

Stochastik erkunden

Ideenreiche Arbeitsblätter mit

GeoGebra

Wolfgang Riemer
Reimund Vehling



Liebe Leserin, lieber Leser,

die Welt ist voller Daten, voller Interpretationen, voller Wahrscheinlichkeitsaussagen, voller Schlussfolgerungen, voller Entscheidungen unter Unsicherheit.

Aber wie kommt man zu den Schlussfolgerungen? Wie genau sind die Wahrscheinlichkeitsangaben? Was sind überhaupt Wahrscheinlichkeiten? Was unterscheidet Wahrscheinlichkeiten von relativen Häufigkeiten? Was unterscheidet „theoretische“ von „empirischen“ Wahrscheinlichkeiten? Gibt es überhaupt „empirische“ Wahrscheinlichkeiten oder sind das relative Häufigkeiten? Und was bedeuten Wahrscheinlichkeiten bei nicht reproduzierbaren Situationen wie etwa dem Klimawandel?

Dies alles zu fragen ist einfach. Überzeugende Antworten zu geben erfordert deutlich mehr Wissen und Anstrengung. Und: Wir sind mit unseren Fragen noch nicht fertig. Es gibt noch mehr, über das sich ein Nachdenken – auch im Unterricht – lohnt:

- ▶ Was hat Lernen aus Erfahrung mit Wahrscheinlichkeit zu tun? In der Werbung werden fast ausschließlich attraktive Models abgelichtet – hat das nicht viel mit bedingten Wahrscheinlichkeiten und dem Lernen aus Erfahrung zu tun?
- ▶ Warum verschweigen „spitzfindige“ Statistiker Stichprobenumfänge? Warum sind die Achsen statistischer Zeitungsgrafiken mitunter anders beschriftet als im Mathebuch? Aus Nachlässigkeit? Aus Hinterlist?

Wenn Ihre Schülerinnen und Schüler über solche Fragen nachgedacht haben, vielleicht sogar auf einige dieser Fragen überzeugende Antworten geben können, dann war Ihr Stochastikunterricht erfolgreich und allgemeinbildend, dann haben Sie Ihren Schülerinnen und Schülern eine gute Portion Mündigkeit auf den Lebensweg mitgegeben.

Aber was ist zu tun, damit das gelingt? Für uns hat guter Mathematikunterricht viel Ähnlichkeit mit dem Forschen in einem Labor, in dem man großen Fragen im Kleinen, in einer „klinisch sauberen“ Umgebung unter definierten und präzise festgelegten Rahmenbedingungen nachgeht. Dabei werden Grundlagen gelegt, zentrale Begriffe gefestigt, Zusammenhänge elementarisiert und „exemplarisch auf den Punkt“ gebracht. Und zwar nicht (oder nicht nur) durch Erklären, Lesen und Diskutieren, sondern immer wieder auch durch selber Tun, durch Experimentieren mit Würfeln, Münzen usw., durch das Aufstellen und Erproben von Modellen, durch „was wäre wenn“-Analysen im Rahmen von händischen oder digitalen Simulationen.

Nur im Wechselspiel von Nachdenken und praktischem Handeln lassen sich altersgerecht adäquate und vor allem



Ein traditioneller Algorithmus für weniger mündige Bürger. Und doch: Wer Münzen wirft, Würfel rollt ... oder Blümchen zupft ... der spielt mit wichtigen Modellen (nach Lothar Sachs).

tragfähige Grundvorstellungen aufbauen, begriffliche Festlegungen verstehen und Grundkonzepte der Stochastik erarbeiten. Hierbei ist die für im schulischen Bereich kostenfreie und mehrfach ausgezeichnete Software GeoGebra ein mächtiges und hilfreiches Werkzeug.

Mit Rücksicht auf unterschiedliche Leserinteressen gliedert sich das vorliegende Heft in

- ▶ eine „Werkzeugkiste“ zum Bearbeiten stochastischer Fragestellungen mit GeoGebra,
- ▶ fertige Dateien zur direkten Verwendung im Unterricht und
- ▶ konkrete Arbeitsblätter zu interessanten stochastischen Projekten.

Diese Bausteine stehen nicht unverbunden nebeneinander, sie werden verbunden durch einen roten Faden, durch unsere „Philosophie guten Stochastikunterrichts“, die sich durch wenige Paradigmen charakterisieren lässt. Sie halten somit auch eine „Didaktik der Stochastik“ in Händen. Diese ist in vielen Unterrichtsexperimenten im Rahmen intensiver „Handlungsforschung“ gewachsen. Sie hat sich im Schulalltag bewährt und überwindet die seit 40 Jahren beklagte Trennung von Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik.

Wir wünschen Ihnen und Ihren Schülerinnen und Schülern viel Freude und spannende Entdeckungen beim „Erlebnis Stochastik“ mit GeoGebra!

Wolfgang Riemer

Reinhold Vohling

	Stochastik unterrichten – worauf kommt es an?	4
1	Kapitel 1: Grundlagen	
	Kapitel 1.1 Der Analyseassistent – Datenauswertung „per Klick“	10
	Arbeitsblatt 1.1: Wie viel wiegt ein Esslöffel Zucker?	12
	Arbeitsblatt 1.2: Wie viel wiegt ein Esslöffel Zucker?	13
	Kapitel 1.2 Grundlegende Befehle – Datenauswertung „per Hand“	14
	Arbeitsblatt 2: Notenspiegel	15
	Arbeitsblatt 3: Warten auf die Sechs	15
	Kapitel 1.3 Simulieren – mit Zufallszahlen, Tabellen und Listen	16
	Arbeitsblatt 4: Der Computer würfelt	18
	Arbeitsblatt 5: Der Computer schnippt Münzen	18
	Arbeitsblatt 6: Kugeln ziehen – mit und ohne Zurücklegen	19
	Arbeitsblatt 7.1: Die böse Sechs	20
	Arbeitsblatt 7.2: Die böse Sechs für Fortgeschrittene	21
	Arbeitsblatt 8: Punktsommen und die Normalverteilung	21
	Kapitel 1.4 Binomialverteilung, Intervallwahrscheinlichkeiten und die Laplace-Bedingung auf dem Prüfstand	22
	Arbeitsblatt 9: Die Binomialverteilung	23
	Arbeitsblatt 10: Die Näherung von de Moivre-Laplace	23
	Arbeitsblatt 11: Konkurrenz für die Laplace-Bedingung „ $\sigma > 3$ “	24
	Kapitel 1.5 Kurzprojekte - den Umgang mit GeoGebra üben	25
Arbeitsblatt 12: Minute schätzen – aus Erfahrung lernen	26	
Arbeitsblatt 13: Gewichte schätzen – aus Erfahrung lernen	26	
Arbeitsblatt 14: Pulsschlag	27	
Arbeitsblatt 15: Handbreit und Ellenlang	27	
Arbeitsblatt 16: Glückssträhne oder ausgleichende Gerechtigkeit?	28	
Arbeitsblatt 17: Wandwerfen	28	
Arbeitsblatt 18: Statistik der Zeichengenauigkeit	29	
Arbeitsblatt 19: Statistik der Zeichen- oder Schätzgenauigkeit	30	
Kapitel 1.6 Statistische Daten importieren	31	
2	Kapitel 2: Ready to teach	
	Kapitel 2.1 Boxplots und klassierte Säulendiagramme	34
	Arbeitsblatt 1: Boxplots und Säulendiagramme	35
	Kapitel 2.2 Mit Wahrscheinlichkeiten prognostizieren: Pfad/Summenregel	36
	Arbeitsblatt 2: Mit Quadern würfeln: Durchmarsch	37
	Arbeitsblatt 3: Würfeln, bis der Quader qualmt	38
	Kapitel 2.3 Summenexperimente und Wahrscheinlichkeitsglocken	39
	Arbeitsblatt 4: Punktsommen: Tabellen können zaubern	40
	Arbeitsblatt 5: Standardabweichung und Gauß'sche Glocke	41
	Kapitel 2.4 Den Zweifel sortieren – Testgrößen erfinden	42
	Arbeitsblatt 6: Den Zweifel sortieren – Testgrößen erfinden	43
	Arbeitsblatt 7: Dynamisch simulieren – eine Programmieranleitung	44
	Kapitel 2.5 Versteckte Wahrscheinlichkeiten finden	45
Arbeitsblatt 8: Wahrscheinlichkeiten verstecken und wiederfinden	46	

