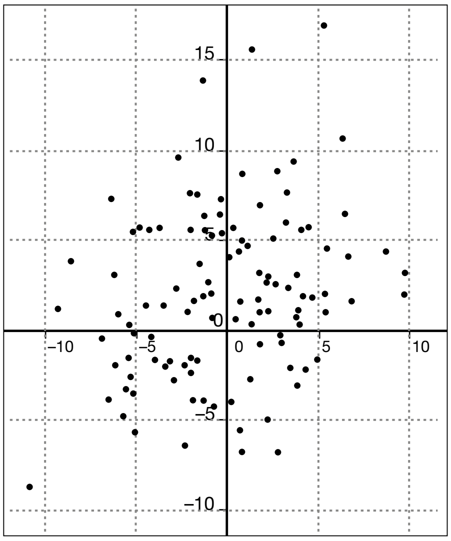


Abb. 2: Die Einstichpunkte wurden in eine Tabellenkalkulation (vgl. Downloadmaterial) übertragen

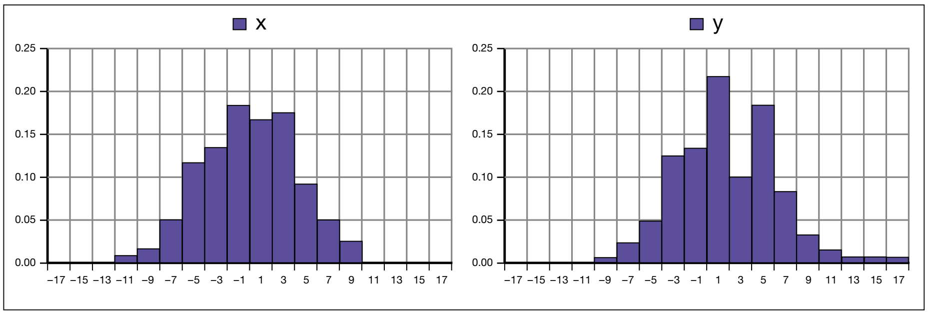


Abb. 3: Experiment 1: In die Mitte zielen, Ergebnisse für die *x*-Koordinaten (links) und *y*-Koordinaten (rechts)

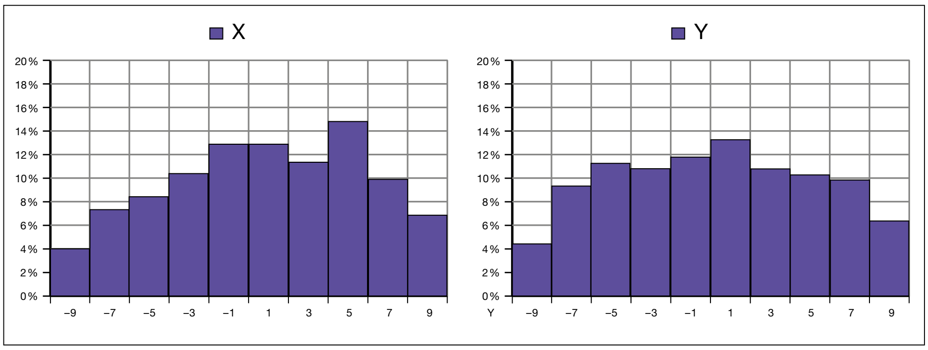


Abb. 4: Experiment 2: Gleichmäßig verteilen, Ergebnisse für die *x*-Koordinaten (links) und *y*-Koordinaten (rechts)

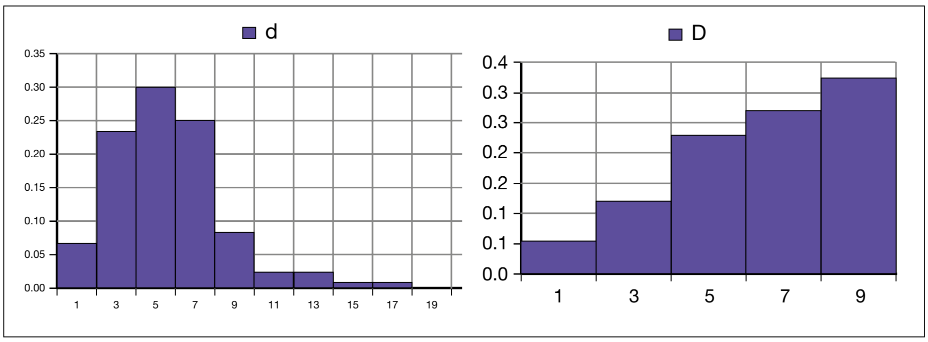


Abb. 5: Verteilung der Abstände *D* von der Kreismitte, wenn man in die Mitte zielt (links) bzw. wenn man versucht, die Pfeile im Kreis gleichmäßig zu verteilen (rechts).

des Experiments, indem man mehrere Zielscheiben übereinander legt.

