Die Exponentialverteilung

Klassenstufe 7 (Simulation) bis 13 (Theorie)

Darum geht es

- Verteilung von Wartezeiten in verschiedenen Kontexten
- Die Exponentialfunktion als Wahrscheinlichkeitsdichte

Lernvoraussetzungen

- SI: Simulationen, Tabellenkalkulation
- SII: Exponentialfunktion, Binomialkoeffizienten
- $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \approx e^x$ für großes n

Idee

- Seit Tagen oder gar Wochen wartet man auf Anrufe oder Nachrichten - und dann kommen „alle auf einmal".
- Man kommt aus dem Schwimmbecken. Nur wenige Leute sind im Umkleideraum, aber die sitzen „immer" genau vor meinem Schrank.
- Das gleiche bei den Geburtstagen: Das Jahr hat 365 Tage, aber die Geburtstage knüppeln sich, mitunter so, dass man gar nicht alle feiern kann.

Hinter dem „Knüppeln von Ereignissen" steckt System: Wenn nämlich Ereignisse (zeitlich oder räumlich) „zufällig und gleichmäßig" verteilt sind, dann sind die Abstände zwischen ihnen exponentialverteilt. Und das bedeutet: kurze Abstände sind viel wahrscheinlicher als lange: „Dinge" häufen sich. Dieses Phänomen kann man in der SI über Simulationen und in der SII auch analytisch verstehen.

Vorgehen – Methodische Hinweise

Exponentialfunktionen sind Grundpfeiler der Analysis. Ihre Integrale beschreiben aber nicht nur Wirkungen und Bestände, sondern auch Wahrscheinlichkeiten. Wer seine Schülerinnen und Schüler mit dieser Tatsache überraschen möchte, kann „innermathematisch" ohne weitere Vorbereitung mit **Arbeitsblatt A** schon im Rahmen der Analysis, die für Lernende durchaus „mystische" Welt stetiger Zufallsgrößen erschließen. Eine Welt, in der man ausschließlich Ereignissen begegnet, die die Wahrscheinlichkeit 0 besitzen. Exponentialverteilte Zufallszahlen verscheuchen diese Mystik. Und sie gestatten – wenn man es denn möchte – durch ganzzahliges Aufrunden den Brückenschlag zur geometrischen Verteilung, die vom Würfeln und dem Warten auf die Sechs vertraut ist.

Wenn man im Rahmen der Stochastik den Einstieg über Alltagsphänomene (Nachrichten/Geburtstage/Schwimmbad, s. o.) bevorzugt, beginnt man mit einem der **Blätter B, C oder D** und Realexperimenten und/oder deren Simulation. Bei den „Nachrichten" (Blatt B) arbeitet man mit gleichverteilten dezimalen Zufallszahlen, bei Geburtstagen (Blatt C) und Schränken in der Umkleide (Blatt D) mit Stichproben aus ganzzahligen Grundgesamtheiten mit bzw. ohne Zurücklegen. Ein arbeitsteiliges Bearbeiten der Blätter B, C und D bietet sich im Rahmen eines Gruppenpuzzles an, das durch die Theorie in Blatt A abgerundet werden kann.

Binnnendifferenzierung

In der SI oder in (an Experimenten interessierten) Grundkursen reichen die Simulationen, um „die Welt zu verstehen". Im LK empfiehlt sich ein durchaus anspruchsvoller „wahrscheinlichkeitstheoretischer" Zugang über Binomialkoeffizienten (Blatt C) und die Beziehung $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \approx e^x$, die das Auftreten der Exponentialfunktion begründet.

Dateien

A exponentialverteilung.ggb
B warteaufnachricht.ggb
C geburtstagwarten-kurs.ggb
geburtstagswarten-sarah.ggb
D schwimmbad.ggb

Literatur:
Wolfgang Riemer: Warum sich Ergebnisse so oft häufen.
ml 153, S. 56-60

Die Exponentialverteilung und ihre diskrete Schwester A

Darum geht es
Die Exponentialfunktion wird zur Wahrscheinlichkeitsdichte; geometrische Verteilung als diskrete „Schwester“