Kapitel 2.6 Lernen aus Erfahrung	47
Arbeitsblatt 9.1: Lernen aus Erfahrung	48
Arbeitsblatt 9.2: Lernen aus Erfahrung	49
Arbeitsblatt 9.3: Lernen aus Erfahrung: Wie der Computer rechnet	50
Arbeitsblatt 9.4: Lernen aus Erfahrung: Mehr Indizien, gleiches Prinzip	51
Arbeitsblatt 9.5: Lernen aus Erfahrung: Selber kalkulieren	52
Kapitel 2.7 Gesetz der großen Zahlen, Prognoseintervalle	52
Arbeitsblatt 10: Wahrscheinlichkeiten schauen in die Zukunft	54
Arbeitsblatt 11: Das Gesetz der großen Zahlen qualitativ	55
Arbeitsblatt 12: Das Gesetz der großen Zahlen quantitativ	56
Arbeitsblatt 13: Das $\frac{1}{\sqrt{n}}$ -Gesetz und das Konzept des Bezweifelns	57
Arbeitsblatt 14: Die Wette gilt!	58
Kapitel 2.8 Konfidenzintervalle	59
Arbeitsblatt 15.1: Konfidenzintervalle definieren	61
Arbeitsblatt 15.2: Konfidenzintervalle entdecken	62
Arbeitsblatt 16: Konfidenzintervalle trainieren	63
Kapitel 2.9 Der Alternativtest	64
Arbeitsblatt 17: Geschickt entscheiden – ein Experiment	65
Arbeitsblatt 18: Geschickt entscheiden – Theorie	66
Arbeitsblatt 19: Das Entscheidungsspiel erklärt einseitige Signifikanztests	67
Kapitel 2.10 Das Signifikanztest-Tool	68
Arbeitsblatt 20: Ein Universalwerkzeug für Signifikanztests	70
Arbeitsblatt 21: Signifikanztestaufgaben trainieren	71
Arbeitsblatt 22: Signifikanztestaufgaben lösen, Schemata hinterfragen	72
Kapitel 2.11 Die Normalverteilung	73
Arbeitsblatt 23: Die Gauß'sche Glocke	74
Arbeitsblatt 24: Die Normalverteilung	75
Arbeitsblatt 25: Normalverteilung: Modell und Wirklichkeit	76
Arbeitsblatt 26: Normal-Quantil (NQ)-Plots	77
3 Kapitel 3: Projekte	
Kapitel 3.1 Das Glücksrad auf der schiefen Ebene	80
Arbeitsblatt 1: Glück auf der schiefen Ebene	82
Arbeitsblatt 2: Wahrscheinlichkeitsdichte und Verteilungsfunktion	83
Arbeitsblatt 3: Das schiefe Glücksrad und beurteilende Statistik	84
Kapitel 3.2 Reaktionszeiten messen, Hypothesen prüfen	85
Arbeitsblatt 1: Reaktionszeiten – Experimente	86
Arbeitsblatt 2: Reaktionszeiten und beurteilende Statistik	87
Kapitel 3.3 Warten auf das „Äh“ Die Exponentialfunktion besucht die Stochastik	88
Arbeitsblatt 1: Warten auf das nächste „Äh“	89
Arbeitsblatt 2: Die Exponentialverteilung und das „Äh“	90
Arbeitsblatt 3: Ein Blick hinter die Kulissen	91
Kapitel 3.4 Die beiden Standardabweichungen s_n und s_{n-1}	92
Arbeitsblatt 1: Grundgesamtheit und Stichprobe	93
Arbeitsblatt 2: Die zwei Standardabweichungen s_n und s_{n-1}	94
Arbeitsblatt 3: s_{n-1}^2 als erwartungstreuer Schätzer der Varianz σ^2	95
Literatur	96

Stochastik unterrichten – worauf kommt es an?

1 Wahrscheinlichkeit und Statistik: ein spannungsgeladenes Verhältnis

„Statistik ohne Wahrscheinlichkeitsrechnung ist blind, Wahrscheinlichkeitsrechnung ohne Statistik ist leer.“ So charakterisierte Hans Schupp (1982) als Vorsitzender der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik das Verhältnis zwischen den beiden Säulen der Stochastik und brachte damit seine Unzufriedenheit mit dem damaligen Curriculum zum Ausdruck. Tatsächlich liest sich das Curriculum auch heute noch linear wie folgt:

- ▶ zuerst die beschreibende Statistik,
- ▶ dann die Wahrscheinlichkeitsrechnung und
- ▶ zum Abschluss die beurteilende Statistik.

Damit wird das Vorgehen der Hochschule, das von Anfang an nach formaler Exaktheit und Systematik strebt, kopiert. Im Zentrum schulischer Stochastik stehen aber neugierige Kinder und Jugendliche mit ihren Alltagsintuitionen und Interesse an spannenden Fragen. Diese gilt es hervorzuholen und zu beantworten: Im Unterricht stehen Systematik und formale Exaktheit am Ende, nachdem Begriffe über konkrete Inhalte als sinnstiftend erlebt und Zusammenhänge entdeckt wurden, nicht am Anfang. Stochastik „tickt“ in Schule anders als in Hochschule!

