Stochastische Prozesse (Markoffketten)

Klassenstufe 8/9: „numerisch" mit Tabellen kalkulieren
Stufe 12/13: „symbolisch" mit LGS und Matrizen berechnen

Darum geht es

- Stochastische Prozesse
- Prozessdauer, Wartezeitenverteilungen
- Absorbtionswahrscheinlichkeiten
- Tabellenkalkulation und Matrizenrechnung

Lernvoraussetzungen

- SI: Pfadregel, Tabellenkalkulation
- SII: Matrizen, lineare Gleichungssysteme (LGS)

Didaktischer Hintergrund

Markoffketten mit endlich vielen Zuständen und konstanten Übergangswahrscheinlichkeiten setzen die Wahrscheinlichkeitsrechnung der SI (Pfad- und Summenregel) nahtlos fort.

In der SII bieten sie einen überzeugenden Kontext, um die Nützlichkeit von Matrizenrechnung erlebbar zu machen (Übergangsmatrix und deren Potenzen, Mittelwertsregeln, Fundamentalmatrix, Eigenvektoren). Für die SII gibt es ausgezeichnete Arbeitsmaterialien (vgl. Literatur).

Wie spannend Markoffketten aber schon in der SI werden, wenn man experimentiert, spekuliert, simuliert und Prozesse mit Tabellenkalkulation numerisch analysiert, ist weniger bekannt. Aus diesem Grunde legen wir den Schwerpunkt in den Blättern A-D zunächst auf das Arbeiten mit Tabellenkalkulation. Die Blätter orientieren sich an zwei Beispielen, sie sind weitgehend unabhängig voneinander einsetzbar und garantieren jedes für sich eine abgeschlossene Doppelstunde oder ein Kleinprojekt.

Wer sich mit Markoffketten auskennt und „nur" nachlesen möchte, wie man sie in GeoGebra mit Matrizen und Vektoren berechnet, findet eine „Gebrauchsanweisung" in den Blättern E-G. Die Blätter A-D dienen dann als Übungsmaterial zur Arbeit mit Matrizen.

Vorgehen – Struktur der Blätter

Einen kompakten Einstieg in das Thema bietet **Blatt A**. Etwas ausführlicher ist die Darstellung in den **Blättern B-C**. Man kann sie alternativ oder arbeitsteilig einsetzen und erhält einen in sich abgeschlossenen SI-tauglichen Unterrichtsgang. In beiden Fällen wird das Thema zunächst experimentell angegangen. *Konkrete* Rechnungen mit GeoGebras Tabellenkalkulation sichern die experimentellen Beobachtungen ab.

Man geht rekursiv vor: Die Zustandsverteilung nach n Schritten wird nun nicht mehr durch Baumdiagramme aus einem Anfangszustand berechnet, sondern („rekursiv") aus der vorherigen Verteilung nach n-1 Schritten. Dabei kommen Pfad- und Summenregel zum Einsatz, wobei sich die Blickrichtung ändert. Man fragt beim Baumdiagramm nun nicht mehr: „Wo geht es hin", sondern: „Wo kommt man her".

Der numerisch-rekursive Zugang über Tabellenkalkulation (ohne Matrizenformalismus) hat viele Vorteile:

- Man kann schon in der SI schrittweise kalkulieren, wie sich Wahrscheinlichkeiten in absorbierenden Zuständen kumulieren. Man bekommt die Wartezeitenverteilung gleichsam geschenkt, weil man vorliegende Zahlenfolgen nur geeignet interpretieren muss. Und man „sieht" im wahrsten Wortsinn, was sich (bei absorbierenden Ketten) ändert und (bei nicht absorbierenden) konstant bleibt, wenn man Anfangszustände variiert.
- Die mittlere Prozessdauer μ lässt sich in Abhängigkeit von der Startverteilung aus der Wartezeitenverteilung (ohne Mittelwertsregeln und ohne lineare Gleichungssysteme) numerisch berechnen. Damit setzt man einen für die SI sinnvollen Abschluss.
- In der SII lässt sich dann u. a. die Frage beantworten: Wie gut beschreibt die (oft als „Wartezeitenverteilung" bezeichnete) Exponentialverteilung mit Parameter $\lambda = 1/\mu$ bei absorbierenden Markoffketten die Wartezeiten bis zum Prozessende … oder bei nicht absorbierenden Ketten die Wartzeiten bis zur Rückkehr in einen gerade verlassenen Zustand?
- Die der SII vorbehaltene Beschreibung des rekursiven Vorgehens durch Matrizen (Potenzen der Übergangsmatrix) geschieht auf inhaltlich gesicherter (weil numerisch „erlebter") Grundlage.

Blatt D: Das Simulieren von Markoffketten ist in GeoGebra deutlich „sperriger" als das Berechnen. Es darf aber in diesem Heft nicht fehlen (vgl. den Kasten GeoGebra Spezial, der die Lösung zu Blatt D enthält). Dieses Blatt empfiehlt sich zur Binnendifferenzierung für am „Codieren" interessierte Lernende. Ansonsten beschränke man sich auf den Einsatz der vorbereiteten Dateien oder das überaus reizvolle händische Simulieren.

Die **Blätter E-G** sind von den **Blättern A-D** unabhängig. Sie setzen die Vertrautheit mit dem Matrizenkalkül voraus. Der Fokus liegt hier auf der technischen Frage: "Wie nutzt man GeoGebras „Matrizenwerkzeugkiste" zur Berechnung von Markoffketten mit und ohne absorbierende Zustände?

Die Antwort hat die Form einer informierenden Handreichung und nutzt eine weitere Spielsituation. Wenn man diese Handreichung als Unterrichtsmaterial nutzen möchte, kopple man das Durcharbeiten mit Aufgaben aus **den Blättern A-C** - oder mit einer Transferaufgabe wie der folgenden:

Aufgabe:
Auf dem Tisch liegen sechs Münzen. Keine (Zustand „0“) zeigt die Seite Kopf. Jede Sekunde wird eine zufällig ausgewählte Münze mit Wahrscheinlichkeit p umgedreht, mit Wahrscheinlichkeit q=1-p bleibt sie unverändert liegen.

a) Wie lange dauert es im Mittel, bis alle sechs Münzen Kopf zeigen (Zustand „6“)?

b) Wie lange muss man im Mittel warten, bis man zu einem Zustand (0 bis 6) zurückkehrt?

c) Vergleiche die Wartezeitenverteilungen aus b) mit den zugehörigen Exponentialverteilungen mit gleichem Erwartungswert.

d) Max gewinnt im Zustand 0 (alle Münzen zeigen Zahl), Hannah im Zustand 6 (alle Münzen zeigen Kopf). Wie hängen die Gewinnwahrscheinlichkeiten vom Startzustand und von der Wendewahrscheinlichkeit p ab?

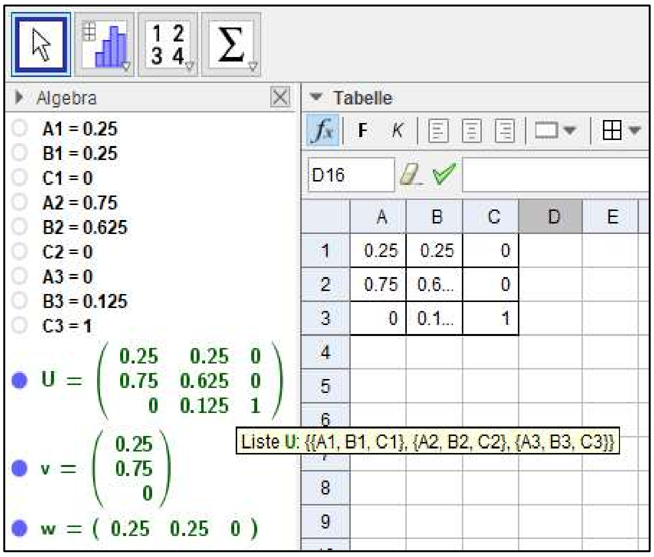
Gut zu wissen: Matrizen, Vektoren …
und die Logik hinter GeoGebras doppelten Klammern

Die Abbildung unten zeigt, dass eine Matrix wie U in GeoGebra als Liste von „Zeilenlisten“ dargestellt wird.
Man kann sie händisch eingeben.
Komfortabler notiert man sie aber im Tabellenfenster und überträgt sie anschließend mit dem Matrizenwerkzeug ins Algebrafenster.