Die Verteilung der x-Koordinaten, die Verteilung der y-Koordinaten und die Verteilung der Abstände $d = \sqrt{x^2 + y^2}$ vom Ursprung werden mithilfe der Tabellenkalkulation gezeichnet (Zufallsgrößen X, Y, D; *Abb. 3, 4* und *5*). Die Abbildungen zeigen, welche Ergebnisse man erwarten kann, wenn man 120 Würfe macht und die Ergebnisse der Zufallsgrößen X, Y und D in Klassen der Breite 2 cm zusammenfasst. Die Mittelwerte und die Standardabweichungen werden berechnet. Wenn man in Experiment 2 auch die Punkte innerhalb des Quadrats berücksichtigt, welches dem Zielkreis umschrieben ist, kann man prüfen wie gut der Anteil der Punkte innerhalb des Kreises den Wert $\frac{\pi}{4}$ approximiert (Monte-Carlo-Methode zur Bestimmung von π).

Theorie zu Experiment 2: Die Wahrscheinlichkeitsdichte

Die Häufigkeitsverteilungen der Zufallsgrößen X, Y und insbesondere diejenigen von D unterscheiden sich in beiden Experimenten deutlich voneinander. Bei der Suche nach „theoretischen" Wahrscheinlichkeiten, welche die experimentellen Ergebnisse beschreiben bzw. vorhersagen können, stößt man auf Integrale, lernt Wahrscheinlichkeiten durch Wahrscheinlichkeitsdichten zu beschreiben und Erwartungswerte durch Integration zu berechnen. Die Integralrechnung bekommt so – wenn man aus der Analysis kommt – eine völlig neue Dimension. Das soll anhand beider Experimente erläutert werden.

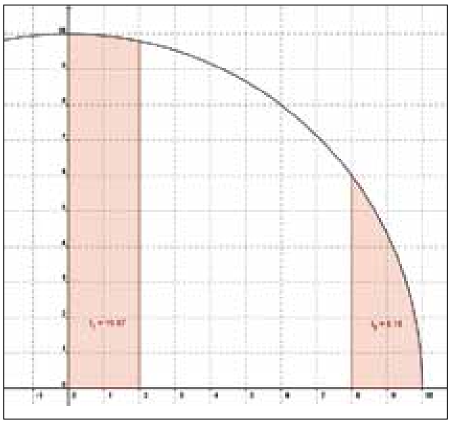


Abb. 6: Verteilung von *X* (Vertikalstreifen)

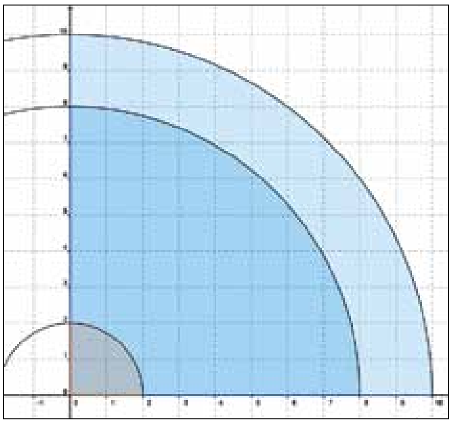


Abb. 7: Verteilung von *D* (Kreisringe)

Unter der Voraussetzung (Hypothese), dass sich die Punkte im Kreis tatsächlich gleich verteilen, kann man die „theoretischen" Wahrscheinlichkeiten, die den zufallsbehafteten Häufigkeitsverteilungen zugrunde liegen, durch Flächenvergleich bestimmen. So entspricht die Wahrscheinlichkeit, dass die Rechtskoordinate X z. B. zwischen 8 und 10 liegt, dem Flächenanteil des zugehörigen Vertikalstreifens (mit Mitte bei $x = 9$) an der Kreisfläche (*Abb. 6*).

Man erhält:

$$P(8 < X \leq 10) = \frac{2 \cdot \mathrm{I}_9}{\text{Kreisfläche}} = \int_8^{10} \frac{2}{\pi r^2} \cdot \sqrt{r^2 - x^2}\,\mathrm{d}x \approx 0{,}052$$

Entsprechendes gilt für die Wahrscheinlichkeitsverteilung zu Y.

Die Wahrscheinlichkeiten der anderen Klassen zeigt die letzte Zeile der folgenden Tabelle im Vergleich mit den im Experiment erhaltenen relativen Häufigkeiten.

Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeitsverteilung des Abstandes D zum Kreismittelpunkt zerlegt man den Kreis in konzentrische Ringe (*Abb. 7*). Für die Wahrscheinlichkeit des äußersten Ringes mit Breite 2 erhält man z. B.:

$$P(8 < D \leq 10) = \frac{\text{Kreisringfläche}}{\text{Kreisfläche}} = \frac{10^2\pi - 8^2\pi}{10^2\pi} = 0{,}36$$

Auch diese Wahrscheinlichkeit kann man als Integral darstellen. Es gilt:

$$P(a < D \leq b) = \frac{1}{100}(b^2 - a^2) = \int_a^b \frac{1}{50}x\,\mathrm{d}x$$

Die Wahrscheinlichkeiten, der anderen Klassen zeigt Tab. 2 – wieder in guter Übereinstimmung mit den experimentellen relativen Häufigkeiten.

Als Resümee ergibt sich: Wahrscheinlichkeiten, mit denen reellwertige Zufallsgrößen in vorgegebenen Intervallen liegen, lassen sich durch Integration von Funktionen berechnen. Die Funktionen f haben dann die Bedeutung von Wahrscheinlichkeitsdichten und lassen sich als „Wahrscheinlichkeit je Intervalllänge" deuten. So gilt

$$f(a) \approx \int_{a-0,5}^{a+0,5} f(x)\,\mathrm{d}x$$

und der Funktionswert der Dichte lässt sich als Wahrscheinlichkeit dafür deuten, dass die Zufallsgröße einen Wert annimmt, der in einem Intervall um a mit der Länge 1 liegt.

Dort, wo die Dichte groß ist, erwartet man viele Versuchsergebnisse. So ist die Dichte

$$f(x) = \frac{2}{\pi r^2} \cdot \sqrt{r^2 - x^2} \quad \text{mit} \quad -r \leq x \leq r$$

$$\text{und} \quad \int_{-r}^{r} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

bei $x = 0$ maximal und bei gleichmäßiger Verteilung der Punkte im Kreis liegen die X-Koordinaten besonders häufig in der Nähe von 0. Die Dichte

$$f(x) = \frac{1}{50}x \quad \text{mit} \quad 0 \leq x \leq 10$$

$$\text{und} \quad \int_0^{10} \frac{1}{50}x\,\mathrm{d}x = 1$$

hat ihr Maximum bei $x = 10$ und tatsächlich liegen bei gleichmäßiger Verteilung im Kreis die meisten Punkte weit vom Ursprung entfernt. Da sich Wahrscheinlichkeiten zu 1 summieren, liefern Wahrscheinlichkeitsdichten stets den Wert 1, wenn man sie über den gesamten Definitionsbereich integriert.

Den mittleren Abstand $\bar{d}$ vom Ursprung erhält man bei gegebener Häufigkeitsverteilung näherungsweise dadurch, dass man die Abstände, die zu den Intervallmitten gehören, mit den relativen Häufigkeiten der zugehörigen Intervalle multipliziert:

$$\bar{d} \approx 1 \cdot 0{,}06 + 3 \cdot 0{,}12 + \ldots + 9 \cdot 0{,}33 \approx 6{,}38$$

Wenn man die relativen Häufigkeiten durch die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten ersetzt, kann man diese Summe als Treppensumme des Integrals

$$\int_0^{10} x \cdot \frac{1}{50}x\,\mathrm{d}x$$

deuten. Man erkennt, dass es sinnvoll ist, das Integral

$$\mu = \int_a^b x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x$$

als Erwartungswert der Zufallsgröße X zu deuten, die durch die Dichte f beschrieben wird. Die mittleren Abstände $\bar{d}$ werden zufallsabhängig um den Erwartungswert μ pendeln. Entsprechend definiert man die Standardabweichung durch

$$\sigma = \sqrt{\int_a^b (x - \mu)^2 \cdot f(x)\,\mathrm{d}x}\ .$$

Theorie zu Experiment 1: Wie Gauß seine Normalverteilung entdeckt haben könnte

Jeder kennt die Geschichte, in der Gauß die Zahlen von 1 bis 100 summieren sollte und mit seiner Summenformel viel schneller am Ziel war als von seinem ruhesuchenden Lehrer erwartet. Wie er aber seine Normalverteilung und die Formel für seine Glockenfunktion fand, darüber liest man in Schulbüchern nichts. Der Term der gaußschen Glockenfunktion „fällt vom Himmel":

$$\varphi_{0;\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma^2} \cdot x^2} \tag{1}$$