Das brachte in den 1970er-Jahren eine Klasse 7 dadurch zum Ausdruck, dass sie einen Papierflieger an der Tafel zerschellen ließ, als es in den ersten Stochastikstunden nicht um Wahrscheinlichkeit ging, sondern um Grundräume, um Ergebnisse, um Schnittmengen („Und-Ereignisse“) und Vereinigungsmengen („Oder-Ereignisse“). Die Parallelität zu einer universitären Veranstaltung mit dem Titel „Wahrscheinlichkeitstheorie“, bei der zunächst die Maßtheorie thematisiert wird, ist unverkennbar. Leider trug die in den 1970er-Jahren während der „strukturmathematischen Welle“ unter dem Stichwort „Mengenlehre“ kultivierte „Ereignisalgebra“ zur Förderung stochastischer Grundvorstellungen wenig bei. Sie hat den Namen Kolmogorow – der in keinem Lehrplan mehr auftaucht – in schulischen Gefilden völlig zu Unrecht diskreditiert.

Aber wie lassen sich Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik auf der Schule sinnvoll verzahnen und so die von Hans Schupp kritisierte „blinde Leere“ in „sehende Fülle“ verwandeln? Unsere Antwort ist so kurz und griffig, dass sie sich in wenige Paradigmen fassen lässt.

2 Paradigmen

- ▶ Verwende einen passenden Wahrscheinlichkeitsbegriff.
- ▶ Trenne Modell und Realität – messerscharf und konsequent.
- ▶ Untersuche Zufallsschwankungen, anstatt sie wegzuwünschen.

- ▶ Stelle nicht nur Aufgaben, sondern echte Fragen, die durch Experimente beantwortet werden.
- ▶ Nutze den „didaktischen Dreischritt“: Spekulieren – Experimentieren – Reflektieren.
- ▶ Nutze Software nicht nur zur Individualisierung (die schnell in „Vereinzelung“ endet), sondern vor allem zur Verlangsamung, als Anlass zu sinnstiftendem und begriffsbildendem Kommunizieren im Plenum. Nach dem Motto: „Einer klickt, alle denken – das ist besser als alle klicken, keiner denkt.“

In den folgenden Abschnitten werden diese Paradigmen am Beispiel zweier Schlüsselstunden erläutert.

3 Wahrscheinlichkeit (Schlüsselstunde Klasse 7)

3.1 Hypothetisch-prognostischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Es ist die erste Stunde zur Wahrscheinlichkeitsrechnung (die Schülerinnen und Schüler sind mit dem Prozentbegriff vertraut): Jeder erhält einen Quader (**Abb. 1**), dessen Seiten so beschriftet sind, dass sich die Augenzahlen der Gegenseiten zu 7 addieren – wie bei einem Spielwürfel.

Schritt 1: Spekulieren

Der Einstiegsimpuls lautet:

*Schaut euch die Quader genau an und schätzt die „Chancen“ der sechs Augenzahlen in Prozent ...
Nicht würfeln, nur schätzen! Nach Gefühl.*

Die Lernenden akzeptieren das Würfelverbot und nennen „Prozentzahlen“, von denen man einige festhält wie in **Abb. 1**. Dabei beachten sie intuitiv:

- ▶ Gegenseiten haben gleiche Chancen.
- ▶ Große Seiten haben große Chancen.
- ▶ Alle Chancen addieren sich zu 100%.

Das Missachten eines der drei Punkte führt zu fruchtbaren Diskussionen: Johanna hatte erst die Chancen für 1 und 3 geschätzt und zu spät bemerkt, dass dann für 2 zu viel übrig bleibt; Alexandra dachte an einen realen Versuchsausgang, nicht an Chancen. Dabei wird der Unterschied zwischen Modellebene (Chance bzw. Wahrscheinlichkeit, vor dem Versuch, „gefühlte“) und Realitätsebene (Häufigkeit, nach einem Versuch „ausgezählt“) greifbar. Die geschätzten Wahrscheinlichkeiten in den Tabellenzeilen drücken Erwartungen aus. Wir nennen sie „hypothetische Wahrscheinlichkeitsverteilungen“. *Verteilungen* deshalb, weil sich die 100% auf alle möglichen Seiten verteilen; *hypothetisch*, weil wir nicht sicher sind.

Schritt 2: Experimentieren

Nach dem Spekulieren wird das Experiment mit Spannung erwartet. Jeder würfelt 100-mal. Die Ergebnisse werden in 5er-Gruppen zusammengefasst, dann langsam zum



Würfeln des Quaders mit Würfelbechern – auf den Tisch gestülpt						
Schätzungen	1	2	3	4	5	6
René	10%	4%	35%	35%	5%	10%
Stefan	15%	10%	25%	25%	10%	15%
Alexa	10%	12%	35%	20%	15%	8%
Johanna	15%	15%	20%	20%	15%	15%
Jasmin	15%	5%	30%	30%	5%	15%
Fläche in cm ²	2,99	2,60	4,60	4,60	2,60	2,99
Fläche in %	14,7%	12,8%	22,6%	22,6%	12,8%	14,7%

Abb. 1: Der Quader $1,3 \times 2 \times 2,3 \text{ cm}^3$ ist wie ein Würfel beschriftet. Die Tabelle enthält die *geschätzten* Chancen (Hypothesen) für die unterschiedlichen Augenzahlen. Alexas Schätzung führt zu intensiver Diskussion. Der Unterschied zwischen unsymmetrischen Häufigkeitsverteilungen (Realitätsebene) und symmetrischen Wahrscheinlichkeiten (Modellebene) tritt prägnant hervor – deswegen sind teilsymmetrische Objekte ideal.

Mitschreiben ins Heft diktiert und simultan am Beamer kontrolliert. Durch die Verlangsamung beim Mitschreiben entsteht ein Gefühl für die Zufallsschwankungen, die dann ganz bewusst wahrgenommen werden (**Abb. 2**).

Schritt 3: Reflektieren

Durch Bilden von 5er-Gruppen verkleinern sich die Zufallsschwankungen, aber sie verschwinden nie ganz, auch nicht durch Zusammenfassen der 2700 Ergebnisse der ganzen Klasse. Abschließend einigen wir uns auf brauchbare symmetrische (!) Wahrscheinlichkeitsverteilungen. In die haben wir sehr viel mehr Vertrauen als in die zuvor „aus dem hohlen Bauch“ geschätzten.