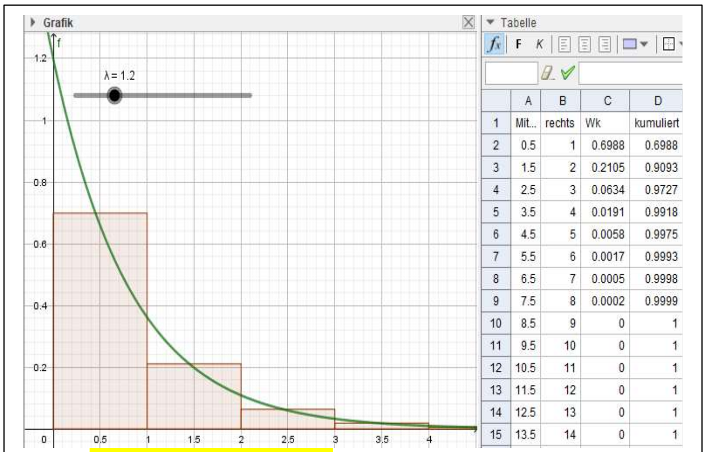
Die Exponentialverteilung
In der Analysis nutzt man Exponentialfunktionen f mit $f(x) = c \cdot e^{-\lambda x},\ \lambda > 0$, um Zerfallsprozesse („exponentielle Abnahme“) zu beschreiben. In der Stochastik definieren sie Wahrscheinlichkeitsverteilungen.
Setzt man nämlich $c = \lambda$, so erhält man $f_\lambda(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}$ und es gilt $\int_0^\infty f_\lambda(x)dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^\infty = 1$.
Damit kann man jedem Intervall $[a; b] \subseteq [0, \infty)$ durch Integrieren die Wahrscheinlichkeit $\int_a^b f_\lambda(x)dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_a^b$ zuordnen.
Man nennt eine reellwertige Zufallsgröße X exponentialverteilt mit Parameter λ, wenn für die Wahrscheinlichkeit gilt
$P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b) = \int_a^b f_\lambda(x)dx = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$.
Die zugehörige Verteilungsfunktion ist $P(X \leq t) = 1 - e^{-\lambda t} = 1 - (e^{-\lambda})^t$.
Erwartungswert $\mu = \int x \cdot f_\lambda(x)dx = \frac{1}{\lambda}$ und Standardabweichung $\sigma = \sqrt{\int (f_\lambda(x) - \mu)^2 dx} = \frac{1}{\lambda}$ sind gleich.
Der Befehl `=-ln(Zufallszahl())/λ` liefert exponentialverteilte Zufallszahlen.

Die Geometrische Verteilung
Beim Würfeln ist die Anzahl Z der Versuche, die man bis zum ersten Treffer („6“) benötigt, eine ganzzahlige Zufallsgröße. Nach der Pfadregel gilt z. B $p(Z = 5) = \left(\frac{1}{6}\right) \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4$, da vor dem Treffer vier Fehltreffer kommen.
Allgemeiner heißt eine ganzzahlige Zufallsgröße Z **geometrisch verteilt** mit dem Parameter q, wenn gilt
$P(Z = t) = p \cdot q^{t-1}$. Insbesondere gilt $P(Z \leq t) = 1 - q^t$.
Z hat den Erwartungswert $\mu = 1/p$ und die Standardabweichung $\sigma = \frac{\sqrt{q}}{p}$. Dabei gilt p=1-q.

Zusammenhang
Wenn man eine exponentialverteilte reellwertige Zufallsgröße X (mit dem Parameter λ) ganzzahlig aufrundet, entsteht eine ganzzahlige Zufallsgröße Z, die geometrisch verteilt ist (mit dem Parameter $q = 1/e^\lambda$ bzw. $\lambda = ln(1/q)$).
Für $t \in Z$ sind nämlich die Bedingungen $Z \leq t$ und $X \leq t$ gleichwertig, und es gilt
$P(Z \leq t) = P(X \leq t) = 1 - e^{-\lambda} = 1 - (\frac{1}{e^\lambda})^t = 1 - q^t$.

1 Exponentialverteilung
Max hat f_λ für $\lambda = 1{,}2$ geplottet, neben den Intervallmitten (Spalte A) in Spalte C die Wahrscheinlichkeiten p_1, p_2, … p_{14} der Intervalle [0;1], [1;2], … [13;14] berechnet und in Spalte E 200 exponentialverteilte Zufallszahlen erzeugt. Er wundert sich, dass keine einzige der 200 Zufallszahlen den Wert 1 hat, obwohl gilt: $f_\lambda(1) = 36\ \%$.