Mitte	−9	−7	−5	−3	−1	1	3	5	7	9	μ
X	4%	7%	8%	10%	13%	13%	11%	15%	10%	7%	0.79
Y	4%	9%	11%	11%	12%	13%	11%	10%	10%	6%	0.18
Wk	5%	9%	11%	12%	12%	13%	12%	11%	9%	5%	0.00

Tab. 1: Wahrscheinlichkeiten und Häufigkeiten für die vorgegebenen Vertikalstreifen

Mitte	1	3	5	7	9	μ
D	6%	12%	23%	27%	33%	6.38
Wk	4%	12%	20%	28%	36%	6.67

Tab. 2: Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten für Kreisringe

Das Dartspiel (Experiment 1, bei dem man versucht, die Mitte des Kreises zu treffen), hilft bei der Suche nach einer Formel für die gaußsche Normalverteilung, die für Schülerinnen und Schüler nachvollziehbar ist. Man macht die folgenden plausiblen Annahmen:

- Die x- und die y-Koordinaten der Pfeilmarkierungen sind unabhängig voneinander und besitzen gleiche Wahrscheinlichkeitsverteilungen mit der unbekannten Dichte f,
- die Verteilung der Pfeilpunkte ist rotationssymmetrisch zum Ursprung.

Aus der ersten Annahme folgt: Die Wahrscheinlichkeit P, dass ein Punkt in einem Quadrat mit Mittelpunkt $M(x; y)$ und $dx \cdot dy$ Fläche liegt, beträgt

$P = f(x) \cdot dx \cdot f(y) \cdot dy$.

Wenn man das Koordinatensystem so um den Ursprung dreht (*Abb. 6*), dass M auf der (neuen) x-Achse, aber nun im Abstand $\sqrt{x^2 + y^2}$ vom Ursprung zu liegen kommt, erhält man

$P = f(\sqrt{x^2 + y^2}) \cdot dx \cdot f(0) \cdot dy$.

Folglich muss für die gesuchte Dichte f gelten

$$f(x) \cdot f(y) = f(\sqrt{x^2 + y^2}) \cdot f(0) \qquad \text{oder}$$

$$\frac{f(x)}{f(0)} \cdot \frac{f(y)}{f(0)} = \frac{f(\sqrt{x^2 + y^2})}{f(0)} \; .$$

Mit $\bar{f}(x) = \dfrac{f(x)}{f(0)}$ ergibt sich daraus

$$\bar{f}(x) \cdot \bar{f}(y) = \bar{f}(\sqrt{x^2 + y^2}) \qquad (2).$$

Setzt man speziell $y = x$, erhält man

$\bar{f}(\sqrt{2} \cdot x) = \bar{f}(x)^2$. Mit $\bar{f}(1) = a$ folgt

$\bar{f}(\sqrt{2}) = a^2$, $\bar{f}(2) = a^4$, $\bar{f}(2\sqrt{2}) = a^8$,

$\bar{f}(4) = a^{16}$, … und allgemein $\bar{f}(x) = a^{x^2}$.

Damit hat man die Struktur der Gauß-Funktion gefunden:

$$f(x) = f(0) \cdot a^{x^2}$$

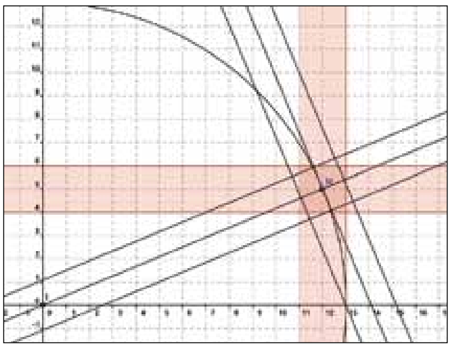


Abb. 8: Flächenbestimmung für ein Rechteck der Zielscheibe

Alternativer Gedankengang:

Da die Gleichung (2) für alle Zahlen gilt, gilt sie auch für $x = \sqrt{u}$ und $y = \sqrt{v}$. Man erhält: $\bar{f}(\sqrt{u}) \cdot \bar{f}(\sqrt{v}) = \bar{f}(\sqrt{u + v})$. Für die Funktion g mit $g(x) = \bar{f}(\sqrt{x})$ ergibt sich daraus mit $g(u) \cdot g(v) = g(u + v)$ die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion. Es gilt also $g(u) = c \cdot a^u$ und $\bar{f}(u) = c \cdot a^{u^2}$.