Werden Schülerinnen und Schüler statt mit Quadern zum Beispiel mit dem Vierfach-Münzwurf konfrontiert, verläuft der Unterricht mit Spekulieren – Experimentieren – Reflektieren völlig analog. (Der Vierfach-Münzwurf wird gern verpackt als „Lehrer Lämpels Notengebung“ (Herget 1997, S. 5): Für jede Arbeit wirft er vier (ideale) Münzen, zählt, wie oft „Wappen“ gefallen ist, addiert 1 und notiert dieses Ergebnis als Note). In beiden Fällen bietet es sich an, eine Theoriephase nachzuschieben:

- ▶ Beim Quader richten wir die Wahrscheinlichkeiten so ein, dass sie den Seitenflächen proportional werden – und erhalten ein schlechtes Modell.
- ▶ Beim Vierfach-Münzwurf unterlegen wir eine Laplace-Struktur mit 16 Ergebnissen – und erhalten ein gutes Modell.

Das Erlebte fassen wir wie folgt zusammen:

Wahrscheinlichkeiten sind **vom Menschen gesetzte Modelle** der Wirklichkeit, die Vorhersagen machen wollen und die man in Modellbildungskreisläufen nachjustiert und optimiert.

Wahrscheinlichkeiten leben auf der Modellebene („im Kopf“), sie schauen nach vorne.

Relative Häufigkeiten leben in der Realitätsebene („im Würfelbecher“), sie schauen zurück.

Mit dem „hypothetisch-prognostischen“ Wahrscheinlichkeitsbegriff und der Modellierungssicht auf Wahrscheinlichkeiten schlägt man mehrere Fliegen mit einer Klappe:

Patrick	10	6	28	41	4	11
Daniel	6	7	35	45	4	3
Binoy	7	4	37	34	1	17
Tobias	3	6	48	33	6	4
Michael	12	0	28	42	7	11
absolute H.	38	23	176	195	22	46
relative H.	7,6%	4,6%	35,2%	39,0%	4,4%	9,2%

Paula	11	6	34	32	7	10
Elaine	14	10	28	24	9	15
Marie	4	6	41	32	11	6
Marga	10	6	34	29	7	14
Sandra	7	4	30	37	4	18
absolute H.	46	32	167	154	38	63
relative H.	9,2%	6,4%	33,4%	30,8%	7,6%	10,5%

Summe (27 Kinder)	279	207	834	883	204	293
	10,3%	7,7%	30,9%	32,7%	7,6%	10,9%

verbesserte Schätzung						
Hypothese A	11,0%	8,0%	31,0%	31,0%	8,0%	11,0%
Hypothese B	10,5%	8,0%	31,5%	31,5%	8,0%	10,5%

Abb. 2: Häufigkeiten und zwei verbesserte Schätzungen (vgl. 2-02-quader-auswertungsvorlage.ggb)

Didaktischer Hintergrund: Stochastik unterrichten – worauf kommt es an?

- ▶ Man knüpft an alltägliche subjektivistische Vorerfahrungen (an unser „Bauchgefühl“) an. Schülerinnen und Schüler erleben: Mathe hat mit mir zu tun.
- ▶ Der hypothetisch-prognostische Wahrscheinlichkeitsbegriff enthält – wenn man vollständige Symmetrie unterstellt – den Laplaceschen als Spezialfall.
- ▶ Im Gegensatz zum frequentistischen Wahrscheinlichkeitsbegriff (nach Richard von Mises) braucht man keine unendlich langen Versuchsserien, die es nicht gibt. Es entfällt die für das Verständnis und die Entwicklung tragender Grundvorstellungen fatale Vermischung von relativer Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit, also die Vermischung von Wirklichkeit und Modell.

Damit wird die „Kopernikanische Wende der Stochastik“ von Richard von Mises' Wahrscheinlichkeit als „Grenzwert relativer Häufigkeiten“ hin zur Axiomatik des Andrei Nikolajewitsch Kolmogorow (in der man Wahrscheinlichkeiten genau wie bei uns als gesetzte Modelle deuten und damit weiterarbeiten kann) didaktisch nachvollzogen. Hier kommen also (als fast schon dialektische Pointe) strukturmathematische und fachdidaktische Intentionen zusammen, wenn auch aus unterschiedlichen Beweggründen.

4 Zufallsschwankungen und das $\frac{1}{\sqrt{n}}$ -Gesetz (Schlüsselstunde, Klasse 8)

Schritt 1: Spekulieren

Der Einstiegsimpuls lautet:

Wirf eine faire Münze in Gedanken erst 25-mal, dann 100-mal und anschließend 400-mal. Notiere jeweils eine Häufigkeit für „Kopf“, von der du glaubst, dass sie realistisch auftreten könnte. Wiederhole das viermal.

Die Lernenden diktieren ihre Ergebnisse in ein gemeinsames Kalkulationsblatt, das die Schätzungen als Punktdiagramm visualisiert (Abb. 3 und Abb. 4). Diskussionen im Plenum sind garantiert, und das Bedürfnis „nachzuschauen“, wie sich faire Münzen tatsächlich verhalten, ist virulent.

Schritt 2: Experimentieren

Wir empfehlen, Münzen zunächst 25-mal und dann weiter bis insgesamt 100-mal händisch zu werfen und in Kleingruppen erleben zu lassen, wie sich die Schwankungen der relativen Häufigkeiten von 25 auf 100 tatsächlich entwickeln, und dann das Erlebte durch Computersimulation abzusichern.

Schritt 3: Reflektieren

Wie ein Vergleich von Abb. 4 und Abb. 5 zeigt, zerbrechen die Primärintuitionen an der erlebten bzw. simulierten Realität: Eine Vervielfachung (!) des Versuchsumfangs halbiert die Größe der Zufallsschwankungen, die man zum Beispiel über die Längen der Boxen in Boxplots misst. Ist in Klasse 9 die Wurzelfunktion bekannt, kann man hier das für die beurteilende Statistik fundamentale $\frac{1}{\sqrt{n}}$ -Gesetz entdecken. In der Sekundarstufe I hat dieses den Status

eines Naturgesetzes. In der Sekundarstufe II schließt sich die Begründung über die Sigmaregel der Binomialverteilung an. In ihrer einfachsten, für die Sekundarstufe I tauglichen Form nutzt man diese Regel als Faustregel so:

Bei gegebener Wahrscheinlichkeit p liegt die relative Häufigkeit h fast immer in dem Intervall $[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}}]$.