Mit diesem Werkzeug erzeugt man auch Spaltenvektoren wie v: `{{A1},{A2},{A3}}` und Zeilenvektoren wie w: `{{A1,B1,C1}}`

Spaltenvektoren sind also Matrizen mit nur einer Spalte und Zeilenvektoren Matrizen mit nur einer Zeile. Und um die darzustellen, braucht GeoGebra doppelte Klammern.

Matrizen kann man in GeoGebra transponieren, multiplizieren, potenzieren … und natürlich auch addieren und vervielfachen.



GeoGebra Spezial: Simulieren von Markoffketten

(i) Ein Simulationsschritt

```
=ZufallszahlDisret({3,2,1},C3:C5)
```

erzeugt auf Grundlage nebenstehender Übergangsmatrix den zufälligen Folgezustand des Zustandes 3. Er liefert „3“ mit Wahrscheinlichkeit 0,25, „2“ mit der Wahrscheinlichkeit 0,25 und „1“ mit Wahrscheinlichkeit 0. Analoges gilt für die Zustände 2 und 1, wenn man auf die Spalten D und E statt C zurückgreift.

	A	B	C	D	E
1			von		
2			3	2	1
3	nach	3	0.25	0.25	0
4		2	0.75	0.625	0.75
5		1	0	0.125	0.25

Bild 1: Übergangsmatrix

(ii) n Simulationsschritte
Man definiert eine Variable `start=3` und speichert mit

```
L=Iterationsliste
(Wenn(S≟3,ZufallszahlDiskret({3,2,1},C3:C5),0)+
 Wenn(S≟2,ZufallszahlDiskret({3,2,1},D3:D5),0)+
 Wenn(S≟1,ZufallszahlDiskret({3,2,1},E3:E5),0),
 S,{start},10)
```

n = 10 aufeinander aufbauende Folgezustände zum Startzustand 3 in einer Liste L mit 11 Zuständen.

(iii) erste Wartezeit
`w=index(Teilliste(M,2),start)`
durchsucht die Liste L (ab Position 2) bis zum nächsten Auftreten von start, liefert also die erste Wartezeit bis zur Rückkehr in den Startzustand.

(iv) „alle“ Wartezeiten

`Z_1=Folge(Wenn(L(i)≟start,i,0),i,1,n)`

enthält (außer Nullen) nur die Zeiten, zu denen man in den Startzustand zurückkehrte. Durch

`Z_2=Teilliste(Einzigartig(Z_1),2)`

werden die Nullen zusammengefasst und gelöscht.

`W=Folge(Z_2(i)-Z_2(i-1),i,2,Länge(Z_2))`

enthält dann die Folge der Rückkehrzeiten und

`mittlereWartezeit=Mittel(W)`

die mittlere Rückkehrzeit zum Startzustand.

Lösungsskizzen ausgewählter Aufgabenteile

A: 2b) Den Zustand 3 kann man im dritten Schritt nur erreichen, wenn man im zweiten Schritt in Zustand 4 war (Wahrscheinlichkeit 0,25, vgl. Zelle G2) und dann (mit q=1/2) Wappen fiel. Das Produkt steht in F3.

Die eingeblendete „universelle Formel“

`=Summe($C13:H13*$C$6:$H$6)`

berücksichtigt zusätzlich (formal) die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass man vorher (d. h. im zweiten Schritt) in einem beliebigen anderen Zustand 1…5 war (diese stehen in C13: H13), multipliziert diese mit den (in C6:H6 stehenden) Übergangswahrscheinlichkeiten und berechnet die Summe der Produkte. Die $-Zeichen sorgen dafür, dass man die Formel nach unten und nach rechts/links kopieren kann. Mit dieser Produktsumme ist die Basis gelegt für ein späteres Verstehen der Matrizenmultiplikation.

A: 2c) In Spalte I stehen die Wahrscheinlichkeiten, mit denen man nach t Spielschritten in den absorbierenden Zuständen 0 und 5 gelandet ist, also die (kumulierten) Wahrscheinlichkeiten P(X≤t), dass das Spiel zum Zeitpunkt t schon zu Ende ist. Die Spieldauerverteilung ergibt sich hieraus durch Berechnung der Zuwächse

P(X=t) = P(X≤t)- P(X≤t-1).

A: 2d) Max gewinnt 5€ mit p(5)=0,2, er verliert mit p(0) = 0,8 und seine Gewinnerwartung 5 € * 0,2 + 0 € * 0,8 entspricht seinem Spieleinsatz 1 €. Es handelt sich damit um ein „faires“ Spiel.

B: 2b)

```
                 Zustand 2 (Bild 1b)
                          /       \
Ayse                   L            R
                     /  \        /  \
Birgit             L      R      L     R
                  /\     /\     /\     /\
Claudia          L  O  L  O  L  O  L  O
                 1  2  2  3  2  3  2  2
```

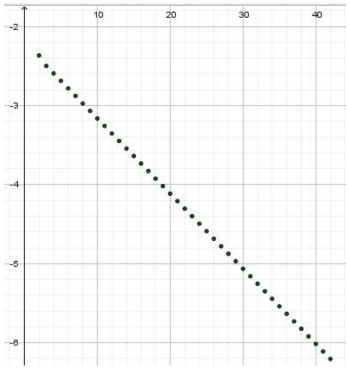
```
                 Zustand 3 (Bild 1c)
                          /       \
Ayse                   O            R
                     /  \        /  \
Birgit             O      L      O     L
                  /\     /\     /\     /\
Claudia          L  R  L  R  L  R  L  R
                 2  2  2  3  3  2  2  2
```

C: 1b) Rekursion: Man argumentiert wie in A 2b)

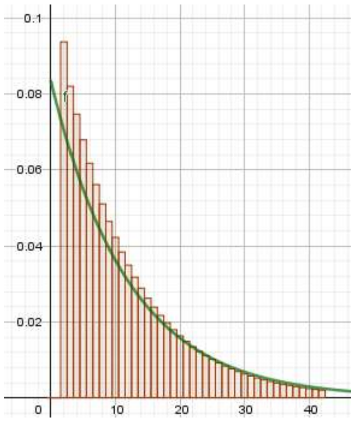
C: 2b) Nach langer Zeit hält man sich bei der Irrfahrt am wahrscheinlichsten (≈ 67%) im Zustand 2 auf, weil es „viele wahrscheinliche Übergänge“ nach 2 gibt. Ebenso kommt man wahrscheinlicher (≈ 22 %) in 3 vorbei als in Zustand 1 (≈ 11%).

C: 2c) Im Mittel müssen die Wanderer μ =12 Schritte warten, bis sie sich ausgehend vom Zustand 3 im Zustand 1 treffen. μ ist der Erwartungswert, den man numerisch oder aus der ersten Mittelwertsregel bestimmt.