Die Kreiszahl Pi und die gaußsche Glocke

Wenn man von hier noch einen Schritt weiter gehen und auf die üblicherweise verwendete Darstellung (1) gelangen sowie herausfinden möchte, wie die Kreiszahl Pi ins Spiel kommt, kann man die Basis a als Potenz von e schreiben:

$$a = e^{-\frac{1}{2\sigma^2}}, \text{ indem man } \sigma = \sqrt{\frac{-1}{2 \cdot \ln(a)}} \text{ setzt.}$$

In der Tat ergibt sich dann

$$f_{0;\sigma}(x) = f(0) \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \cdot x^2}.$$

Den Wert der Konstante $f(0)$ erhält man durch Integrieren über Kreisringe: Aus

$$1 = f(0)^2 \cdot \int_0^\infty 2\pi r \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2} r^2} dr =$$

$$= f(0)^2 \cdot 2\pi\sigma^2 \left[- e^{-\frac{1}{2\sigma^2} r^2} \right]_0^\infty = f(0)^2 \cdot \sigma^2 \cdot 2\pi$$

folgt nämlich

$$f(0) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \; ,$$

also
$$f_{0;\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} x^2} .$$

Den Nachweis, dass der Parameter σ tatsächlich die Standardabweichung ist, dass also

$$\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (x - 0)^2 \cdot \varphi_{0;\sigma}(x) dx} = \sigma$$

gilt, kann man ggf. durch partielle Integration führen oder an Beispielen numerisch nachrechnen.

Die Dichte des Abstandes *D* – Warum σ „Standardabweichung" heißt

Auch in Experiment 1 kann man die Dichte der Zufallsgröße D (Abstand vom Ursprung) bestimmen: Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Pfeil in einer kleinen Fläche mit Inhalt $dx \cdot dy$ im Abstand r vom Ursprung einschlägt, ist, wie oben ausgeführt

$$f(r) \cdot f(0) \cdot dx \cdot dy = \frac{1}{2\pi \cdot \sigma^2} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2} r^2} dx dy.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Pfeil im Kreisring mit Radius r und Breite dr landet, erhält man durch Multiplikation mit der Kreisringfläche $2\pi \cdot r dr$:

$$2\pi \cdot r = \frac{1}{2\pi \cdot \sigma^2} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2} r^2} dr$$

$$= \frac{1}{\sigma^2} \cdot r \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2} r^2} dr.$$

Und die gesuchte Wahrscheinlichkeitsdichte g von D ergibt sich zu:

$$g(r) = \frac{1}{\sigma^2} \cdot r \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2} r^2}$$

Sie hat ihr Maximum an der Stelle $r = \sigma$, am wahrscheinlichsten („standardmäßig") schlägt der Pfeil also in der Nähe des Kreisringes mit Radius σ ein. Das erklärt den Namen „Standardabweichung". Der Erwartungswert von D ist aber etwas größer. Man erhält

$$\frac{1}{\sigma^2} \int_0^\infty r^2 \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2} r^2} dr = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \sigma.$$

Vergleich von Theorie und Wirklichkeit

Man kann bei Experiment 1 im Gegensatz zu Experiment 2 den Parameter σ nicht theoretisch bestimmen, da er von der Geschicklichkeit der Schützen abhängt.

Für den oben abgebildeten Datensatz erhält man die empirischen Standardabweichungen (bezogen auf den Ursprung, nicht auf die experimentellen Mittelwerte, die in der Nähe des Ursprunges liegen), $s_x = 4{,}02$ $s_y = 5{,}05$ und wenn man beide Datensätze zusammenfasst $s_{x-y} = 4{,}56$. Wie gut Theorie und Wirklichkeit zusammenpassen, wenn man diesen Schätzwert für die Standardabweichung verwendet, zeigen die folgenden Tabellen und ihre graphischen Veranschaulichungen, wobei die Wahrscheinlichkeiten der Klassen durch Punkte, die relativen Häufigkeiten durch Säulen markiert sind.

Wenn man das Pfeilwerfen als Team-Wettkampf ausgeführt hat, interessiert natürlich der Gewinner. Als Qualitätsmaßstab für die Treffgenauigkeit bietet sich die (gemeinsame) empirische Standardabweichung der X- und der Y- Koordinaten s_{X-Y} an – oder der mittlere Abstand $\bar{d}$ der Einstiche vom Ursprung. Die folgende Tabelle vermittelt einen Eindruck von den Ergebnissen, die man bei einer Wurfweite von 2 m erwarten kann. Die Gruppe von Nils besaß die höchste, die von Tobias die geringste Treffgenauigkeit. Auch die bei Vorliegen der Normalverteilung gültige theoretische Beziehung

$\mu(D) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \sigma_{X-Y}$ spiegelt sich in den experimentellen Daten wieder.

