Klasse 7–8

KOMPETENZEN inhaltlich	KOMPETENZEN prozessbezogen	ZEITBEDARF	MATERIALPAKET
→ Wahrscheinlichkeit (%) → rel. Häufigkeit → Proportionalität, Symmetrie	→ Modellieren → Argumentieren, Kommunizieren → Problemlösen	→ 1 Doppelstunde	→ Arbeitsblätter zum Zusammenfassen der Würfelergebnisse - auch als Excel-Vorlage für den Beamer

Mit Quadern „würfeln“

Wahrscheinlichkeit als Modell der Wirklichkeit *erleben* - Modellierungskreislauf

Wolfgang Riemer

Wo knüpfen wir an?

Grundschulkinder besitzen ein präformales, subjektivistisches Wahrscheinlichkeitskonzept, das noch nicht quantitativ arbeitet. Der Begriff **„Chance“** spielt dabei eine zentrale eine Rolle. Ereignissen, die selten vorkommen und die man eher nicht erwartet (wie im Rheinland: Schnee zu Weihnachten) spricht man „kleine Chancen“ zu. Mitunter werden die Chancen auch schon auf einer Skala (unmöglich - unwahrscheinlich- fifty/fifty - wahrscheinlich – sicher) eingeordnet. Mit dem Prozentbegriff in Klasse 5/6 werden Chancen quantifizierbar. Kinder nutzen dann Sprechweisen wie 100% sicher oder du halst 0% Chance. In der folgenden Doppelstunde werden mithilfe eines Quaders diese präformalen Grundvorstellungen spekulierend und handelnd erweitert und mit beobachtbaren relativen Häufigkeiten verknüpft: Der subjektivistische Wahrscheinlichkeitsbegriff wird mit frequentistischen Vorstellungen zu einem tragfähigen Wahrscheinlichkeitsbegriff ausgebaut, der den Laplaceschen als Spezialfall enthält. Es entsteht eine sehr solide Grundlage für die sich anschließende Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Impuls

7c: Erste Stunde zur Wahrscheinlichkeitsrechung. Ich komme in die Klasse und starte mit „Kopfrechnen zu Prozentzahlen“. Anschließend erhält jedes Kind einen Quader (Abb. 1), dessen Seiten mit 1 bis 6 so beschriftet sind, dass sich die Augenzahlen der Gegenseiten zu 7 addieren - wie bei einem richtigen Würfel.

Impuls: „Schaut euch die Quader genau an und **schätzt** die **Chancen** der sechs Augenzahlen in Prozent.“ HALT! Nicht würfeln, nur schätzen! Ungefähr! Nach Gefühl!

Abb. 1: Quader 1,3x2x2,3 cm³

Reaktion

Kinder akzeptieren das Würfelverbot, kneifen Augen zusammen, tuscheln miteinander und nennen bereitwillig „Prozentzahlen“, von denen man einige an der Tafel festhält (Abb. 2). Dabei beachten sie intuitiv

a) Gegenseiten haben gleiche Chancen.
b) Große Seiten haben große Chancen.
c) Alle Chancen addieren sich zu 100%.

Begriffsbildung

Das Missachten eines der drei Punkte (Johanna hatte in Abb. 2 erst die Chancen für 1 und 3 geschätzt und zu spät bemerkt, dass dann für 2 zu viel übrig bleibt; Alexandra dachte an einen realen Versuchsausgang, nicht an Chancen) führt zu sehr fruchtbaren Diskussionen, in deren Verlauf der Unterschied zwischen Modellebene (Chance Wahrscheinlichkeit, **vor** dem Versuch „gefühlt“) und Realitätsebene (Häufigkeit, **nach** einem Versuch) greifbar wird. Die geschätzten Chancen in den Tabellenzeilen drücken Erwartungen aus. Wir nennen sie „hypothetische“ **Wahrscheinlichkeitsverteilungen**. „Verteilungen“ deswegen, weil sich die 100% auf alle möglichen Seiten „verteilen, hypothetisch, weil wir nicht sicher sind. Oft gibt es pfiffige Kinder, die von sich aus die Quader ausmessen und versuchen, die Wahrscheinlichkeiten so einzurichten, dass sich die 100% proportional zu den Flächen auf die Quaderseiten verteilen (letzte Zeile von Abb. 2). Die Diskussion wird abgeschlossen durch eine Abstimmung über die Glaubwürdigkeit der notierten Verteilungen, wobei viele Kinder an der „genau berechneten“ Hypothese zweifeln, weil ihnen die Werte für 1 und 2 zu nahe beieinander liegen und für 3 zu wenig übrig bleibt. (Tatsächlich zeigt sich, dass die Quaderwahrscheinlichkeiten **nicht** proportional zu den Seitenflächen sind.