2e) Wenn man die Wartezeitenverteilung (von Zustand 3 nach Zustand 1) logarithmiert, erhält man einen nahezu linearen Graphen, die diskrete Wartezeitenverteilung ist damit nahezu exponentiell. Aber: Die Dichte der Exponentialverteilung mit $f_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \lambda = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{12}$ beschreibt die diskrete Wartezeitenverteilung nur mäßig gut. Das ist nicht verwunderlich, weil z. B. die Wartezeiten 0 und 1 bei der Irrfahrt nicht auftreten können.



Logarithmierte Wartezeitenverteilung von 3 nach 1



Wartezeitenverteilung und Dichte der Exponentialverteilung mit Erwartungswert 12.

Dateien:

- markoff-A-fuenfeuro.ggb
- markoff-B-drei-wanderer-simulation-start-ziel.ggb
- markoff-C-drei-wanderer-rekursiv.ggb
- markoff-D-drei-wanderer-simulation-zurueck-zum-start.ggb
- markoff-E-matrix-absorbierend.ggb
- markoff-G-regulaer-eigenvektor-cas.ggb
- markoff-G-regulaer-lgs.ggb

Literatur:

Engel, Arthur: Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, Band 2, Klett-Verlag 1976
Seebach, Günter: Endliche homogene Markoffketten, Bezirksregierung Köln
Vehling, Reimund: Mehrstufige Prozesse: DASU Hannover
Riemer, Wolfgang: Lambacher-Schweizer - Stochastik

Das Spiel um fünf Euro A

markoff-A-fuenfeuro.ggb

Darum geht es
Absorbierende Markoffkette, Gewinnwahrscheinlichkeiten, Spieldauer

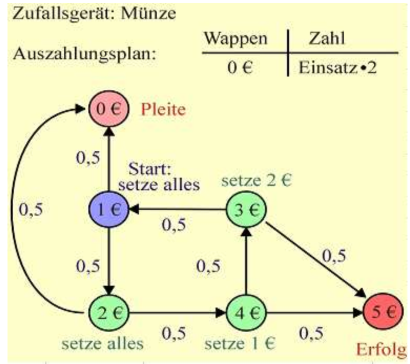


Bild 1: das Spiel lässt sich als Irrfahrt auf einem Graphen deuten.

Protokoll	Ergebnis	Spieldauer
1 2 4 3 5	5	4
1 2 0	0	2
1 2 4 3 1 2 4 5	5	7

Bild 2: Spielprotokolle

1 Das Spiel

a) Max hat 1€. Er versucht in einem Glücksspiel gemäß nebenstehendem Spielplan durch wiederholtes Münzenwerfen sein Vermögen auf 5 € zu erhöhen. Erklärt einander, wie das Spiel abläuft. Das Protokoll kann helfen.

b) Spielt mithilfe einer Münze in Partnerarbeit mehrere Male, protokolliert wie in Bild 2. Sammelt die Ergebnisse im Plenum, schätzt mit welcher Wahrscheinlichkeit Max Pleite geht, Erfolg hat und wieviel er im Mittel bei dem Spiel langfristig gewinnen wird.

c) Ermittelt, wie lange das Spiel im Mittel dauert, also wie oft man die Münze im Mittel werfen muss, bis Max in einem der Zustände 0 oder 5 landet.

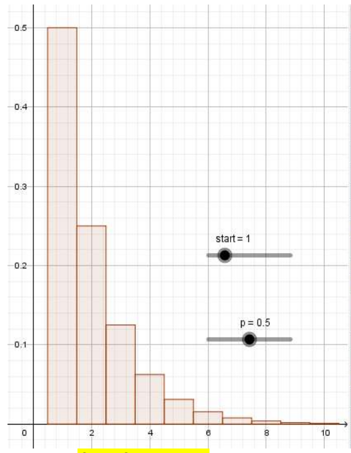
2 Kalkulieren (wie man Bild 3 „liest“)

a) Überprüfe mit einem Wahrscheinlichkeitsbaum und der Pfadregel:
Bei Start mit 1 € (Zelle D10) hat man nach drei Schritten (t = 3)
- mit Wahrscheinlichkeit 0,125 genau 3 € (F14),
- mit Wahrscheinlichkeit 0,75 genau 0 € (C14, ist also schon Pleite) und
- mit Wahrscheinlichkeit 0,125 genau 5 € (H14, hatte also schon Erfolg)
- nach 10 Schritten ist das Spiel mit Wahrscheinlichkeit 0,001 (und einem Vermögen von 4 €) immer noch nicht entschieden.“ (G21).

b) Erklärt, wie man die Ergebnisse der Zeile 14 (t = 3) aus der vorherigen Zeile erhalten kann und wie man die Ergebnisse zu t = 4 aus denjenigen der Zeile t = 3, die zu t = 5 aus denjenigen zu t = 4 erhält. Pfad- und Summenregel helfen!
Beratet miteinander, wie man die ***geniale*** Formel in F14 verstehen kann.

c) Deutet die Wahrscheinlichkeiten in Spalte I und wie man mit ihrer Hilfe in Spalte J die Wahrscheinlichkeiten dafür berechnet, dass das Spiel 1, 2, … Zeitschritte dauert.

d) Nico: “Max bekommt auf lange Sicht nur seinen Einsatz (1€) zurück.“ Wie könnte Nico diese Aussage begründen?



F14 =Summe($C13:$H13 $C$6:$H$6)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1			von							
2			0	1	2	3	4	5		
3	n	0	1	0.5	0.5	0	0	0		
4	a	1	0	0	0	0.5	0	0		
5	c	2	0	0.5	0	0	0	0		
6	h	3	0	0	0	0	0.5	0		
7		4	0	0	0.5	0	0	0		
8		5	0	0	0	0.5	0.5	1		
9										
10		t	0	1	2	3	4	5	p(X≤t)	p(X=t)
11		0	0	1	0	0	0	0		
12		1	0.5	0	0.5	0	0	0	0.5	0.5
13		2	0.75	0	0	0	0.25	0	0.75	0.25
14		3	0.75	0	0	0.125	0	0.125	0.875	0.125
15		4	0.75	0.063	0	0	0	0.188	0.938	0.063
16		5	0.781	0	0.031	0	0	0.188	0.969	0.031
17		6	0.797	0	0	0	0.016	0.188	0.984	0.016
18		7	0.797	0	0	0.008	0	0.195	0.992	0.008
19		8	0.797	0.004	0	0	0	0.199	0.996	0.004
20		9	0.799	0	0.002	0	0	0.199	0.998	0.002
21		10	0.8	0	0	0	0.001	0.199	0.999	0.001

Bild 3: fuenfeuro.ggb
Die farblich unterlegte „***Übergangsmatrix***“ gibt an, mit welchen Wahrscheinlichkeiten man von einem Zustand zum nächsten kommt. Darunter liest man ab, wie wahrscheinlich man sich nach t Schritten in den Zuständen 0 bis 5 befindet.
Eine solche Folge von Wahrscheinlichkeitsverteilungen heißt Markoffkette.
Die Grafik veranschaulicht die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Spieldauer.

3 * Programmieren (optional)

Programmiert selber ein Kalkulationsblatt wie in Bild 3, bei dem man durch Schieberegler festlegen kann, mit welchem Startkapital Max in das Spiel einsteigt und bei dem man die Münze, die das Spiel steuert, „zinken“ kann, so dass sie „Zahl“ mit einer beliebigen Wahrscheinlichkeit p liefert. Bereite ein Referat vor, in dem Du erklärst, wie Du programmiert hast.