Mitte	−17	−15	−13	−11	−9	−7	−5	−3	−1	1	3	5	7	9	11	13	15	17
X	0%	0%	0%	1%	2%	5%	12%	13%	18%	17%	18%	9%	3%	3%	0%	0%	0%	0%
Y	0%	0%	0%	0%	1%	3%	5%	13%	13%	22%	10%	18%	8%	3%	2%	1%	1%	1%
Wk	0%	0%	0%	1%	3%	5%	10%	14%	17%	17%	14%	10%	5%	3%	1%	0%	0%	0%

Tab. 3: Relative Häufigkeiten der Abweichungen in x-, y-Richtung und Normalverteilung

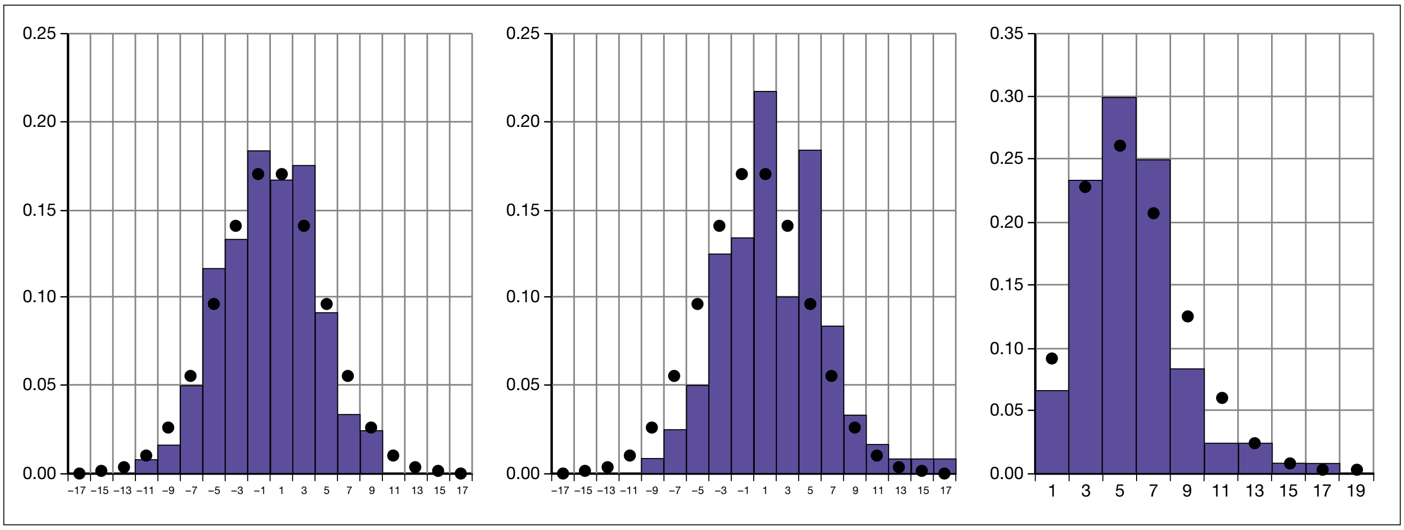


Abb. 9: Modell (Normalverteilung, schwarze Punkte) im Vergleich zu den empirischen Daten

Gruppe (Wurfzahl)	s_{X-Y}	$\bar{d}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot s_{X-Y}$
Nils (120)	4.56	5.67	5.72
Matthias (135)	6.24	7.33	7.82
Tobias (99)	5.01	6.11	6.28

Mitte	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
d	7%	23%	30%	25%	8%	3%	3%	1%	1%	0%
Wk	9%	23%	26%	21%	12%	6%	2%	1%	0%	0%

Tab. 4: Relative Häufigkeiten der Entfernung zu Ursprung und Wahrscheinlichkeitsmodell

Resümee – Hinweise zum Weiterlesen

Der Konstruktion von Lernpfaden in vorbereiteten (häufig digital aufbereiteten) Lernumgebungen widmet man heutzutage große Aufmerksamkeit. Dieser Artikel setzt mit dem Credo „die Wirklichkeit ist die schönste Lernumgebung" einen konstruktiven Kontrapunkt. Wer in die angespannten Gesichter der Pfeile werfenden Schülerinnen und Schüler schaut (s. o.), der erkennt unschwer, dass im Rahmen realer Experimente Mathematikunterricht auch eine emotionale Dimension bekommen kann, die „Sinn stiftet" – und die bei Beschränkung auf Simulationen verschlossen bleibt. Tatsächlich unterstützt das Dart-Experiment die Begriffsbildung im Bereich stetiger Zufallsgrößen in idealer Weise – es hilft, den gar nicht so schwierigen Begriff der Wahrscheinlichkeitsdichte zu entzaubern – und schlägt dabei eine Brücke zwischen Analysis und Stochastik. Dass man beim Nachdenken über das Dart-Experiment ins Spekulieren gerät, wie C. F. Gauß den Term seiner berühmten Glockenfunktion gefunden haben könnte, ist nach Aussagen eines Kollegen „der Knaller!".