Wenn man bei einer Wahrscheinlichkeitsangabe unsicher ist und eine relative Häufigkeit h beobachtet hat, die außerhalb von $[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}}]$ liegt, hat man Grund zu bezweifeln, dass p ein gutes Modell ist.

	absolut			relativ		
	25	100	400	25	100	400
bernd 1	15	17	75	0,6	0,17	0,1875
bernd 2	13	31	200	0,52	0,31	0,5
bernd 3	19	68	150	0,76	0,68	0,375
bernd 4	9	48	260	0,36	0,48	0,65

Abb. 3: Von Bernd gefühlte Zufallsschwankungen (in den unterlegten Zellen liegen die relativen Häufigkeiten außerhalb des Wurzeltrichters)

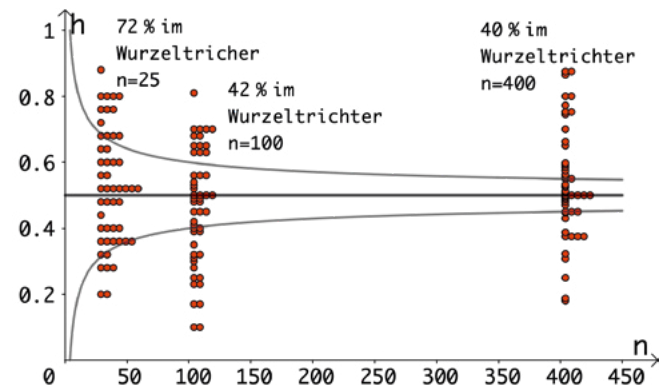


Abb. 4: Gefühlte Zufallsschwankungen der Klasse 8

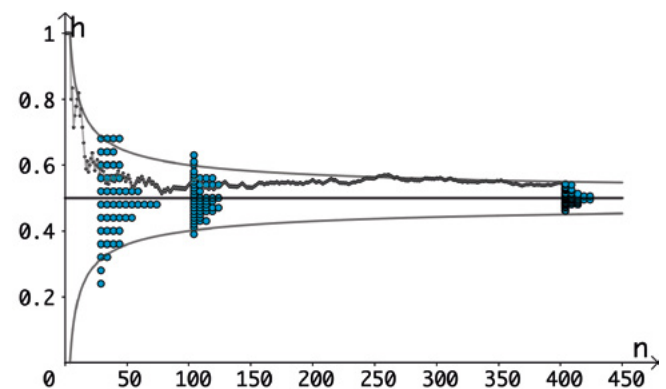


Abb. 5: Tatsächliche Zufallsschwankungen. An jeder festen Stelle n liegen ca. 95% der relativen Häufigkeiten im Wurzeltrichter.

5 Beurteilende Statistik

Was bedeutet es inhaltlich, eine Hypothese H_0 mit 5% Irrtumswahrscheinlichkeit verworfen zu haben?

Diese Frage stellt sich in der Sekundarstufe II. Die Antwort darauf hängt vom Stichprobenumfang ab – und vom inhaltlichen Kontext. Sie lässt sich nicht in einem Merkkasten beantworten. Und die weit verbreitete Antwort „Das bedeutet, H_1 gilt mit 95%-iger Sicherheit“ ist Unsinn.

Deswegen unterschrieben im März 2018 binnen einer Woche 800 Berufsstatistiker einen Aufruf „*Schickt die Signifikanz in den Ruhestand*“. Sie verurteilen das mit Signifikanztests verbundene Schwarz-Weiß-Denken des Annehmens/Verwerfens von Hypothesen. Tatsächlich kann man jede Hypothese auf jedem Signifikanzniveau verwerfen, wenn man den Stichprobenumfang nur hinreichend vergrößert. Das liegt genau daran, dass Wahrscheinlichkeitsangaben nur Modelle sind, die die Wirklichkeit mehr oder weniger gut abbilden, nie ganz genau. Von daher tun wir gut daran, unsere Schülerinnen und Schüler mit dem hypothetisch-prognostischen Wahrscheinlichkeitsbegriff schon in Klasse 7 gegen „signifikanten Unfug“ zu impfen (vgl. Abschnitt 3). Und das scheint uns eine überzeugende Antwort auf Hans Schupps „blinde Leere“.

In der Sekundarstufe II helfen GeoGebra-Simulationen, diesen Zusammenhang zu vertiefen. Denn in der virtuellen Welt lassen sich Hypothesen in Zufallsgrößen verwandeln, und wir können erforschen, wie sich irrelevant kleine Unterschiede in Abhängigkeit vom Stichprobenumfang als signifikant nachweisen lassen.

Konfidenzintervalle statt Signifikanztests

Als intuitiv naheliegende Alternative zu Signifikanztests empfehlen Valentin Amrhein, Sander Greenland und Blake McShane das Arbeiten mit *Konfidenzintervallen*, in denen man alle diejenigen Wahrscheinlichkeiten sammelt, die man nach einer Beobachtung nicht anzweifeln muss (Amrhein u. a. 2019). Damit werden Punktschätzungen von Wahrscheinlichkeiten durch Intervallschätzungen abgelöst. Und die Länge der Konfidenzintervalle überträgt die *fundamentale Idee der Messungenauigkeit* aus der Geometrie in die Stochastik.

Auch hier unterstützen Visualisierungen und Simulationen das Verstehen von Zusammenhängen.

6 Die Rolle von GeoGebra

Was den Softwareeinsatz betrifft, so hat GeoGebra für uns zunächst einmal eine dienende Funktion. Im Vordergrund stehen der Aufbau und die Förderung stochastischer Grundvorstellungen. Dabei sind Realexperimente unverzichtbar. Sie werden mithilfe von Software ausgewertet und gegebenenfalls durch „virtuelle“ Simulationen (mit dem Ziel einer vertiefenden Begriffsbildung) ergänzt, aber nicht ersetzt.

GeoGebra befreit von Rechnungen, die händisch durchgeführt von Wesentlichem ablenken. Wenn man „fertige“ Lösungen als BlackBox vorgibt und Lernenden Zeit schenkt, den Sinn dahinter zu erschließen, eröffnen sich neue problemlösende Zugänge und Möglichkeiten zu einer aktiven Konstruktion anspruchsvoller Begriffe. Das ist dann die höchste Stufe „Reconstruction“ bei der Arbeit mit neuen Technologien im Unterricht nach dem S.A.M.R.-Modell von Ruben R. Puentedura.

Nutzen Sie GeoGebra also nicht nur zum Rechnen, Auswerten, Visualisieren und Simulieren, sondern auch zum Konstruieren von Begriffen. Experimentieren Sie im Unterricht hin und wieder auch mit dem Blackbox-Whitebox-Prinzip, das der CAS-Didaktik entlehnt ist (vgl. auch S. 34).

Es könnte sich lohnen!