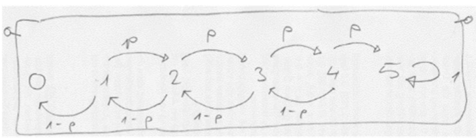
4 Variieren

Nutze zur Beantwortung folgender Fragen das Programm aus 3 oder die Vorlage fuenfeuro.ggb.

a) Wie ändert sich die Verteilung der Spieldauer und der erwartete Gewinn, wenn Max mit 2, 3 oder 4 Euro startet.

b) Wie ändern sich die Gewinnchancen, wenn die Münze „Zahl“ mit Wahrscheinlichkeit p=0,6 oder p=0,7 liefert?

c) Untersucht, wie sich den Gewinnchancen und Spieldauer ändern, wenn Max immer nur einen Euro setzt.
Ändert dazu die Übergangsmatrix in C3:H5.



Die drei Wanderer - Experiment und Simulation B

Darum geht es

markoff-B-drei-wanderer-simulation-start-ziel.ggb

Markoffketten, mittlere Wartezeiten, Wartezeitenverteilung: Experiment

Dreieckswanderer

Ayse, **B**irgit und **C**laudia, wandern wie in Bild 1 unabhängig voneinander in einem Dreieck von Ecke zu Ecke. Der Zufall entscheidet bei jeder von ihnen, ob der nächste Schritt im oder gegen den Uhrzeigersinn erfolgt. Bild 2 zeigt, wie man die Wanderung als Irrfahrt auf einem Graphen deuten kann. Dabei bedeutet Zustand 1: Alle haben sich in einer Ecke getroffen, nur eine Ecke ist belegt. Zustand 3 bedeutet: drei Ecken sind belegt, jedes Mädchen steht auf einer anderen Position.

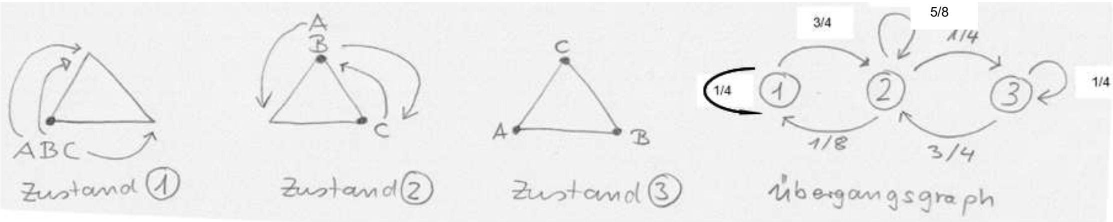


Bild 1a 1b 1c Bild 2

1 Spielen

a) Zeichnet ein Dreieck und spielt die Wanderungen in Dreiergruppen wie folgt nach:
- Jeder stellt seine Spielfigur auf eine andere Ecke. Ihr startet also im Zustand 3 des Übergangsgraphen.
- Dann wirft jeder Spieler eine Münze und bewegt seine Spielfigur bei Wappen einen Schritt im Uhrzeigersinn, bei Zahl entgegen. Der Zustand im Übergangsgraphen kann sich dadurch ändern.
- Spielt solange, bis sich alle Figuren in einer Ecke begegnen, ihr also im Zustand 1 gelandet seid.
- Spielt dann weiter, bis die Figuren wieder auf drei unterschiedlichen Ecken stehen, ihr also wieder in Zustand 3 seid.
- Protokolliert die Spielverläufe wie nebenstehend.

	benötigte Schritte von 3 auf 1	benötigte Schritte von 1 auf 3	Nach 5 Schritten im Zustand:
3 3 2 2 3 2 1 1 2 3	6	3	3
3 2 2 2 1 2 1 2 3	4	4	2

b) Tragt die Ergebnisse zusammen und entscheidet durch Mittelwertbildung, ob man schneller von Zustand 1 auf Zustand 3 oder von Zustand 3 auf Zustand 1 gelangt.

c) Hannah: „Da man vom Zustand 2 eher nach 3 als nach 1 kommt, werden sich die Mädchen – wenn sie immer weiter wandern - wahrscheinlicher an drei verschiedenen Ecken aufhalten als alle auf einer. An wahrscheinlichsten werden aber zwei zusammenstehen und das dritte Mädchen ist allein - wie im richtigen Leben.“ Überprüft Hannahs Vermutung. Schätzt die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass sich die Mädchen nach 5 Spielschritten auf 1, 2 oder drei Ecken verteilen. Zählt dazu die letzte Tabellenspalte mit einer Strichliste.

2 Übergangswahrscheinlichkeiten

a) In Bild 1a stehen alle Mädchen in der linken Ecke L. Ayse kann in die obere Ecke O oder die rechte R gehen. Das Gleiche gilt für Birgit und Claudia. Begründe mit dem nebenstehenden Baumdiagramm, dass man mit Wahrscheinlichkeit ¼ im Zustand 1 bleibt und mit ¾ nach Zustand 2 gelangt.Zeichne für die Zustände 2 und 3 entsprechende Baumdiagramme und prüft die Wahrscheinlichkeitsangaben in Bild 2.

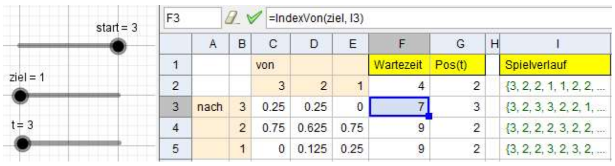
```
                 Zustand 1 (Bild 1a)
                     /       \
Ayse               O           R
                 /   \       /   \
Birgit          O     R     O     R
               /\    /\    /\    /\
Claudia       O  R  O  R  O  R  O  R
```
Bild 3

3 Simulieren

Überprüft eure Schätzungen aus 1b) und 1c) mithilfe der vorbereiteten Datei *dreiwanderer-simulation-start-ziel.ggb* wie folgt:

a) Stellt die 100 Wartezeiten aus Spalte F als Säulendiagramm dar und berechnet wie lange man im Mittel warten muss, um vom 3 nach 1 (bzw. von 1 nach 3) zu gelangen.

b) Untersucht, wie häufig man sich nach 5 Schritten in den Zuständen 1, 2 oder 3 befindet. Stellt dazu die Daten aus Spalte G in einem Histogramm dar. Untersucht, wie sich das Histogramm zu verschiedenen Zeiten (t=10, t=20) ändert.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1			von			Wartezeit	Pos(t)		Spielverlauf
2			3	2	1	4	2		{3, 2, 2, 1, 1, 2, 2, ...
3	nach	3	0.25	0.25	0	7	3		{3, 2, 3, 3, 2, 2, 1, ...
4		2	0.75	0.625	0.75	9	2		{3, 2, 2, 2, 3, 2, 2, ...
5		1	0	0.125	0.25	9	2		{3, 2, 2, 3, 2, 3, 2, ...

Bild 4: Datei *dreiwanderer-simulation-start-ziel.ggb*.
Im Bereich C3:C5 stehen die Wahrscheinlichkeiten, mit den man vom Zustand 3 in die anderen Zustände gelangt, analog in den Spalten D, E.
In Spalte I werden 100 Spielverläufe simuliert, wobei man den Startzustand (3) und den Zielzustand (1) einstellen kann. Spalte F zeigt für jede Simulation die Anzahl der Spielschritte bis zum Erreichen des Ziels, also die Wartezeiten. Spalte I zeigt, in welchem Zustand sich das Spiel zur Zeit t befindet.