Wer weniger tief „bohren" möchte, kann das Pfeilewerfen auch nur in den Dienst der beschreibenden Statistik stellen, Häufigkeitsverteilungen studieren oder auch nach Korrelationen zwischen *x*- und *y*-Koordinaten der Einstichpunkte suchen. Tatsächlich sind in Experiment 2 die *x*- und *y*-Koordinaten unkorreliert, aber nicht unabhängig voneinander, in Experiment 1 sind sie auch unabhängig.

Ausgearbeitete Unterrichtsmaterialien und weiterführende Experimente zum Sprung von der Analysis in die Stochastik finden sich im Literaturverzeichnis.

Literatur

Lambacher-Schweizer: Stochastik (978-3-12-735710-3) (2012). Stuttgart, Klett-Verlag S. 118 ff

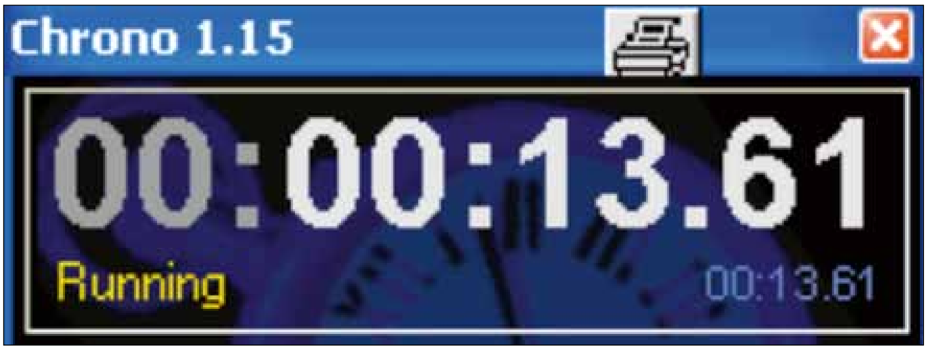
Einen detaillierten (von Rolf Reimer ausgearbeiteten) Unterrichtsgang dazu erhält man bei w.riemer@arcor.de

W. Riemer: Warum sich Ereignisse oft häufen. In: Mathematik lehren (ml) 153 (2009) S. 56–60

W. Riemer: Die Exponentialverteilung. In: PM 32 (2010) S. 40–43

Verfasser

Dr. Wolfgang Riemer
August-Bebel-Str. 80
50259 Pulheim
w.riemer@arcor.de
www.riemer-koeln.de



Die Stoppuhr Chrono (Freeware) © und Quelle: www. http://chrono.softonic.de/

Lernen aus Erfahrung

Ein „Fünfminuten-Experiment" zum Hypothesentest

Wolfgang Riemer

Die meisten Abiturientinnen und Abiturienten, die Aufgaben zur beurteilenden Statistik lösen, haben das Testen von Hypothesen während ihrer Schulzeit nie in einem authentischen Kontext erlebt – frei nach dem Lehrer-Motto „Zum Experimentieren fehlt mir die Zeit". Das im Artikel vorgestellte Experiment macht in beliebig großen Lerngruppen (selbst in vollen Hörsälen) die Testlogik in 5 Minuten am eigenen Leib erfahrbar.

Versuchsvorbereitung

Ein Versuchsleiter bedient mit der Computermaus eine Stoppuhr die über den Beamer auf einer Projektionsfläche für alle Schülerinnen und Schüler der Lerngruppe sichtbar ist (Stoppuhren sind in viele Betriebssysteme integriert, die Stoppuhr Chrono.exe (siehe oben) ist im Netz als Freeware unter www. http://chrono.softonic.de/ erhältlich).

Er sorgt bei dem folgenden Zeitschätzungsexperiment für eine Hintergrundmusik, sodass man leichte Bewegungen von Lernenden nicht akustisch wahrnehmen kann.