2.2 Mit Wahrscheinlichkeiten prognostizieren: Pfad/Summenregel

Darum geht es

- ▶ mit Hypothesen rechnen
- ▶ mit Pfad- und Summenregel prognostizieren
- ▶ mit Tabellen kalkulieren, systematisch abzählen
- ▶ Prognosen experimentell prüfen

Idee

Die Wahrscheinlichkeiten, mit denen ein Quader beim „Würfeln“ die einzelnen Seitenflächen zeigt, lassen sich nicht aus den geometrischen Abmessungen berechnen. Sie hängen von der Wurftechnik ab (s. Tabelle in **Arbeitsblatt 2**). Daher tritt bei Quadern der hypothetische bzw. modellierende Charakter von Wahrscheinlichkeiten besonders deutlich hervor. Man kann mit „hypothetischen“ Wahrscheinlichkeiten nach den Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung (mit Gegenwahrscheinlichkeiten, Summenregel, Pfadregel, Abzählverfahren,...) ebenso rechnen, prognostizieren und Prognosen prüfen wie mit dem „eindeutigen“ Laplace’schen Würfel. Darüber wird erlebbar, wie wenig die berechneten (sekundären) Wahrscheinlichkeiten von den (primären) Hypothesen abhängen.

Vorwissen

Wahrscheinlichkeiten (Hypothesen) beim „Quaderwürfeln“ (vgl. die auf S. 4 skizzierte Schlüsselstunde mit der Datei **2-02-quader-auswertungsvorlage.ggb**) Die Urlisten können erneut ausgezählt werden.

Vorgehen

Das Prognostizieren auf der Grundlage aufgestellter Hypothesen entspricht dem „didaktischen Dreisatz“ Spekulieren – Experimentieren – Reflektieren. Die Urlisten, die beim Aufstellen der Wahrscheinlichkeiten für Quaderwürfel angefertigt wurden, brauchen beim Kontrollieren der Prognosen nur neu ausgezählt werden. Das sorgt für Zeitökonomie und Spannung: Wie gut waren die Prognosen?

Tip: Wenn Sie die Aufgaben durch kurze Experimente vorstellen, wird klar, worum es geht und was zu tun ist.

Binnendifferenzierung

Bei **Arbeitsblatt 2** (Durchmarsch) bieten sich verschiedene Zugänge an, die man ggf. arbeitsteilig bzw. binnendifferenzierend beschreitet. Man kann

- ▶ händisch mit der Pfadregel und Gegenwahrscheinlichkeiten beginnen und die Rechnungen dann in der Tabellenkalkulation automatisieren,
- ▶ das Kalkulationsblatt gemeinsam am Beamer programmieren und dabei zeitökonomisch in Prinzipien der Tabellenkalkulation einführen,
- ▶ dem Blackbox-Whitebox-Prinzip folgend die fertige

Kalkulationstabelle vorgeben, erläutern, welche Aufgabe sie löst, und problemorientiert erschließen und begründen lassen, wie das Kalkulationsblatt arbeitet und mithilfe der Pfadregel programmiert wurde.

- ▶ Sogar eine Entdeckung und Begründung der Pfadregel liegt im Erreichbarkeitshorizont leistungsfähiger Schülerinnen und Schüler. Die anderen können zeitgleich experimentieren bzw. Urlisten auswerten. Der Vergleich von Theorie und Praxis ist dann für alle spannend.

Lösungen (Auswahl)

Arbeitsblatt 2 (Durchmarsch)

	D a u e r						Glück	Gewinn	Dauer
	1	2	3	4	5	6	6		
i.	0.12	0.07	0.24	0.17	0.03	0.04	0.32	8.39	4.02
ii.	0.08	0.04	0.34	0.21	0.01	0.03	0.3	8.13	4.02
iii.	0.17	0.14	0.12	0.1	0.08	0.07	0.33	8.51	3.99
466	26	7	162	84	5	16	166		
Versuche	0.06	0.02	0.35	0.18	0.01	0.03	0.36	9.18	4.25

Abb. 1: Beim Quader (i. und ii.) ist ein Scheitern im 3. oder 4. Wurf besonders wahrscheinlich, weil der Quader mit hoher Wahrscheinlichkeit die Seiten 3 und 4 zeigt.

Arbeitsblatt 3 (Würfeln, bis der Quader qualmt)

Zu d) Es gibt 15 monoton steigende 4er-Folgen, deren Wahrscheinlichkeiten man als Produkt in Spalte G berechnet und in G18 summiert.

G3	=Produkt(A3:F3)						
	A	B	C	D	E	F	G
1	0.08	0.04	0.38	0.38	0.04	0.08	i. Wahrk.
2	1	2	3	4	5	6	
3	1	1	0.38	0.38	0.04	0.08	0.00046
4	1	0.04	1	0.38	0.04	0.08	0.00005
5	1	0.04	0.38	1	0.04	0.08	0.00005
6	1	0.04	0.38	0.38	1	0.08	0.00046
7	1	0.04	0.38	0.38	0.04	1	0.00023
8	0.08	1	1	0.38	0.04	0.08	0.0001
9	0.08	1	0.38	1	0.04	0.08	0.0001
10	0.08	1	0.38	0.38	1	0.08	0.00092
11	0.08	1	0.38	0.38	0.04	1	0.00046
12	0.08	0.04	1	1	0.04	0.08	0.00001
13	0.08	0.04	1	0.38	1	0.08	0.0001
14	0.08	0.04	1	0.38	0.04	1	0.00005
15	0.08	0.04	0.38	1	1	0.08	0.0001
16	0.08	0.04	0.38	1	0.04	1	0.00005
17	0.08	0.04	0.38	0.38	1	1	0.00046
18							0.0036

Abb. 2: Lösungsidee zu Arbeitsblatt 3, Aufgabe 1d). Zeile 1 enthält die Wahrscheinlichkeiten der sechs Augenzahlen. In den 15 Zeilen werden die Wahrscheinlichkeiten der 15 Pfade bestimmt, die zu einer aufsteigenden Vierersequenz gehören.

	Quader (i.)	Würfel
a)	30,48 %	16,67 %
b)	34,76 %	41,67 %
c)	30,74 %	55,56 %
d)	0,36 %	1,16 %

Mit Quadern würfeln: Durchmarsch

Darum geht es

Beim Würfeln mit Quadern kommt es auf die Wurftechnik an. Mithilfe der Wahrscheinlichkeiten in **Tabelle 1** kannst du Wahrscheinlichkeiten berechnen, damit Vorhersagen machen und diese dann experimentell prüfen.

	1	2	3	4	5	6
i. freier Fall 30 cm	0,08	0,04	0,38	0,38	0,04	0,08
ii. Würfelbecher	0,12	0,08	0,3	0,3	0,08	0,12
iii. Laplace-Würfel	0,167	0,167	0,167	0,167	0,167	0,167



Tab. 1: Nach je 3000 Versuchen für verschiedene Wurftechniken aufgestellte Wahrscheinlichkeiten. Wenn ihr Zeit habt, könnt ihr diese Wahrscheinlichkeiten im Klassenexperiment mit **2-02-quaderauswertungsvorlage.ggb** prüfen und verbessern. Oder ihr untersucht, ob sie sich bei der Technik „schwungvolles Rollen“ ändern. Nutzt eure Daten dann in Aufgabe 2.