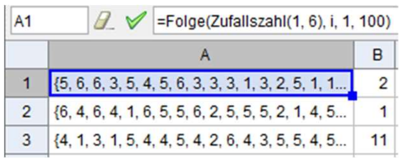
a) Erstellen Sie eine Datei wie in Bild 1. Zählen Sie, ob bei Ihnen 1 öfter kommt.
   Kommentieren Sie!
b) Stellen Sie die Verteilung der Zufallszahlen als Histogramm mit Säulenbreite 1 dar und vergleichen Sie die relativen Häufigkeiten mit den Wahrscheinlichkeiten aus Spalte C.
c) Berechnen Sie den Erwartungswert μ durch Integration von f_λ, eine Näherung des Erwartungswertes über die Werte aus Spalte A und C sowie den Mittelwert der 200 Zufallszahlen. Vergleichen und kommentieren Sie.



	A	B	C	D
1	Mit...	rechts	Wk	kumuliert
2	0.5	1	0.6988	0.6988
3	1.5	2	0.2105	0.9093
4	2.5	3	0.0634	0.9727
5	3.5	4	0.0191	0.9918
6	4.5	5	0.0058	0.9975
7	5.5	6	0.0017	0.9993
8	6.5	7	0.0005	0.9998
9	7.5	8	0.0002	0.9999
10	8.5	9	0	1
11	9.5	10	0	1
12	10.5	11	0	1
13	11.5	12	0	1
14	12.5	13	0	1
15	13.5	14	0	1

Bild 1: *exponentialverteilung.ggb*

2 Geometrische Verteilung
a) Simulieren Sie das Experiment „Warten auf die erste 6 beim Würfeln“ wie nebenstehend. Nutzen Sie in B1 den Befehl `=IndexVon(6,A1)`.
b) Stellen Sie die Verteilung der Wartezeiten in Spalte B durch ein Histogramm dar und vergleichen Sie mit der zugehörigen geometrischen Verteilung.
c) Bestimmen Sie den Parameter λ so, dass die aufgerundeten exponentialverteilten Zufallszahlen `=ceil(-ln(Zufallszahl())/λ)` die gleiche Wahrscheinlichkeitsverteilung besitzen.
   Prüfen Sie durch Vergleichen der Histogramme, der Mittelwerte und der Standardabweichungen.



A1 =Folge(Zufallszahl(1, 6), i, 1, 100)

	A	B
1	{5, 6, 6, 3, 5, 4, 5, 6, 3, 3, 3, 1, 3, 2, 5, 1, 1...	2
2	{6, 4, 6, 4, 1, 6, 5, 5, 6, 2, 5, 5, 5, 2, 1, 4, 5...	1
3	{4, 1, 3, 1, 5, 4, 4, 5, 4, 2, 6, 4, 3, 5, 5, 4, 5...	11

Wenn, dann kommt es knüppeldicke B

Darum geht es (gleichverteilte reelle Stichproben)
Ereignisse im Alltag wie Telefonanrufe, Nachrichten, Termine oder auch platte Fahrradreifen häufen sich „scheinbar zufällig". Dahinter steckt „System": Wenn nämlich Ereignisse auf einer Zahlengeraden (zeitlich oder räumlich) „zufällig und unabhängig voneinander gleichmäßig" verteilt sind, dann sind die Abstände zwischen ihnen näherungsweise *exponentialverteilt*.
Das bedeutet: Kurze Abstände treten häufig auf, die Ereignisse „knüppeln" sich.
Durch Simulieren und Nachdenken kommt man dem Phänomen auf die Schliche.

1 Experiment

Stoppen Sie (mit Ihrem Smartphone oder *stoppuhr.ggb*) alle Zeitpunkte, zu denen ein (nicht professioneller) Redner in einem Video Füllsel wie „äh" „oder so" … einstreut.
Auch Zeitpunkte unbewussten Blinzelns lassen sich stoppen. Veranschaulichen Sie die Verteilung der Zeitenten zwischen diesen „Signalen" (=Wartezeiten) in einem Histogramm.