Die drei Wanderer - Theorie (Rekursion) C

markoff-C-drei-wanderer-rekursiv.ggb

Darum geht es

Markoffketten, Grenzverteilung, mittlere Wartezeiten, Wartezeitenverteilung

1 Rekursion

Wenn man eine Irrfahrt auf dem Graphen von Bild 1 im Zustand 3 startet, ist man nach zwei Schritten mit Wahrscheinlichkeit 25% wieder in 1, mit ca. 65,65% in Zustand 2 und mit 9,83% in Zustand 1.
Das entnimmt man den Zeilen 8 und 10 von Bild 2.

a) Bestätige diese Wahrscheinlichkeitsangaben durch Nachrechnen mithilfe eines zweistufigen Baumdiagramms.

b) Lina: “Die Wahrscheinlichkeit, dass man sich nach fünf Schritten im Zustand 2 befindet, kann man mit Baumdiagrammen kaum noch berechnen. Viel einfacher ist der Rückgriff (die „*Rekursion*“) auf Zeile 4:
0,2236*3/4+0,6665* 5/8+0,1099*34=0,6667
- Erläutere die Idee hinter Linas Rechnung.
- Übertrage die Rechnung auf die Zellen C13 und E13.
- Die in Zelle D13 eingeblendete GeoGebra Formel ist genial. Erkläre, wie die „Summe aus Produkten“ funktioniert.

c) Setzt die Tabelle *dreiwanderer-rekursiv.ggb* nach unten fort und erklärt anschaulich mit gesundem Menschenverstand, was ihr dabei beobachtet.

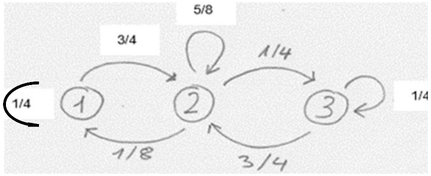


Bild 1: Übergangsgraph

D13 =Summe($C12:$E12 $C$4:$E$4)

	A	B	C	D	E
1			von		
2			3	2	1
3	nach	3	0.25	0.25	0
4		2	0.75	0.625	0.75
5		1	0	0.125	0.25
6					
7	t		3	2	1
8	0		1	0	0
9	1		0.25	0.75	0
10	2		0.25	0.6563	0.0938
11	3		0.2266	0.668	0.1055
12	4		0.2236	0.6665	0.1099
13	5		0.2225	0.6667	0.1108

Bild 2: *dreiwanderer-rekursiv.ggb*: rekursive Berechnung der Aufenthaltswahrscheinlichkeiten nach t Schritten

2 Wartezeitenverteilung (Warten auf das Treffen in einer Ecke)

Wenn man in Bild 1 den Pfeil von Zustand 1 auf 2 so umbiegt, dass er zu 1 zurückführt, erhält man Bild 3. Der Zustand 1 wird „absorbierend“, man kommt aus ihm nicht mehr heraus.

a) Stelle eine Vermutung darüber auf, wie sich die Wahrscheinlichkeitsverteilungen in den Spalten C bis D dadurch im Laufe der Zeit weiterentwickeln. Prüfe die Vermutung durch Abändern der Datei *dreiwanderer-rekursiv.ggb*.

b) Max: Wenn ich die Irrfahrt in Bild 3 immer weiterlaufen lasse, erhalte ich die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass man in Bild 1 ein, zwei, drei … t Schritte warten muss, um vom Zustand 3 nach Zustand 1 zu gelangen, also die Wartezeitenverteilung. Erklärt einander, wie Max argumentieren könnte.

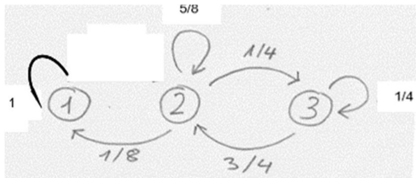
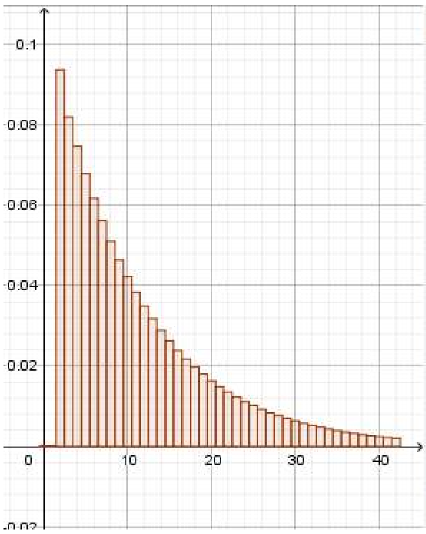


Bild 3: Zustand 1 wird absorbierend

c) Berechnet die Wartezeitenverteilung, deren Erwartungswert und stellt sie als Histogramm dar wie in Bild 4.

d) Nina: „Von 1 auf 3 geht es in Bild 1 deutlich schneller als von 3 nach 1.“
Berechne analog die die entsprechende Wartezeitenverteilung und Überprüft damit Ninas Aussage.

e) Nina: „Die Histogramme in c) und auch in d) sehen aus wie Exponentialfunktionen.“
Prüfe Ninas Vermutung mithilfe von Quotienten.



B13 =E13 - E12

	A	B	C	D	E
1			von		
2			3	2	1
3	nach	3	0.25	0.25	0
4		2	0.75	0.625	0
5		1	0	0.125	1
6					
7	t	P(X=t)	3	2	1
8	0	0	1	0	0
9	1	0	0.25	0.75	0
10	2	0.0938	0.25	0.6563	0.0938
11	3	0.082	0.2266	0.5977	0.1758
12	4	0.0747	0.2061	0.5435	0.2505
13	5	0.0679	0.1874	0.4942	0.3184

Bild 4: Wartezeitenverteilung

Die drei Wanderer - Rückkehr zum Start D

markoff-C-drei-wanderer-rekursiv.ggb
markoff-D-drei-wanderer-simulation-zurueck-zum-start.ggb
markoff-A-fuenfeuro.ggb

Darum geht es

Stationäre Verteilung, Rückkehr zum Start. Simulieren mit Listen.

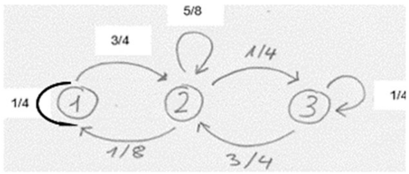


Bild 1 Übergangsgraph

	A	B	C	D	E
1			von		
2			3	2	1
3	nach	3	0.25	0.25	0
4		2	0.75	0.625	0.75
5		1	0	0.125	0.25

Bild 2 Übergangsmatrix

Zurück zum Start
Bei der „immerwährenden" Irrfahrt auf dem Graphen von Bild 1 ist man alsbald mit Wahrscheinlichkeit 8/35 = 0,228… im Zustand 3, mit 24/35 = 0,685... im Zustand 2 und mit 3/35 = 0,0857... in Zustand 1 – und zwar unabhängig davon, wo man gestartet ist. Man spricht von einer *stationären* Wahrscheinlichkeitsverteilung.
Max: „Müsste man bei einer langen Irrfahrt mit 3500 Schritten nicht ca. 300-mal bei „1" vorbeikommen, also im Schnitt 3500/300 = 11,66 Schritte warten, bis man von „1" wieder in „1" zurückkommt? Beim Zustand 2 wären es bis zur Rückkehr nur 35/24 = 1,45… und beim Zustand 3 35/8 = 4,375… Schritte?".