Spielregel:

Würfle mit dem Quader. Wenn beim ersten Wurf keine 1, beim zweiten Wurf keine 2,..., beim sechsten Wurf keine 6 kam, hast du einen „Durchmarsch“ geschafft! Das Spiel war erfolgreich. Das Spiel kann scheitern, und zwar beim ersten, beim zweiten ... und wenn man Pech hat, noch beim sechsten Wurf. Es gibt also sieben mögliche Spielergebnisse und sechs mögliche Spieldauern. Die Spieldauer ist die Anzahl der Würfe.

=Summe(B5:H5, B6:H6)											
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	
1	Augenzahl	1	2	3	4	5	6				
2	Wahrscheinlichkeit	0.167	0.167	0.167	0.167	0.167	0.167				
3		gescheitert nach						gelingen			
4	Versuchsdauer	1	2	3	4	5	6	8			
5	Gewinn	0	1	2	3	4	5	20	8.014	<- erwarteter Gewinn	
6	Wahrscheinlichkeit	0.167	0.139	0.116	0.096	0.08	0.067	0.665	3.991	<- erwartete Spieldauer	
7											

Bild 1: Zum Vergleich: Berechnungen für einen Laplace-Würfel. Für den Quader kann man die Zahlen im Bereich B2:G2 abändern.

Das ist zu tun

1. Prognosen machen

- Berechne mit den Wahrscheinlichkeiten in Tabelle 1 und der Pfadregel die Wahrscheinlichkeiten der sieben Spielergebnisse, der sechs Spieldauern und wie lange das Spiel bei den Wurftechniken i. und ii. im Mittel dauern wird. (Man spricht von der erwarteten Spieldauer μ .)
- Max darf insgesamt 100 Mal würfeln. Wie viele Spiele wird er etwa spielen? Schätzt, wie oft der Durchmarsch ungefähr gelingen wird.
- Punkte sammeln: Ein Scheitern beim ersten Versuch gibt keinen Punkt, Scheitern beim zweiten Versuch gibt 1 Punkt usw. Der Durchmarsch gibt 20 Punkte. Bestimme, mit welchem Gewinn du bei den Wahrscheinlichkeiten i. und ii. langfristig rechnen kannst.

2. Experimentieren – Prognosen prüfen

- Werft den Quader 100-mal. Führt dabei eine Urliste (wie in **Bild 2**). Zählt in Strichlisten aus, wie viele Spiele ihr bei den 100 Würfeln gemacht habt (das letzte, meist nicht zu Ende gebrachte, zählt nicht), wie oft der Durchmarsch gelang und wie hoch der gesamte Gewinn war.
- Prüfe, wie gut die Vorhersagen auf dich zutrafen. Vergleiche untereinander und sammle an der Tafel.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	3	1	4	4	3	2	3	5	4	3
2	1	5	3	3	4	3	3	6	...	
3										

Bild 2: Die Urliste enthält 100 Augenzahlen. Auswertung: Markiert die Spiele fortlaufend farbig. Hier ist das erste Spiel (gelb) nach 4 Würfeln gescheitert, das zweite (blau) nach 2 Würfeln. Das dritte war erfolgreich, das vierte scheiterte. In diesen vier Spielen wurden $3 + 1 + 20 + 5 = 29$ Punkte gesammelt, im Mittel also $29:4 = 7,25$ Punkte.

Würfeln, bis der Quader qualmt

Darum geht es

mit Wahrscheinlichkeiten rechnen und Prognosen prüfen

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
Quader	0,08	0,04	0,38	0,38	0,04	0,08
Laplace-Würfel	0,167	0,167	0,167	0,167	0,167	0,167



Tab. 1: Wahrscheinlichkeiten der sechs Seiten eines Quaders aufgestellt nach 3000 Versuchen und eines Würfels (theoretisch 1/6, hier gerundet)

Das ist zu tun

1. Wahrscheinlichkeiten berechnen

Berechne unter Benutzung der Wahrscheinlichkeiten aus **Tabelle 1** mit der Pfadregel, der Summenregel (und wo es nützlich erscheint, auch mit Tabellenkalkulation) die Wahrscheinlichkeit für

- „=“ bei zwei Würfeln kommt ein Pasch (also zwei gleiche Zahlen)
- „<“ bei zwei Würfeln ist die zweite Zahl größer als die erste
- „≠≠“ bei drei Würfeln fallen drei verschiedene Zahlen
- „<<<“ bei viermaligem Würfeln entsteht eine „aufsteigende“ Folge (wie 2-4-5-6).

Entscheide jeweils, ob ein Laplace-Würfel höhere Wahrscheinlichkeiten für die genannten Ereignisse liefern würde.

2. Wahrscheinlichkeiten prüfen

- Werft den Quader 100 Mal. Notiert die Augenzahlen in einer Urliste.
- Erläutere, was Max sich bei folgender Bemerkung denkt: „Mit der Urliste habe ich auf einen Schlag 50 Versuche der Sorte a) (=), 50 Versuche der Sorte b) (<), 33 Versuche der Sorte c) (≠≠) und 25 Versuche der Sorte d) (<<<) durchgeführt.“
- Zählt eure Urlisten nach der Idee von Max aus, sammelt die Ergebnisse an der Tafel und prüft, wie gut die in 1 a) bis d) berechneten Wahrscheinlichkeiten zu euren Häufigkeiten passen.
- Simuliert das 100-malige Werfen eines Laplace-Würfels mit dem Befehl =Zufallszahl(1, 6) in einer Tabelle. Zählt diese Tabelle mit GeoGebra aus und vergleicht die in 1a) bis 1d) für den Würfel berechneten Wahrscheinlichkeiten mit den relativen Häufigkeiten.