Blinzeln - Funktion, Besonderheiten, gesundheitliche Aspekte
https://www.blickcheck.de/auge/funktion/blinzeln/
Pro Minute schließt und öffnet ein Mensch seine Augenlider etwa 10- bis 15-mal.

2 Auf Signale warten - Simulation

Die Anzahl der Ereignisse je Zeiteinheit bezeichnet man als Signaldichte. Der Befehl `=Zufallszahlgleichverteilt(0,1,50)` „wirft" 50 Zufallszahlen auf das Einheitsintervall (0;1). Der Befehl `=Zufallszahlgleichverteilt(0,10,500)` wirft zehnmal so viele Signale auf das zehnmal so große Intervall. Beide Befehle realisieren die Signaldichte 50, aber der zweite Befehl passt besser zu einem kontinuierlichen Prozess, weil es über längere Zeiträume gesehen auch bei Signaldichte 50 prinzipiell Einheitsintervalle geben kann, in denen keine Signale eintreffen.
Noch besser ist `=Zufallszahlgleichverteilt(0,b,50*b)` mit einer großen rechten Intervallgrenze b.

a) Simulieren Sie den Versuch „Warten auf das nächst Signal" bei einer gleichmäßigen Signaldichte d = 50 über dem Zeitintervall [0;b] mit b=1. Stellen Sie die Wartezeitenverteilung durch ein Histogramm wie in Bild 2 dar.

b) Wie werden sich die Diagramme ändern, wenn man die Intervallgrenze b oder die Signaldichte d erhöht? Überprüfen Sie Ihre Vermutung.

c) Vergleichen Sie das Histogramm der Simulation mit der Dichte der Exponentialverteilung $f_\lambda(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}$ für λ = d.

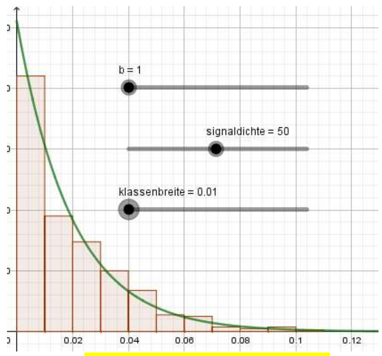


Bild 2: *warteaufnachricht.ggb*.

Nützliche Befehle:
```
n=d*b
sgnle=sortiere(zufallszahlgleichverteilt(0,b,n))
wrtn=Folge(sgnle(i+1)-sgnle(i),i,1,n)
kl=Klassen(wrtn,0,klassenbreite)
Histogramm(kl,wrtn,true,1/n)
```

2 Theorie: Exponentialverteilung

Wenn auf der Zahlengeraden Zufallszahlen gleichmäßig so verteilt sind, dass auf eine Einheit d Zahlen kommen, dann sind die Abstände zwischen benachbarten Zahlen exponentialverteilt mit Dichte $f_\lambda(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}$, wobei $\lambda = d$.

Dieser Satz soll am Beispiel d=100 in drei Schritten begründet werden.

a) Lassen Sie 100 Zufallszahlen zufällig auf das Intervall [0;1] fallen. Begründen Sie: Die Wahrscheinlichkeit, dass im Intervall [0;x] keine Zufallszahl liegt, ist $(1-x)^{100}$.

b) Nun lässt man 200 Zufallszahlen auf das Intervall [0;2] fallen. Begründen Sie: Die Wahrscheinlichkeit, dass im Intervall [0;x] keine Zufallszahl liegt, ist nun $(1-\frac{x}{2})^{2\cdot 100}$; und wenn man b*100 Zufallszahlen auf das Intervall [0;b] fallen lässt, liegen mit Wahrscheinlichkeit $(1-\frac{x}{n})^{n\cdot 100} \approx e^{-100x}$ keine Zahlen in [0;x].

c) Folgern Sie hieraus: Wenn eine Zahlengerade gleichmäßig von Zufallszahlen mit der „Dichte" d=100 Zahlen je Einheit" bevölkert ist, dann ist der Abstand zwischen zwei aufeinander folgenden Zahlen exponentialverteilt mit der Dichte $f_\lambda(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}\ mit\ \lambda = 100$. Zeigen Sie dazu: $P(0 \leq X \leq x) = 1 - e^{-100x}$.