1 Simulation

a) Erläutere den Gedanken von Max und bestätige die Wahrscheinlichkeitsangaben mit *dreiwanderer-rekursiv.ggb* oder indem Du (mit Brüchen!) nachrechnest, dass die angegebene Wahrscheinlichkeitsverteilung mit ihrer Folgeverteilung übereinstimmt.

b) * Finde heraus, was in Bild 2 der Befehl `=ZufallszahlDiskret({3,2,1},C3:C5)` bewirkt.
Erklärt einander, warum man mit `start=3, n=10` und

```
L=Iterationsliste(Wenn(S≟3,ZufallszahlDiskret({3,2,1},C3:C5),0)+
                  Wenn(S≟2,ZufallszahlDiskret({3,2,1},D3:D5),0)+
                  Wenn(S≟1,ZufallszahlDiskret({3,2,1},E3:E5),0),S,{start},n)
```

eine 10-schrittige Irrfahrt mit Start im Zustand 3 simulieren kann. Erprobt die Befehle.

c) Folgende Befehle liefern die Zeitspannen, die man bis zur Rückkehr zum Start warten muss. Erprobt und erläutert diese Befehle Schritt für Schritt.

```
L=Folge(Wenn(L(i)≟start,i,0),i,1,n)
Zeitpunkte_1=Folge(Wenn(L(i) ≟ start, i, 0), i, 1, n)
Zeitpunkte_2=Teilliste(Einzigartig(Zeitpunkte_1), 2)
Wartezeiten=Folge(Zeitpunkte_2(i)-Zeitpunkte_2(i-1),
i, 2,Länge(Zeitpunkte_2))
mittlereWartezeit=Mittel(Wartezeiten)
```

start = 3
n = 10
L = {3, 2, 1, 2, 2, 3, 2, 1, 2, 3, 3}
Zeitpunkte$_1$ = {1, 0, 0, 0, 0, 6, 0, 0, 0, 10, 11}
Zeitpunkte$_2$ = {1, 6, 10, 11}
Wartezeiten = {5, 4, 1}
mittlereWartezeit = 3.3333

d) Bestätigt die Vermutung von Max für n=3500 und verschiedene Startwerte. Berechnet dazu den Mittelwert der Liste Wartezeiten – und stellt die Wartezeitenverteilung als Histogramm dar.
Nutzt zur Kontrolle (oder als Alternative zum selber Programmieren) *dreiwanderer-simulation-zurueck-zum-start.ggb*.

2 theoretische Lösung

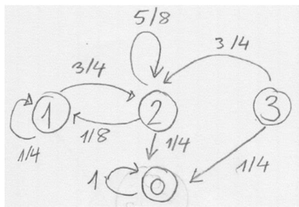


Bild 3: veränderter Übrgangsgraph

a) Die Rückkehr in den Startzustand 3 in Bild 1 läuft in Bild 3 auf das Erreichen des Endzustandes 0 hinaus. Erläutert diese Aussage. Fertigt entsprechende Übergangsgraphen für die Rückkehr in den Zustand 1 und den Zustand 2 an.

b) Bestimmt die Wartezeitenverteilung und die mittlere Wartezeit bis zur Rückkehr und bestätigt damit die Aussagen von Max.
Wenn du nicht neu programmieren möchtest, kannst Du die Programmvorlage *markoff-fuenfeuro.ggb* (mit 5 Zuständen) nutzen. Du kannst durch Abändern der Übergangswahrscheinlichkeiten den nicht benötigten fünften Zustand ganz einfach isolieren!

c) * Zusatz: Falls Du die Mittelwertsregel für die Spieldauerberecnnung kennst:
Die (unbekannte) mittlere Wartezeit, dafür, dass man vom Zustand 3 (bzw. 2, 1) aus nach 0 gelangt, bezeichnet man mit m_3. (bzw. m_2, m_1).
Begründe das Gleichungssystem aus Bild 4 und berechne m_3.

$$m_1 = 1 + \frac{1}{4}m_1 + \frac{3}{4}m_2$$
$$m_2 = 1 + \frac{1}{8}m_1 + \frac{5}{8}m_2 \frac{1}{4}0$$
$$m_3 = 1 + \frac{3}{4}m_2 + \frac{1}{4}0$$

Bild 4: Mittelwertsregel

Markoffketten und Matrizen E

markoff-E-matrix-absorbierend.ggb

Darum geht es:
Wie „Profis“ absorbierende Markoffketten in GeoGebra mit Übergansmatrizen und Zustandsvektoren berechnen. Nutzen Sie hier vorgestellten Verfahren zur Bearbeitung des „5 Euro-Spiels“ oder der „drei Wandererr“ - Aufgaben.

Markoffketten mit absorbierenden Zuständen

Eine Münze wird so lange geworfen, bis entweder das Muster „KZK“ oder „KKK“ entsteht. Im ersten Fall gewinnt Verena, im zweiten Fall Steffen.

a) Wie groß sind die Geninnwahrscheinlichkeiten?

b) Wie lange dauert das Spiel im Mittel?

c) Wie sieht die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Spieldauer aus?

Eine erste Antwort auf diese Fragen erhält man, indem man den zum Spiel gehörigen Übergangsgraphen aus Bild 1 in die Übergangsmatrix U aus Bild 2 übersetzt. Die Matrixspalten enthalten die Wahrscheinlichkeiten, mit denen man von den 7 Zuständen in die Folgezustände gelangt. Dabei nummeriert man so, dass die absorbierenden Zustände KKK und KZK die höchsten Nummern erhalten.

zu a): Wenn man t Spielschritte „auf einmal“ durchführt, ist die zugehörige Übergangsmatrix $U_t = U^t$. Wie Bild 3 zeigt, landet man bei Start im Zustand 1 (vgl. den Startvektor v_0 und den Zustandsvektor $v_{25}=U_{25}*v_0$) nach 25 Schritten mit der Wahrscheinlichkeit von (gerundet) 40% in Zustand 6. Und das ist die Gewinnwahrscheinlichkeit von Steffen. Das Ergebnis ergibt sich auch aus $U^t \cdot v_0$. Wenn man das Spiel im Zustand 4 starten würde, hätte Steffen mit 60% eine größere Gewinnchance als Verena. Das zeigt Spalte 4 von U_{25}

Zu b) und c): Die Summe der letzten beiden Elemente von $U^t * v_0$, also die Wahrscheinlichkeit der Zustände 6 und 7 ist gleichzeitig die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Spiel höchstens t Schritte gedauert hat. Und wenn man schaut, um welchen Wert diese Wahrscheinlichkeit in jedem Schritt zunimmt, erhält man die Spieldauerverteilung, aus der man die mittlere Spieldauer als Produktsumme nach unten abschätzt.

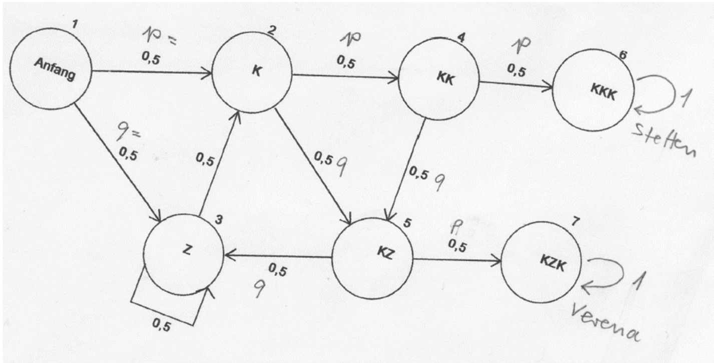
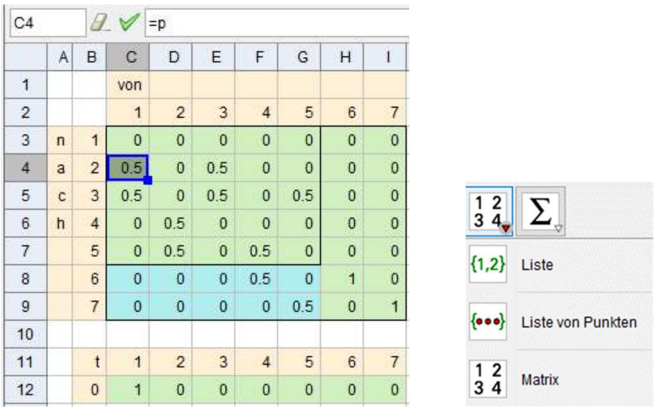