Experimentieren

Nach dem Spekulieren erwartet man das Experiment mit Spannung. Jeder würfelt 100-mal. Die Ergebnisse werden in 5er Gruppen zusammengefasst (Abb. 3), dann langsam zum Mitschreiben ins Heft diktiert und simultan am Beamer kontrolliert. Durch die Verlangsamung beim Mitschreiben entsteht ein Gefühl für die Zufallsschwankungen, die dann ganz bewusst wahrgenommen werden. Man erlebt, dass sie sich durch Bilden von 5er Gruppen verkleinern, aber nie ganz verschwinden.
Als Abschluss einigt man sich in der 7c auf brauchbare (symmetrische) Wahrschein-

lichkeitsverteilungen, in die man sehr viel mehr Vertrauen hat als in die zuvor „aus dem hohlem Bauch heraus geschätzten". (Letzte Zeilen von Abb. 3). Die Wahrscheinlichkeiten bleiben aber vom Menschen gesetzte Hypothesen, die gut zur Wirklichkeit passen… aber möglicherweise durch weitere Versuche noch verbessert werden können (Modellbildungskreislauf). Das in dieser Doppelstunde „Erlebte" lässt sich gut zusammenfassen in folgendem

Merksatz

Wahrscheinlichkeiten sagen relative Häufigkeiten auf lange Sicht voraus. Sie sind gut gewählt, wenn die (durch Zufallseinflüsse schwankenden) relativen Häufigkeiten um die Wahrscheinlichkeit pendeln, also etwa gleich oft über wie unter der Wahrscheinlichkeit liegen.

Diese Modellierungssicht auf Wahrscheinlichkeit ist für Kinder sehr viel verständlicher als die „Definition" über den Grenzwert relativer Häufigkeiten unendlich langer Versuchsserie, weil es real keine solchen Versuchsserien gibt.

Wie geht es weiter?

Wie wahrscheinlich ist beim Werfen zweier Quader ein Pasch? Mit welcher Wahrscheinlichkeit gelingt bei 6 Würfen ein „Durchmarsch" (beim ersten Wurf keine 1, beim zweiten keine 2, … beim sechsten keine 6")? Mit den oben aufgestellten Wahrscheinlichkeiten und der Pfadregel lassen sich solche Fragen beantworten – und *durch erneutes Auszählen der Quader-Urdaten* mit der Realität vergleichen. Die Online-Kopiervorlage wurde dazu vorbereitet.

In der Regel sind die mithilfe der Pfadregel gewonnenen Prognosen ausgezeichnet.

Resümee

Der Clou bei diesem Einstieg besteht in der Verwendung **teilweise** symmetrischer Objekte:

Würfeln mit Quadern — 0,2l Würfelbecher auf den Tisch gestülpt

einige Schätzungen	1	2	3	4	5	6	Σ	Glaub-würdigk.
Rene'	10%	5%	35%	35%	5%	10%	100%	30%
Stefan	15%	10%	25%	25%	10%	15%	100%	10%
Alexa	10%	12%	35%	20%	15%	8%	100%	0%
Joanna	15%	15%	20%	20%	15%	15%	100%	0%
Jasmin	15%	5%	30%	30%	5%	15%	100%	50%
Fläche cm²	2.99	2.6	4.6	4.6	2.6	2.99	20.38	
	14.7%	12.8%	22.6%	22.6%	12.8%	14.7%	100%	10%

Abb. 2: einige Schätzungen und "berechnete Propotionalitätshypothese"

Patrick	10	6	28	41	4	11	100
Daniel	6	7	35	45	4	3	100
Binoy	7	4	37	34	1	17	100
Tobias	3	6	48	33	6	4	100
Michael	12	0	28	42	7	11	100
abs. H.	38	23	176	195	22	46	500
%	7.6%	4.6%	35.2%	39.0%	4.4%	9.2%	100%

Paula	11	6	34	32	7	10	100
Elaine	14	10	28	24	9	15	100
Marie	4	6	41	32	11	6	100
Marga	10	6	34	29	7	14	100
Sandra	7	4	30	37	4	18	100
abs. H.	46	32	167	154	38	63	500
%	9.2%	6.4%	33.4%	30.8%	7.6%	12.6%	100%

Summe (27 Kinder)	279	207	834	883	204	293	2700
%	10.3%	7.7%	30.9%	32.7%	7.6%	10.9%	100%

Geschätzte Wahrscheinlichkeiten

brauchbare "Hypothese" A	11.0%	8.0%	31.0%	31.0%	8.0%	11.0%	100%
brauchbare "Hypothese" B	10.5%	8.0%	31.5%	31.5%	8.0%	10.5%	100%

Abb. 3: Würfelergebnisse einiger 5er-Gruppen, konsensfähige Wahrscheinlichkeiten

a) Wenn man sich nämlich **auf vollständig symmetrische** Objekte wie Münze oder Würfel beschränkt, verschwindet die fundamentale Idee der Statistik, dass Wahrscheinlichkeiten stets nur hypothetischen Charakter haben und oft bezweifelt (oder im Sinne des Modellbildungskreislaufs verbessert) werden müssen. Es gibt bei symmetrischen Objekten eben nur eine sinnvolle Hypothese, die Laplace-Annahme, an der normale Menschen nur zweifeln, wenn sie durch eingekleidete Aufgaben dazu gezwungen werden.