Die Exponentialverteilung feiert Geburtstag C

Darum geht es

Warum sich Geburtstage so oft häufen (ganzzahlige Stichproben ***mit Zurücklegen***)

01. 01.	1	Sarah	1
02. 01.	2	Ann, Tim, Maike	0,0,0
03. 01.	3		
04. 01.	4	Jana	4
05. 01.	5		
06. 01.	6		
07. 01.	7		
08. 01.	8	Frank, Jim	0,0
...		...	...
29.12	363	Niki	3

Nebenstehende Tabelle zeigt einen Ausschnitt aus dem Geburtstagskalender einer Jahrgangsstufe mit k = 73 Schülerinnen und Schülern, deren Geburtstage sich auf n = 365 Tage verteilen. Sarah hat am 01.01. Geburtstag. Der nächste Geburtstag ist der 02.01. Sarah muss also nur einen Tag warten. Ann, Tim und Maike müssen 0 Tage warten, weil sie am gleichen Tag Geburtstag haben. Für Jana beträgt die Wartezeit vier Tage… und bei Niki (29.12.) schließt sich mit 3 Tagen Wartezeit der Kreis zu Sarah.

1 Experiment

a) Bild 1 veranschaulicht die Wartezeiten in Sarahs Stufe. Rechnen Sie nach: Die mittlere Wartezeit auf den nächsten Geburtstag beträgt hier 4,42 Tage.

b) Erstellen Sie für *Ihre Jahrgangsstufe* eine entsprechende Grafik. Wenn Sie die Datenerhebung auf *Ihren Kurs* beschränken wollen, können Sie zwecks Vergrößerung der Stichprobe die Geburtstage Ihrer Geschwister/Eltern/Freunde hinzunehmen.

c) * Vergleichen Sie die Ergebnisse Ihrer Datenerhebung mit der fertigen Simulation *geburtstagwarten-kurs.ggb*

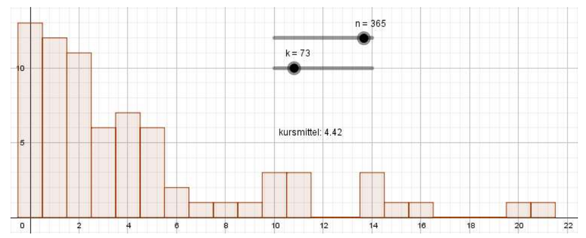
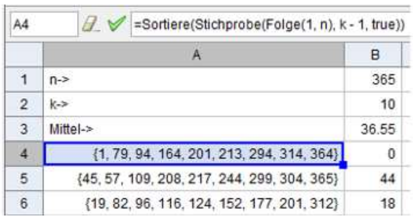


Bild 1: Warten auf den nächsten Geburtstag in Sarahs Kurs

2 Sarahs Wartezeitenverteilung - Simulationen

a) Die 73 Wartezeiten in Sarahs Kurs sind nicht unabhängig voneinander, und zur Schätzung der Wahrscheinlichkeiten brauchen wir mehr als 73 Wartezeiten. Deswegen fokussieren wir *eine ausgewählte* Schülerin „Sarah", die am 01.01. Geburtstag hat. Sarahs Wartezeit auf den nächsten Geburtstag ist dann in jeder simulierten Jahrgangsstufe das Ergebnis einer Zufallsgröße X, die Werte $0 \le X \le 364$ annehmen kann. Den Wert 0 nimmt X an, wenn noch jemand am 01.01. Geburtstag hat, und den Wert 364, wenn alle anderen am 31.12. Geburtstag haben. Simulieren Sie (nach der Vorlage von Bild 2) 200 Jahrgangsstufen, die (zusätzlich zu Sarah) 72 weitere Schülerinnen und Schüler haben. Vergleichen Sie mit *geburtstagswarten-sarah.ggb*

b) Veranschaulichen Sie die 200 Wartezeiten in einem Histogramm ähnlich wie in Bild 1, und ermitteln Sie jeweils, wie lange Sarah im Mittel auf den nächsten Geburtstag warten muss.