Bild 1: Übergangsgraph mit zwei absorbierenden Zuständen 6 (KKK) und 7 (KZK). Die Wahrscheinlichkeit für Kopf (K) ist p = 0,5.
Zur Kontrolle: *markoff-matrix-absorbierend.ggb*



C4 =p

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1			von						
2			1	2	3	4	5	6	7
3	n	1	0	0	0	0	0	0	0
4	a	2	0.5	0	0.5	0	0	0	0
5	c	3	0.5	0	0.5	0	0.5	0	0
6	h	4	0	0.5	0	0	0	0	0
7		5	0	0.5	0	0.5	0	0	0
8		6	0	0	0	0.5	0	1	0
9		7	0	0	0	0	0.5	0	1
10									
11		t	1	2	3	4	5	6	7
12		0	1	0	0	0	0	0	0

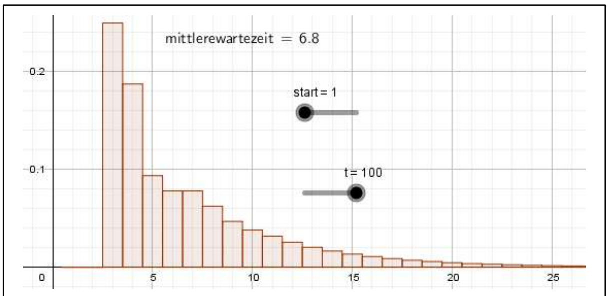
$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bild 2: Übergangsmatrix U (C3:I9) und Startvektor v_0 (C12:I12) lassen sich aus der Kalkulationstabelle komfortabel über das Werkzeug „Matrix“ in die Algebra-Ansicht übertragen, in der man Matrizen potenzieren und mit Vektoren (einspaltigen Matrizen) multiplizieren kann.

t = 25

$$U_t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.4 & 0.4 & 0.6 & 0.2 & 1 & 0 \\ 0.6 & 0.6 & 0.6 & 0.4 & 0.8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bild 3: Übergangsmatrix `U_25=U^25` und `v_25=U_25*v_0`




```
wartezeitenkumuliert=Folge(Element(Element(U^i*v_0,6),1)+Element(Element(U^i*v_0,7),1),i,0,t)
wartezeiten=Folge(wartezeitkumuliert(i+1)-wartezeitkumuliert(i),i,1,t)
mittlerewartezeit=Summe(Folge(i*wartezeitenverteilung(i),i,1,t))
```

Bild 4a-b: Graphik und Berechnung der Spieldauerverteilung zu verschiedenen Startzuständen

Prozessdauer, Absorptionswahrscheinlichkeit, Mittelwertsregel F

Darum geht es: Mittelwertsregeln für absorbierende Markoffketten, Fundamentalmatrix

markoff-E-matrix-absorbierend.ggb

1 Prozessdauer

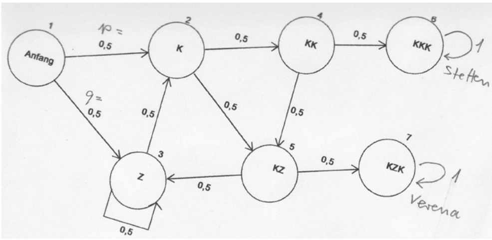
Zu jedem *inneren* Zustand *i* gibt es eine mittlere Wartezeit m_i die angibt, wie lange man von hier aus im Mittel bis zur Absorption in einem der Randzustände 6 oder 7 braucht. Es gilt die

1. Mittelwertsregel
Die mittlere Wartezeit m_i eines inneren Zustandes i ist das durch die Übergangswahrscheinlichkeiten gewichtete Mittel der Wartezeiten der Folgezustände vermehrt um 1.

Beispielsweise braucht man vom Zustand 1 stets einen Schritt, um (mit Wahrscheinlichkeit p) nach 2 oder (mit Wahrscheinlichkeit q) nach 3 zu kommen. Vom Zustand 2 braucht man anschließend im Mittel m_2 und vom Zustand 3 im Mittel m_3 Schritte. Daher gilt (wegen $m_6=m_7=0$)
$m_1 = p \cdot m_2 + q \cdot m_3 + 1$.
Die Mittelwertsregel liefert das lineare Gleichungssystem (*) für die mittleren Wartezeiten, das man händisch lösen kann. In GeoGebra nutzt man dazu Matrizen wie folgt:

Man fasst die gesuchten mittleren Wartezeiten in einer einspaltigen Matrix *m*, die Summanden 1 in *e* zusammen und schreibt die Mittelwertsregel in Matrizenform so:
$m = Q * m + e$ und die mittleren Wartezeiten ergeben sich aus $m = (E - Q)^{-1} * e$.
Dabei erhält man Q durch Transponieren des Teils der Übergangsmatrix, der zu den inneren Zuständen gehört und E ist die Einheitsmatrix.

$F = (E - Q)^{-1}$ bezeichnet man als **Fundamentalmatrix**.



Übergangsgraph

		von				
		1	2	3	4	5
n	1	0	0	0	0	0
a	2	p	0	p	0	0
c	3	q	0	q	0	q
h	4	0	p	0	0	0
	5	0	q	0	q	0
s	6	0	0	0	p	0
v	7	0	0	0	0	p

innere 5x5 Übergangsmatrix

$$\boxed{m = Q * m + e}$$

$$\begin{aligned} m_1 &= p \cdot m_2 + q \cdot m_3 && +1 \\ m_2 &= p \cdot m_4 + q \cdot m_5 && +1 \\ m_3 &= p \cdot m_2 + q \cdot m_3 && +1 \\ m_4 &= q \cdot m_5 && +1 \\ m_5 &= q \cdot m_3 && +1 \end{aligned}$$

1. Mittelwertsregel (*)

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

transponierte innere Übergangsmatrix für p=0,5

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 1.6 & 2.2 & 0.8 & 1.2 \\ 0 & 1.6 & 1.2 & 0.8 & 1.2 \\ 0 & 1.6 & 3.2 & 0.8 & 1.2 \\ 0 & 0.4 & 0.8 & 1.2 & 0.8 \\ 0 & 0.8 & 1.6 & 0.4 & 1.6 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{m} = \begin{pmatrix} 6.8 \\ 4.8 \\ 6.8 \\ 3.2 \\ 4.4 \end{pmatrix}$$

Fundamentalmatrix F= (E-Q)^-1 Wartezeiten m = F*e

Bild 1: Berechnung der mittleren Wartezeiten

2 Absorptionswahrscheinlichkeiten

Steffen gewinnt bei Absorption im Zustand 6. Er ordnet jedem inneren Zustand i die Gewinnwahrscheinlichkeit g_i zu, die angibt, mit welcher Wahrscheinlichkeit er von hier aus zum Zustand 6 gelangt. Es gilt die

2. Mittelwertsregel
Die Gewinnwahrscheinlichkeit g_i eines Zustandes i ist das (durch die Übergangswahrscheinlichkeiten) gewichtete Mittel der Gewinnwahrscheinlichkeiten der Folgezustände.

