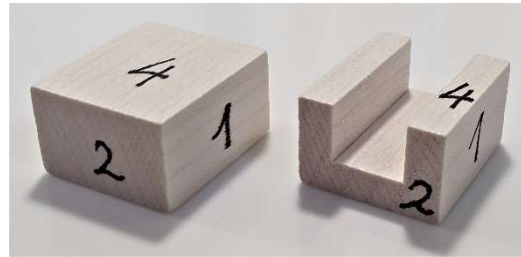


Würfeln mit Quadern und die Gibbs-Verteilung

Die naheliegende Annahme, dass die Wahrscheinlichkeiten $p(i)$ der Seiten $i = 1 \dots 6$ bei Quaderwürfeln proportional sind zu den Inhalten $A(i)$ der Seitenflächen ($p(i) \cong A(i)$), liefert unbrauchbare Wahrscheinlichkeitsmodelle.



Die Annahme einer umgekehrten Proportionalität zwischen Wahrscheinlichkeiten und Schwerpunkthöhen $h(i)$ ($p(i) \cong 1/h(i)$) führt zum gleichen (unbrauchbaren) Modell, da das Produkt aus Seitenfläche und Schwerpunkthöhe konstant ist: $A(i) \cdot h(i) = \text{halbes Quadervolumen}$.

Tatsächlich lassen sich die Wahrscheinlichkeiten prinzipiell nicht aus den Abmessungen des Quaders berechnen, sie hängen von der Wurftechnik ab:

Lässt man den Quader frei fallen, sind die großen (stabilen) Seiten wahrscheinlicher als bei Verwendung eines Würfelbechers, den man auf den Tisch stülpt. Der Becher hat auf die „kippeligen Hochlagen“ stabilisierende Wirkung und macht sie wahrscheinlicher, vgl. Zeile 56 in untenstehender Tabelle.

Auf dieser Grundlage ist es überraschend, dass der Ansatz $p(i) \cong \exp(-k \cdot h(i))$ ausgezeichnete Wahrscheinlichkeitsmodelle liefert, bei denen der Parameter k dazu dient, die Wurftechnik zu modellieren. Es handelt sich um die Gibbs-Verteilung, die man von der barometrischen Höhengleichung kennt: [In der Luft ist unter dem Einfluss der Schwerkraft die Aufenthaltswahrscheinlichkeit eines Partikels in der Höhe h proportional zu $\exp(-k \cdot h)$, k hängt dabei von der Temperatur ab.]

Bei der Modellierung hilft die Datei gibbs.ggb wie folgt:

Man berechnet zu den Schwerpunkthöhen $h(i)$ (Zeile 62) die Werte $p(i) = \exp(-k \cdot h(i))$ in Zeile 63 und normiert die Summe in Zeile 64 so, dass sich eine Wahrscheinlichkeitsverteilung $p(i)$, $i = 1 \dots 6$ ergibt. Die (zu einer Stichprobe vom Umfang n (Zelle H55 bzw. Q55) gehörigen) erwarteten Häufigkeiten (Zeile 65) werden mit den beobachteten (Zeile 55) verglichen, indem man die Abweichungen misst

$$\text{durch } \chi^2 = \sum_{i=1}^6 \frac{(n(i) - n \cdot p(i))^2}{n \cdot p(i)}.$$

Über Schieberegler variiert man in der Datei den Parameter k (Zelle B61 bzw. K61) so, dass die Abweichungen (in Zelle H66 bzw. Q66) minimal werden.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | P | Q |
|----|--------------------------------|--------|--------|---------|-----------------|--------|--------|-------|---|----------------------------|--------|--------|--------|-----------------|--------|--------|------|
| 1 | Quader | 1.3 | 1.6 | 2 | cm ² | | | | | Quader | 1.3 | 1.6 | 2 | cm ² | | | |
| 2 | freier Fall aus Ellenbogenhöhe | | | | | | | | | im gestülpten Würfelbecher | | | | | | | |
| 54 | kumuliert | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | | | kumuliert | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | |
| 55 | absolute Hfgk. | 304 | 181 | 1443 | 1442 | 175 | 355 | 39... | | absolute Hfgk. | 279 | 207 | 834 | 883 | 204 | 293 | 2700 |
| 56 | relative Hfgk. | 0.08 | 0.05 | 0.37 | 0.37 | 0.04 | 0.09 | 1 | | relative Hfgk. | 0.1 | 0.08 | 0.31 | 0.33 | 0.08 | 0.11 | 1 |
| 57 | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 58 | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 59 | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 60 | passendes Gibbs-Modell | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 61 | $k_{\text{freierfall}}$ | 4.18 | | | | | | | | k_{Becher} | 3.01 | | | | | | |
| 62 | Schwerpunkthöhe h | 1 | 1.15 | 0.65 | 0.65 | 1.15 | 1 | | | Schwerpunkthöhe h | 1 | 1.15 | 0.65 | 0.65 | 1.15 | 1 | |
| 63 | $\exp(-k \cdot h)$ | 0.02 | 0.01 | 0.07 | 0.07 | 0.01 | 0.02 | 0.18 | | $\exp(-k \cdot h)$ | 0.05 | 0.03 | 0.14 | 0.14 | 0.03 | 0.05 | 0.45 |
| 64 | Wahrscheinlichkeit | 0.09 | 0.05 | 0.37 | 0.37 | 0.05 | 0.09 | 1 | | Wahrscheinlichkeit | 0.11 | 0.07 | 0.32 | 0.32 | 0.07 | 0.11 | 1 |
| 65 | erw. Hfgk | 333.56 | 178.32 | 1438.11 | 1438.11 | 178.32 | 333.56 | | | erw. Hfgk | 300.01 | 191.15 | 858.83 | 858.83 | 191.15 | 300.01 | |
| 66 | Abweichungen | 2.62 | 0.04 | 0.02 | 0.01 | 0.06 | 1.45 | 4.14 | | Abweichungen | 1.47 | 1.31 | 0.72 | 0.68 | 0.86 | 0.1 | 5.15 |

Falls der minimale χ^2 –Wert unter 9.5 liegt, weist der Chiquadrat-Test die Hypothese einer Gibbs-Verteilung nicht zurück (Chiquadrat-Test mit Parameter k , 4 Freiheitsgrade).

Das Gibbs-Modell lässt sich auf gezinkte Quader (U-Form übertragen).