Vorlage für eine Urliste für 100 Würfe

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										

Wichtige GeoGebra-Befehle aus dem Bereich der Stochastik

Befehl	Erläuterungen
=nCr(n, k)	Berechnung von $\binom{n}{k}$
=Binomial(n, p) bzw. Binomial(n, p, false)	Säulendiagramm einer Binomialverteilung $B_{n,p}$
=Binomial(n, p, true)	Diagramm der kumulierten Binomialverteilung $F_{n,p}$
=Binomial(n, p, k, false) =Binomial(n, p, k, true) =Binomial(n, p, a...b)	$P(X = k)$ $P(X \leq k)$ $P(a \leq X \leq b)$
=InversBinomial(n, P, α)	kleinste ganze Zahl k mit $P(X \leq k) \geq \alpha$
=Normal($\mu, \sigma, x, false$)	Dichte $\varphi_{\mu,\sigma}$ der Normalverteilung (Gauß-Glocke)
=Normal($\mu, \sigma, x, true$)	zu $\varphi_{\mu,\sigma}$ gehörige Verteilungsfunktion $\Phi_{\mu,\sigma}$
=InversNormal(μ, σ, p)	Stelle x mit $P(X \leq x) = p$.
=Zufallszahl(a, b)	ganzzahlige Zufallszahl x mit $a \leq x \leq b$ Münze: =Zufallszahl(0, 1); Würfel: =Zufallszahl(1, 6)
=ZufallszahlBinomialverteilt(n, p) =ZufallszahlBinomialverteilt(n, p)/n =Folge(ZufallszahlBinomialverteilt(n, p), i, 1, k)	binomialverteilte Zufallszahl relative Trefferhäufigkeit bei n Bernoulli-Versuchen k binomialverteilte Zufallszahlen (Liste)
=ZufallszahlDiskret(L_1, L_2)	Zufallszahl: Ergebnisliste L_1 , Wahrscheinlichkeitsliste L_2 =ZufallszahlDiskret({1, 2, 3}, {0.5, 0.2, 0.3}): Glücksrad mit drei Feldern und zugehörigen Wahrscheinlichkeiten
=ZufallszahlGleichverteilt(a, b) =ZufallszahlGleichverteilt(a, b, n)	gleichverteilte „dezimale“ Zufallszahl x mit $a \leq X \leq b$ n gleichverteilte „dezimale“ Zufallszahlen x mit $a \leq X \leq b$ (Liste)
=ZufallszahlNormalverteilt(μ, σ)	$\varphi_{\mu,\sigma}$ -normalverteilte Zufallszahl
=Folge(Zufallszahl(a, b)+Zufallszahl(a, b), i, 1, n) =Summe(Folge(Zufallszahl(0, 1)==1, i, 1, 10))	n Summen zweier (ganzzahliger) Zufallszahlen zwischen a und b (Liste); für $a = 1, b = 6$: n Augensummen zweier Würfel ersetzt den Befehl =ZufallszahlBinomial(10, 0.5)
=Stichprobe(L, n, true/false)	Aus der Liste L werden n Elemente mit (true)/ohne (false) Zurücklegen ausgewählt. Spezialfall: =Stichprobe({1, 2, 3}, 3, false) liefert eine Permutation der Zahlen 1, 2 und 3
=Mittelwert(L)	arithmetisches Mittel der Zahlenliste L
=stdev(L)	Standardabweichung einer Grundgesamtheit L : Liste, „Division durch n “
=stdev(L)	Standardabweichung einer Stichprobe L : Liste, „Division durch $n - 1$ “
=Säulendiagramm(L, b) =Säulendiagramm(L_1, L_2, b)	Säulendiagramm zu einer Urliste L ; b : Balkenbreite Säulendiagramm zu einer Häufigkeitsverteilung mit L_1 : Datenliste; L_2 : Häufigkeitsliste; b : Balkenbreite
K=Klassen(L, n) K=Klassen(L, a, b) =Histogramm(K, L)	Die Daten aus L werden eingeteilt (i) in n Klassen, (ii) in Klassen der Breite b , Start bei a . Histogramm der Daten L gemäß Klasseneinteilung (s. o.)
=Boxplot(y-Position, y-Breite, L, true/false)	Boxplot zur Datenliste L auf vorgegebener y -Position mit vorgegebener y -Breite, mit/ohne Ausreißer
L=A1:A100	Tabellenkalkulationsbereiche werden zu Listen

In einem zeitgemäßen Stochastikunterricht steht die fachliche Systematik am Ende eines Lern- und Erkenntnisprozesses, in dessen Mittelpunkt spannende Fragen und das Bewältigen kognitiver Konflikte stehen.

Dabei ist es viel schwieriger, Schülerinnen und Schülern (auch in Form konkreter Arbeitsblätter) Fragen und Probleme zu „schenken“, an deren Erforschung und Bearbeitung sie wachsen sowie tragfähige Grundvorstellungen handelnd (nicht nur „klickend“) und reflektierend entwickeln können, als eine fertige Systematik „einzuführen“.

Dieser Sichtweise folgend, finden Sie hier deutlich mehr als eine bloße „Arbeitsblätter-sammlung“: Sie halten mit **Stochastik erkunden** eine unterrichtspraktisch ausgefeilte, handlungsorientierte „Didaktik der Stochastik“ in den Händen.

Ganz konkret lässt sich unsere Philosophie gelingenden Stochastikunterrichts durch wenige Paradigmen umschreiben:

- Verwenden Sie einen passenden Wahrscheinlichkeitsbegriff.
- Trennen Sie Modell und Realität – messerscharf und konsequent.
- Untersuchen Sie Zufallsschwankungen, anstatt sie wegzuwünschen.
- Stellen Sie nicht nur Aufgaben, sondern echte Fragen, die durch Experimente beantwortet werden: *Spekulieren - Experimentieren - Reflektieren*.
- Nutzen Sie Software – nicht nur zur Individualisierung, sondern auch zur Verlangsamung, als Anlass zu sinnstiftendem und begriffsbildendem Kommunizieren nach dem Motto: „*Einer klickt und alle denken ist besser als alle klicken und keiner denkt.*“

Stochastik erkunden – Ideenreiche Arbeitsblätter mit GeoGebra gliedert sich in drei Kapitel, die mit vielen Querverweisen, Vertiefungsliteratur sowie Lösungs- und Anleitungsdokumente zum Download auch unabhängig voneinander eingesetzt werden können:

Kapitel 1: „Grundlagen“ zeigt an leicht nachvollziehbaren Anwendungsbeispielen die Bedienung von GeoGebra als Rechen-, Simulations- und Visualisierungswerkzeug.

Kapitel 2: „Ready to teach“ erschließt zentrale curriculare Themen problemlösend über interessante Fragen – aufbereitet über direkt einsetzbare Arbeitsblätter.

Kapitel 3: „Projekte“ enthält Materialien zur vernetzten Vertiefung. Hier finden Sie sowohl alternative Zugänge zu Inhalten, die in Kapitel 1 und 2 angesprochen wurden, als auch spannende Themen.

Die **GeoGebra-Dateien** stehen zum Download bereit und können über im Heft abgedruckte QR-Codes auch direkt im Internet abgerufen werden. Mit den exakt auf die Aufgaben zugeschnittenen Dateien kann bei Bedarf (vielfach auch ohne GeoGebra-Vorkenntnisse) inhaltlich zielgerichtet gearbeitet werden.

Einzelverkauf
d1840008

Schullizenz
d1840009