Beispielsweise gelangt man vom Zustand 1 (mit Wahrscheinlichkeit p) über 2 oder (mit Wahrscheinlichkeit q) über 3 zum Zustand 6. Vom Zustand 2 aus passiert das mit Wahrscheinlichkeit g_2 und vom Zustand 3 aus mit Wahrscheinlichkeit g_3. Daher gilt $g_1 = p \cdot g_2 + q \cdot g_3$ und z. B. $g_4 = q \cdot g_5 + p \cdot 1$.

$$\begin{aligned} g_1 &= p g_2 + q g_3 \\ g_2 &= p g_4 + q g_5 \\ g_3 &= p g_2 + q g_3 \\ g_4 &= q g_5 + p \cdot 1 \\ g_5 &= q g_3 + p \cdot 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{g = Q * g + a_g}$$

2. Mittelwertsregel für Steffens Gewinnwahrscheinlihkeiten

$$\mathbf{a_g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.5 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{g} = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.4 \\ 0.4 \\ 0.6 \\ 0.2 \end{pmatrix} \quad g = F*a_g$$

Steffens Absorptionsmatrix Steffens Gewinnwahrscheinlichkeiten

Bild 2: Berechnung der Gewinnwahrscheinlichkeiten

Man erhält das lineare Gleichungssystem (**), das man händisch löset oder mit Matrizen wie folgt:

Man fasst die Gewinnwahrscheinlichkeiten in einer einspaltigen Matrix g zusammen und schreibt die Mittelwertsregel in Matrizenform so: $g = Q * g + a_g$. Dann ergeben sich die Absorptionswahrscheinlichkeiten aus $g = (E - Q)^{-1} * a_g$.
Dabei fasst man „Steffens“ Zeile 6 in der Übergangsmatrix als einspaltige Absoptionsmatrix a_g auf. (Analog würde Verena Zeile 7 nutzen.) Steffen gewinnt vom Startzustand aus mit Wahrscheinlichkeit 0,4, vom Zustand 4 aus mit 0,6.

Stationäre Verteilungen als Eigenvektoren G

markoff-G-regulaer-eigenvektor-cas.ggb
markoff-G-regulaer-lgs.ggb

Darum geht es:
Wie „Profis" stationäre Verteilungen regulärer Markoffketten berechnen

Markoffketten ohne absorbierende Zustände

Verena und Steffen setzen das Spiel fort, sobald einer von beiden gewonnen hat. Dadurch entsteht ein „immerwährender" Prozess ohne absorbierende Zustände mit Übergangsmatrix U, *bei dem man von jedem Zustand irgendwann einmal in jeden anderen Zustand gelangen kann*. Ein eine solche Markoffkette heißt ***regulär***.

Die Potenzen der Übergangsmatrizen regulärer Prozesse werden einander immer ähnlicher mit gleichen Wahrscheinlichkeiten in allen Spalten. Das veranschaulichen die Matrizenpotenzen U_{10} =U^10 und U_{30}=U^30.

Es gilt der

Ergodensatz für reguläre Markoffketten
Die Zustandsverteilungen konvergieren unabhängig vom Startzustand gegen eine stationäre Verteilung s.

Für die stationäre Verteilung s gilt U*s=s, sie ist ein Eigenvektor der Übergangsmatrix zum Eigenwert 1, erfüllt also die Gleichung

(*) Q*s=0 mit Q = U-E.

Weil s zu einer Wahrscheinlichkeitsverteilung gehört, gilt zusätzlich

(**) $s_1 + \ldots + s_7 = 1$.

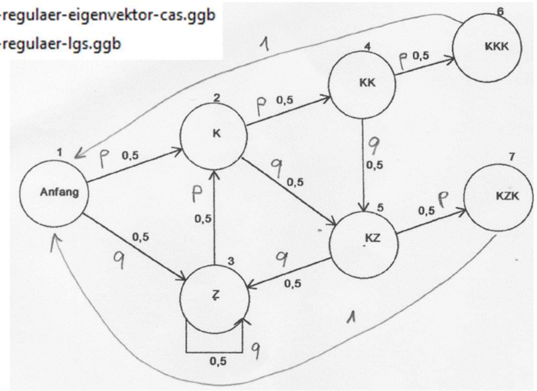
Das Gleichungssystem (*) ist nicht eindeutig lösbar, da mit jedem Eigenvektor auch dessen Vielfache Lösungen sind, die 7 Gleichungen in (*) sind also linear abhängig. Man ersetzt daher z. B. die letzte durch (**) und löst Q_1*s = e durch Invertieren: s = Q_1^{-1} * e.

Dabei haben wegen (*) alle Komponenten von e den Wert 0 nur die letzte hat wegen (**) den Wert 1.
Wie man sieht, stimmt die Lösung mit den Spalten von U_{30} (bis auf zwei Nachkommastellen) überein.

Wer CAS nutzen möchte, definiert eine Liste mit 7 Variablen $\{x_1, \ldots, x_7\}$ und löste das System aus den (insgesamt 8) linearen Gleichungen wie folgt:

```
CAS
1  X:={x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7}
   → X := {x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7}
2  S:=Löse({(U-Einheitsmatrix(7))*X=0,x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7=1}, X)
```

$$S := \left\{\left\{x1 = \frac{5}{39}, x2 = \frac{8}{39}, x3 = \frac{11}{39}, x4 = \frac{4}{39}, x5 = \frac{2}{13}, x6 = \frac{2}{39}, x7 = \frac{1}{13}\right\}\right\}$$



Übergangsgraph

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ Übergangsmatrix

t = 10

$$U_t = \begin{pmatrix} 0.13 & 0.1 & 0.13 & 0.13 & 0.15 & 0.16 & 0.16 \\ 0.22 & 0.2 & 0.22 & 0.18 & 0.19 & 0.21 & 0.21 \\ 0.29 & 0.28 & 0.29 & 0.27 & 0.28 & 0.29 & 0.29 \\ 0.1 & 0.12 & 0.1 & 0.1 & 0.09 & 0.09 & 0.09 \\ 0.15 & 0.18 & 0.15 & 0.17 & 0.15 & 0.14 & 0.14 \\ 0.04 & 0.06 & 0.04 & 0.06 & 0.06 & 0.05 & 0.05 \\ 0.07 & 0.08 & 0.07 & 0.09 & 0.09 & 0.08 & 0.08 \end{pmatrix}$$ = U^10

t = 30

$$U_t = \begin{pmatrix} 0.13 & 0.13 & 0.13 & 0.13 & 0.13 & 0.13 & 0.13 \\ 0.21 & 0.21 & 0.21 & 0.21 & 0.21 & 0.21 & 0.21 \\ 0.28 & 0.28 & 0.28 & 0.28 & 0.28 & 0.28 & 0.28 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.15 & 0.15 & 0.15 & 0.15 & 0.15 & 0.15 & 0.15 \\ 0.05 & 0.05 & 0.05 & 0.05 & 0.05 & 0.05 & 0.05 \\ 0.08 & 0.08 & \text{0.0[illegible]} & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 \end{pmatrix}$$ =U^30

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0.5 & -1 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & -0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$ =U-Einheitsmatrix(7)

$$Q_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0.5 & -1 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & -0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ Modifizierung von Q

$$e = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad s = \begin{pmatrix} 0.13 \\ 0.21 \\ 0.28 \\ 0.1 \\ 0.15 \\ 0.05 \\ 0.08 \end{pmatrix}$$ =Q1^{-1} * e (stationäre Verteilung)

Noch einfacher ist der Befehl `Eigenvektoren(U)`, der eine Matrix mit alle Eigenvektoren liefert.
Man liest den zum Eigenwert 1 ab und normiert ihn anschließend.