b) Wenn man sich andererseits **auf unsymmetrische** Objekte wie Reißzwecken oder „Schweinewürfel" beschränkt, fallen Modellebene (Wahrscheinlichkeit) und Realitätsebene (relative Häufigkeit) begrifflich schnell zusammen: Wer wollte bei 560 mal „Seitenlage" in 1000 Reißzweckenwürfen die Wahrscheinlich für „Seitenlage" anders schätzen als durch 56%?

c) bei **teilweise symmetrischen** Objekten (auch Schraubenmuttern oder Legosteine sind geeignet) kann man dagegen Modell- und Realitätsebene, also Wahrscheinlichkeiten und relative Häufigkeiten griffig voneinander unterscheiden: Bei symmetrischen Tabellenzeilen handelt es sich um **Wahrscheinlichkeitsverteilungen**, die Vorhersagen machen wollen, bei nur annähernd symmetrischen Tabellenzeilen um **relative Häufigkeitsverteilungen** aus der **Realitätsebene**.

Literatur:

Einige Quader sind im Mathekoffer des Friedrich-Verlages enthalten (Neuauflage 2014 bei der MUED). Sie können auch beim Autor (www.riemer-koeln.de) in Klassensatzstärke bezogen werden. Dort findet man auch überraschende Entdeckungen zur Theorie der Quaderwahrscheinlichkeiten, die von der Wurftechnik abhängt (Gibbs-Verteilung).

Würfeln mit einem Quader - individuelle Versuchsauswertung Auswertungsvorlage 1

1 Mit welcher Chance wird jede einzelne Seite gewürfelt?

a) Jeder würfelt 100-mal und protokolliert seine 100 gewürfelten Augenzahlen zeilenweise in der folgenden Tabelle (Urliste)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										

b) anschließend wird gezählt, wie oft die einzelnen Augenzahlen vorkamen (absolute Häufigkeitsverteilung).

1	2	3	4	5	6

Kontrolle: Die Summe der Häufigkeiten (zweite Tabellenzeile) muss 100 ergeben!

2 Mit welcher Chance gelingt ein Durchmarsch? (Vertiefung)

Wenn du sechsmal hintereinander würfelst und beim ersten Wurf KEINE 1, beim zweiten Wurf KEINE 2, … , beim sechsten Wurf KEINE 6 bekommst, ist dir ein Durchmarsch gelungen. Wenn du z. B. beim dritten Mal die 3 erwischt, ist der Durchmarschvesuch an der Stelle 3 gescheitert. Er kann aber auch schon beim ersten … oder - wenn man großes Pech hat - auch noch beim sechsten Wurf scheitern.

a) Schätze, beim wievielten Versuch der Durchmarsch beim Quader besonders oft scheitert.

b) Schätze die Chance, dass er gelingt.

c) Zähle deine Urliste aus 1a mit den 100 Würfen erneut aus und ermittle, wie oft der Durchmarsch gelungen ist, wie oft er beim ersten, zweiten, …, sechstem Mal scheitete.

Durchmarsch gescheitert						Erfolg	Anzahl
1	2	3	4	5	6	6	Versuche

Beispiel: wenn der Anfang der Urliste wie folgt aussieht

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	3	1	4	4	3	2	3	5	4	3
2	1	5	3	3	4	3	3	6	usw.	
3										

ist der erste Durchmarsch (gelb) an der Stelle 4, der zweite (blau) an der Stelle 2 gescheitert. Der dritte Versuch gelang, der vierte scheiterte an der Stelle 6 (großes Pech).

Würfeln mit einem Quader - gemeinsame Versuchsauswertung   Auswertungsvorlage 2

1 Ergebnisse zusammenfassen

Jede Fünfergruppe diktiert ihre Ergebnisse namentlich. Dann wird zusammengefasst und eine verbesserte Hypothese über die Wahrscheinlichkeiten aufgestellt (letzte Zeile linke Tabellenhälfte)

Die Ergebnisse meiner Klasse in 5er-Gruppen:								Durchmarsch gescheitert						Erfolg
Name	1	2	3	4	5	6		1	2	3	4	5	6	6
absolute H.														
%														
absolute H.														
%														
absolute H.														
%														
absolute H.														
%														
absolute H.														
%														
absolute H.														
%														
alle zusammen														
absolute H.														
%														
brauchbare Hypothese														
Wahrscheinl. %														

2 Wahrscheinlichkeit eines Durchmarschs berechnen

a) Berechne mit in 1 aufgestellten der Hypothese und der Pfadregel die Wahrscheinlichkeit, dass ein Durchmarsch gelingt bzw. an der ersten, …, sechsten Stelle scheitert. Vergleiche mit den experimentellen relativen Häufigkeiten.

b) Bestimme die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten für einen normalen Würfel und vergleiche mit den Wahrscheinlichkeiten beim Quader.