A4 =Sortiere(Stichprobe(Folge(1, n), k - 1, true))

	A	B
1	n->	365
2	k->	10
3	Mittel->	36.55
4	{1, 79, 94, 164, 201, 213, 294, 314, 364}	0
5	{45, 57, 109, 208, 217, 244, 299, 304, 365}	44
6	{19, 82, 96, 116, 124, 152, 177, 201, 312}	18

Bild 2: Gruppe mit k=10 Personen. In Spalte A stehen die Geburtstage der 9 Mitschüler von Sarah, in B, wie lange Sarah auf den nächsten Geburtstag warten muss, in B3 die Mittlere Wartezeit aus 200 Simulationen.

3 Theorie

a) Begründen Sie mithilfe der Pfadregel, dass für Sarah gilt $P(X \ge d) = \left(\frac{365-d}{365}\right)^{72}$, $P(X \le d) = 1 - \left(\frac{364-d}{365}\right)^{72}$ und

$$P(X = d) = \left(\frac{365-d}{365}\right)^{72} - \left(\frac{365-(d+1)}{365}\right)^{72}$$

b) Visualisieren Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung und bestätigen Sie: Der Erwartungswert beträgt E(X) = 4,52 (Tage).

c) Erläutern Sie die folgende Termumformung $P(X \ge d) = \left(\frac{365-}{365}\right)^{72} = \left(1 - \frac{\frac{72\cdot d}{365}}{72}\right)^{72} \approx e^{-\frac{72}{365}\cdot d} = e^{-\lambda\cdot d}$

Begründen Sie: Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X ist näherungsweise exponentialverteilt mit $\lambda = \frac{72}{365}$.

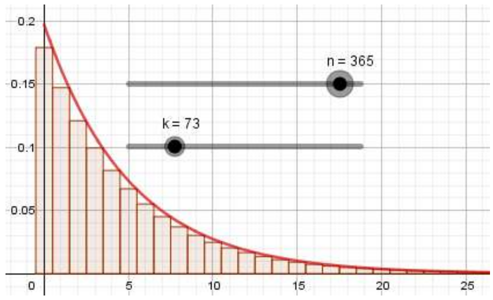


Bild 3: Wahrscheinlichkeitsverteilung

d) Vergleichen Sie die exakten Wahrscheinlichkeiten P(X=d) mit den Näherungswerten der Exponentialverteilung $P(d-1 \le X < d) = \int_{d-1}^{d} \lambda \cdot e^{-\lambda x} dx = [-e^{-\lambda}\ ]_{d-1}^{d}$ mit Parameter $\lambda = \frac{72}{365}$.

Die Exponentialverteilung in der Umkleide C

Darum geht es

Gedränge in der Umkleide (ganzzahlige Stichproben ***ohne Zurücklegen***)

Im Umkleideraum der Aquarena stehen n = 100 Schränke im Kreis. Nur k = 20 Schränke sind belegt. Max geht nach dem Schwimmen optimistisch zu seinem Schrank. „Heute sollte ich genug Platz haben“, denkt er, „weil auf einen Badegast 5 Schränke kommen.“ Leider wird Max enttäuscht: Es knubbelt sich auch heute wieder genau bei seinem Schrank.
Ich bin eben ein Pechvogel, denkt er sich.

1 Simulationen

Die Frage, ob Max tatsächlich ein Pechvogel ist, beantwortet eine Simulation: Dazu werden die Schränke (in Gedanken) so nummeriert, dass Max die Nr. 1 hat. Die rechts davon liegenden Schränke haben die Nummern 2 bis 100. Von denen sind k-1 = 19 zufällig belegt.

a) Welche belegt sind, entscheidet eine Stichprobe „ohne Zurücklegen“ aus {2, …, 99}. Berechnen Sie für, wie viel Platz zwischen Max‘ und dem nächsten belegten Schrank ist. Bild 1 kann beim Simulieren helfen.
b) Wiederholen Sie die Simulation und prüfen Sie: Der Abstand zum nächsten belegten Schrank beträgt durchschnittlich μ=n/k=5.
c) Schätzen Sie aus der Stichprobe die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Schrank rechts neben Max belegt ist, das also gilt X=1.
d) Stellen Sie die Verteilung der Abstände durch ein Histogramm wie in Bild 2 dar, und beurteilen Sie Max‘ „Pechvogel-Aussage“.
e) *Nico: „Ich simuliere die Schrankbelegung mit `=Sortiere(Stichprobe(Folge(1,n),k,false`, berechne die Differenzen und habe mit einer Stichprobe gleich 99 Schrankabstände simuliert“. Anna: “Gute Idee, aber nicht ganz sauber, weil die 99 Abstände nicht unabhängig voneinander sind.“ Führen Sie Nicos Idee aus, vergleichen Sie die Simulationsergebnisse und erläutern Sie Annas Einwand.