Versuchsdurchführung

Alle Schülerinnen und Schüler legen den Kopf mit geschlossenen Augen entspannt auf das Pult. Der Versuchsleiter zählt 3–2–1–0 und startet bei 0 durch Mausklick die Stoppuhr. Jeder Kursteilnehmer zählt „intern" langsam mit ... bis 60 ... solange, bis er glaubt, dass eine Minute vergangen ist. Dann hebt er **lautlos** den Kopf, öffnet die Augen und notiert (ohne „Kuli-Klicken" oder sonstige Nebengeräusche), wie viele Sekunden auf der Stoppuhr an der Projektionsfläche in Wirklichkeit vergangen sind. Damit nicht geschummelt wird, merkt sich jeder, wer als Nächster den Kopf hebt. Das Experiment wird wiederholt. Jeder, der beim zweiten Mal mit seiner Zeitschätzung näher bei dem Zielwert 60s landet, notiert ein +, ansonsten ein –.

Versuchsauswertung

Gezählt wird die Anzahl x der Verbesserungen „+" in der Lerngruppe aus n Teilnehmern. Z. B. könnten sich von $n = 25$ Schülern $x = 19$ verbessert haben.

Wenn man aus dem ersten Experiment nichts lernen würde, dann wäre die Anzahl der Verbesserungen Binomialverteilt mit Trefferwahrscheinlichkeit $p = 0,5$, würde also mit ca. 96 % Wahrscheinlichkeit im 2σ-Intervall liegen:

$$[\tfrac{n}{2} - 2\sqrt{n \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2}}\ ;\ \tfrac{n}{2} + 2\sqrt{n \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2}}\ ] =$$
$$= [\tfrac{n}{2} - \sqrt{n}\ ;\ \tfrac{n}{2} + \sqrt{n}\ ]$$

Beispiel: bei $n = 25$ erhält man das 2σ-Intervall [7,5; 17,5].

Wenn die Trefferzahl Ihres Kurses außerhalb des Intervalls liegt, haben Sie statistisch signifikant nachgewiesen, dass aus dem ersten Zeitschätzungsexperiment „gelernt" wurde.

Kommentar

Viele Lernende bestehen die die Abiturprüfung in Statistik ohne je einen wirklichen Signifikanztest durchgeführt zu haben. Das obige Experiment liefert Abhilfe. Wie man das Experiment auch im Rahmen beschreibender Statistik nur mit Boxplots auswerten kann, zeigt *Abb. 1*. In allen Lerngruppen rutschten

- der Median der Abweichungen von der Sollzeit „60 s (Horizontalstrich in der Box) und
- der Mittelwert (Punkt in der Box) rasant in Richtung Null.

Nicht nur die ausgedachten Ratten und Versuchskaninchen in den Statistikbüchern lernen aus Erfahrung, auch die Lerngruppe selbst ... und das in nur fünf Minuten. Probieren Sie es aus.

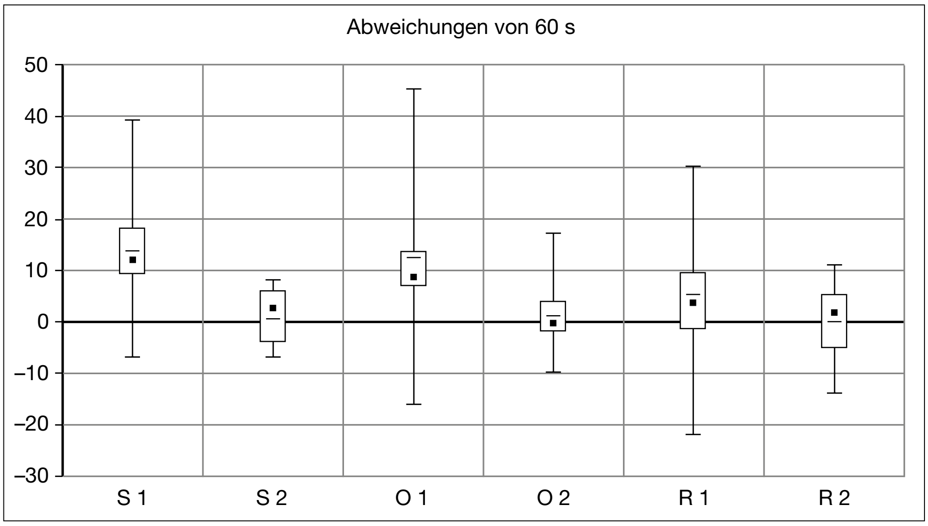


Abb. 1: Ergebnisse des Experiments für drei Lerngruppen S, O, R mit Boxplots dargestellt

Verfasser
Dr. Wolfgang Riemer
August-Bebel-Str. 80
50259 Pulheim
w.riemer@arcor.de
www.riemer-koeln.de