A4 =Stichprobe(Folge(2, n), k - 1, false)

	A	B	C
1	n->	10	
2	k->	4	
3	Mittel	2.4975	
4	{5, 10, 9}	4	
5	{10, 3, 6}	2	
6	{8, 3, 2}	1	
7	{10, 5, 9}	4	

Bild 1:
Simulation für n=10 Schränke und k = 4 Gäste. Max hat Schranknummer 1, die anderen haben die Schranknummern 5, 10 und 9 (Zelle A4). Der nächste belegte Schrank „5“ liegt also 4 Positionen rechts von Max (B4).

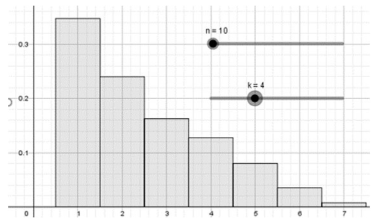


Bild 2: Verteilung der Abstände 1≤D≤7 zum nächsten belegten Schrank bei n=10 Schränken und k = 4 Gästen.

2 Theorie

a) Erklären Sie einander die Aussagen, die Bild 3 für eine kleine Umkleide mit n=5 Schränken macht, in der neben Max zwei weitere Gäste (also k=3 Personen) Schränke belegt haben. Zeigen Sie z. B. an einem anderen Abzählbeispiel, dass bei k Gästen und n Schränken gilt $\boldsymbol{P(X=1)=\frac{k-1}{n-1}}$.
b) Der Binomialkoeffizient $\boldsymbol{\binom{n}{k}}$ gibt an, auf wie viele Weisen man n Kugeln auf k Fächer verteilen kann. Begründen Sie mit einem Blick auf Bild 3, dass bei k Besuchern und n Schränken gilt $\boldsymbol{P(X\geq d)=\frac{\binom{n-d}{k-1}}{\binom{n-1}{k-1}}}$.
c) Nutzen Sie b), um die Wahrscheinlichkeitsverteilung zu zeichnen für den Abstand d bis zum nächsten freien Schrank.
d) Beurteilen Sie, wie gut die Exponentialfunktion $\boldsymbol{f_\lambda}$ mit $\boldsymbol{f_\lambda(x)=\lambda\cdot e^{-\lambda x}}$, $\boldsymbol{\lambda=\frac{n}{k}}$ (Wahrscheinlichkeitsdichte mit Erwartungswert n/k) die Wahrscheinlichkeitsverteilung beschreibt. Variieren Sie n und k.
e) Vergleichen Sie mit der geometrischen Verteilung zu $\boldsymbol{p=\frac{k-1}{n-1}}$

1	2	3	4	5	x		x	P(X=x)
1	1	1			1		1	3/6=1/2
1	1		1		1		2	2/6=1/3
1	1			1	1		3	1/6
1		1	1		2			
1		1		1	2		μ	5/3
1			1	1	3			

Bild 3: k=3 Personen, n=5 Schränke

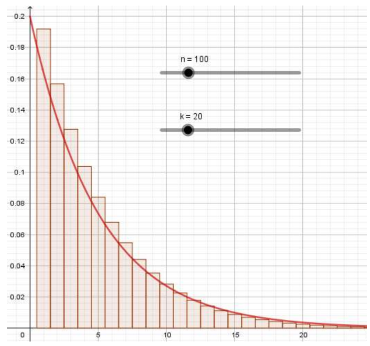


Bild 4: k=3 Personen, n=5 Schränke
schwimmbad.ggb

3 Datensammeln

Überprüfen Sie arbeitsteilig bei Besuchen im Schwimmbad oder in Bibliotheken/Museen mit Schließfächern die Theorie auf Praxistauglichkeit.